

Mathématiques de l'ingénieur

Rémi Vaillancourt

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ D'OTTAWA, OTTAWA, ON,
CANADA, K1N 6N5

Table des matières

Chapitre 1. Les problèmes et les idées fondamentales	1
1.1. Les problèmes	1
1.2. Les modèles mathématiques	1
1.3. Une 1 ^{re} idée : la séparation des variables	2
1.4. Une 2 ^e idée : les fonctions orthogonales	9
1.5. Développement selon une famille de fonctions orthogonales	15
Exercices pour le chapitre 1er	18
Chapitre 2. Problèmes en coordonnées cartésiennes	21
2.1. Problème des ondes en dimension 1	21
2.2. Problème de la chaleur en dimension 1	38
2.3. Le problème des ondes en 2 dimensions	45
2.4. Le problème de la chaleur en 2 dimensions	49
2.5. Le problème du potentiel pour un rectangle	51
Exercices pour la section 2.1	54
Exercices pour la section 2.2	55
Exercices pour la section 2.3	57
Exercices pour les sections 2.4 et 2.5	57
Chapitre 3. Analyse de Fourier	59
3.1. Séries de FOURIER	59
3.2. Série de FOURIER discrète et convolution	74
3.3. Transformation de FOURIER	77
Exercices pour la section 3.1	84
Exercices pour la section 3.2	85
Exercices pour la section 3.3	86
Chapitre 4. Problèmes en coordonnées sphériques	89
4.1. Le problème du potentiel pour une sphère	89
4.2. Le potentiel pour deux sphères concentriques	94
4.3. La température $u(\varphi, t)$ d'une sphère mince	99
Exercices pour le chapitre 4	100
Chapitre 5. Approximation en norme quadratique	103
5.1. Développement de FOURIER généralisé	103
5.2. Approximation en norme quadratique	103
5.3. Une application : la quadrature gaussienne	107
Exercices pour le chapitre 5	111
Chapitre 6. Problèmes en coordonnées polaires	113
6.1. Le problème des ondes	113

6.2. Le problème de la chaleur	127
6.3. Le problème du potentiel pour un cercle	138
Exercices pour la section 6.1	140
Exercices pour la section 6.2	141
Exercices pour la section 6.3	141
Chapitre 7. Solutions $u(r)$ de $\nabla^2 u = 0$	143
7.1. Introduction	143
7.2. Solution en dimension 2	143
7.3. Solution en dimension 3	144
7.4. Solution en dimension n	146
Exercices pour le chapitre 7	146
Chapitre 8. Solutions analytiques	149
8.1. Remarque sur les fonctions analytiques	149
8.2. L'équation de LEGENDRE	156
8.3. Les relations d'orthogonalité pour les $P_n(x)$	158
8.4. Remarques sur les fonctions holomorphes	162
Exercices pour la section 8.1	167
Exercices pour la section 8.3	168
Exercices pour la section 8.4	169
Chapitre 9. La Méthode de FROBENIUS	171
9.1. Solutions en série de FROBENIUS	171
9.2. La détermination des coefficients de la solution par récurrence	172
9.3. Exemples	173
9.4. La solution générale dans le cas 3 avec $k = 0$	177
9.5. La méthode de la variation des paramètres	178
Exercices pour le chapitre 9	179
Chapitre 10. L'Équation de BESSEL	181
10.1. La solution $J_\nu(x)$ de première espèce	181
10.2. La solution $Y_n(x)$ de seconde espèce	184
10.3. Les fonctions $J_{1/2}(x)$ et $J_{-1/2}(x)$	185
10.4. La relation d'orthogonalité pour les $J_\nu(x)$	187
10.5. Réduction d'une équation à l'équation de BESSEL	189
Exercices pour le chapitre 10	192
Chapitre 11. Le Problème de STURM-LIOUVILLE	195
11.1. La forme de divergence d'une équation différentielle	195
11.2. Le problème de STURM-LIOUVILLE	195
11.3. Les relations d'orthogonalité	196
11.4. Problèmes réguliers et problèmes singuliers	197
11.5. Polynômes orthogonaux	198
Exercices pour le chapitre 11	202
Chapitre 12. Exemple d'examen final avec solutions	205
Chapitre 13. Formulaire et Tables	217
13.1. Séries de FOURIER	217
13.2. Les polynômes de LEGENDRE $P_n(x)$ sur $[-1, 1]$	218

13.3. La fonction gamma	220
13.4. Les fonctions de BESSEL	220
13.5. Solutions en série par la méthode de FROBENIUS	223
13.6. Le problème de STURM–LIOUVILLE	224
13.7. Développement de FOURIER généralisé	225
13.8. Le laplacien $\Delta = \nabla^2$	226
13.9. Solutions générales par séparation de variables	226
13.10. Séries usuelles	228
Index	229

CHAPITRE 1

Les problèmes et les idées fondamentales

1.1. Les problèmes

On décrit le domaine géométrique et les coordonnées spatiales naturelles (V. figure 1.1) de chacun des types de problèmes d'évolution ou stationnaires étudiés dans ce cours.

- (a) Problèmes de vibrations ou d'ondes : la position est fonction du temps t .

objet physique	coordonnées spatiales	temporelle
corde	cartésienne : x	t
membrane rectangulaire	cartésiennes : (x, y)	t
membrane circulaire	polaires : (r, θ)	t

- (b) Problèmes de diffusion ou de la chaleur : la température est fonction du temps t .

objet physique	coordonnées spatiales	temporelle
tige	cartésienne : x	t
plaque rectangulaire	cartésiennes : (x, y)	t
tube rectangulaire	cartésiennes cylindriques : (x, y, z)	t
tube circulaire	polaires cylindriques : (r, θ, z)	t
sphère	sphériques : (r, θ, φ)	t

- (c) Problèmes stationnaires ou de potentiel : le potentiel est indépendant du temps t .

objet physique	coordonnées spatiales
anneau	polaires : (r, θ)
tube circulaire	polaires cylindriques : (r, θ, z)
sphère creuse	sphériques : (r, θ, φ)
température entre 2 plaques parallèles	cartésiennes : (x, y, z)
température entre 2 cylindres coaxiaux	polaires cylindriques : (r, θ, z)
température entre 2 sphères concentriques	sphériques : (r, θ, φ)

1.2. Les modèles mathématiques

On étudiera les trois types de problèmes au moyen de leurs modèles mathématiques qui sont les équations aux dérivées partielles suivantes.

- (a) L'équation des ondes pour $u(x, y, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0, \quad \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

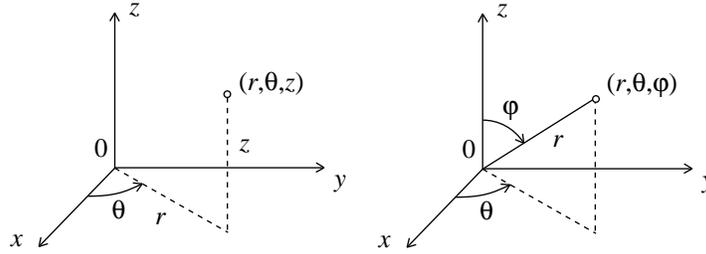


FIG. 1.1. Repères spatiaux : (a) polaire cylindrique et (b) sphérique.

avec deux conditions initiales (C.I.) :

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t},$$

et les conditions au bord (C.B.), appelées aussi conditions aux limites (C.L.) :

$$u(x, y, t) = 0.$$

(b) L'équation de la chaleur pour $u(x, y, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \nabla^2 u = 0,$$

avec une seule condition initiale :

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

et les conditions au bord :

$$u(x, y, t) = 0.$$

(c) L'équation de LAPLACE pour $u(x, y)$ (où t est absent)

$$\nabla^2 u = 0,$$

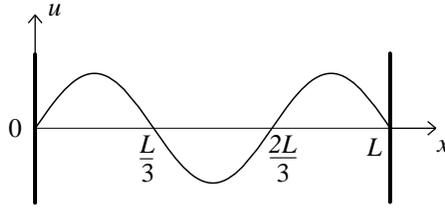
avec les conditions au bord :

$$u(x, y) = f(x, y).$$

1.3. Une 1^{re} idée : la séparation des variables

La séparation des variables transforme une équation aux dérivées partielles en plusieurs équations différentielles. Pour les problèmes aux limites sur un domaine géométrique donné, la séparation des variables est possible si les variables du problème sont les coordonnées naturelles du domaine, par exemple, les coordonnées cartésiennes, polaires, ou sphériques, respectivement, dans le cas d'un rectangle, d'un disque ou d'une sphère, comme on verra aux chapitres ultérieurs.

Dans cette section, on présente la méthode de la séparation des variables au moyen de quelques exemples simples sans tenir compte, pour le moment, d'aucune condition aux limites.

FIG. 1.2. Corde vibrante de longueur L .

EXEMPLE 1.1. Séparer les variables de l'équation aux dérivées partielles pour la corde vibrante :

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0.$$

RÉSOLUTION. La coordonnée spatiale naturelle est la coordonnée cartésienne x (V. figure 1.2). On note les dérivées partielles

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x := \frac{\partial}{\partial x}.$$

Posons

$$u(x, t) = G(x)H(t)$$

dans l'équation aux dérivées partielles ; alors

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u &= G(x)\ddot{H}(t), & \dot{\cdot} &:= \frac{d}{dt}, \\ \partial_x^2 u &= G''(x)H(t), & G' &:= \frac{dG}{dx}, \end{aligned}$$

et

$$G\ddot{H} = c^2 G''H.$$

On divise les deux membres par $c^2 GH$:

$$\frac{G\ddot{H}}{c^2 GH} = \frac{G''H}{GH},$$

et l'on simplifie :

$$\frac{\ddot{H}(t)}{c^2 H(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)}.$$

Pour t fixé et x variable, le 1^{er} membre est constant :

$$(1.1) \quad \frac{\ddot{H}(t)}{c^2 H(t)} = \lambda, \quad \lambda \text{ une constante ;}$$

donc

$$\frac{G''(x)}{G(x)} = \lambda, \quad \text{pour tout } x,$$

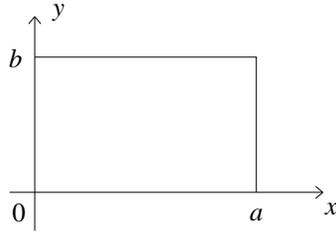
et, par conséquent, (1.1) est vrai pour tout t . On obtient donc deux équations différentielles du 2^e ordre :

$$G''(x) = \lambda G(x),$$

et

$$\ddot{H}(t) = \lambda c^2 H(t).$$

On sait résoudre ces deux équations différentielles. □

FIG. 1.3. Plaque rectangulaire de dimensions a et b .

REMARQUE 1.1. Lors de la séparation des variables, l'opérateur de dérivée partielle du 2^e ordre ∂_x^2 donne lieu à une équation différentielle du 2^e ordre pour $G(x)$ et l'opérateur de dérivée partielle du 2^e ordre ∂_t^2 donne lieu à une équation différentielle du 2^e ordre pour $H(t)$.

EXEMPLE 1.2. Séparer les variables de l'équation aux dérivés partielles pour le problème de la chaleur d'une plaque rectangulaire :

$$\partial_t u - c^2 (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = 0.$$

RÉSOLUTION. Les coordonnées spatiales naturelles sont les coordonnées cartésiennes (x, y) (V. figure 1.3). Posons

$$u(x, y, t) = G(x)Q(y)H(t)$$

dans l'équation ; alors

$$\partial_t u = GQ\dot{H},$$

$$\partial_x^2 u = G''QH,$$

$$\partial_y^2 u = GQ''H,$$

et

$$GQ\dot{H} = c^2(G''QH + GQ''H).$$

On divise par c^2GQH :

$$\frac{GQ\dot{H}}{c^2GQH} = \frac{G''QH}{GQH} + \frac{GQ''H}{GQH},$$

et l'on simplifie :

$$\frac{\dot{H}(t)}{c^2H(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(y)}.$$

Pour t fixé et x et y variables,

$$(1.2) \quad \frac{\dot{H}(t)}{c^2H(t)} = \lambda, \quad \text{une constante ;}$$

donc

$$\frac{G''(x)}{G(x)} = -\frac{Q''(y)}{Q(y)} + \lambda.$$

Pour y fixé,

$$\frac{G''(x)}{G(x)} = \mu, \quad \text{une constante, pour tout } x;$$

et donc

$$\frac{Q''(y)}{Q(y)} = \lambda - \mu, \quad \text{une constante, pour tout } y.$$

Enfin, il suit que (1.2) est vrai pour tout t .

On obtient trois équations différentielles respectivement pour $H(t)$, $G(x)$ et $Q(y)$, que l'on sait résoudre :

$$\begin{aligned} \dot{H}(t) &= c^2 \lambda H(t), & \partial_t &\rightarrow \text{éq. diff. du 1^{er} ordre en } t, \\ G''(x) &= \mu G(x), & \partial_x^2 &\rightarrow \text{éq. diff. du 2^e ordre en } x, \\ Q''(y) &= (\lambda - \mu)Q(y), & \partial_y^2 &\rightarrow \text{éq. diff. du 2^e ordre en } y. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.3. Résoudre l'équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre avec une condition au bord :

$$u_x + u_y = 0, \quad u(x, 0) = 3e^{-2x},$$

par séparation des variables.

RÉSOLUTION. Posons

$$u(x, y) = G(x)Q(y);$$

alors l'équation aux dérivées partielles devient

$$G'(x)Q(y) + G(x)Q'(y) = 0.$$

Divisant par $G(x)Q(y)$, on a

$$\frac{G'(x)}{G(x)} + \frac{Q'(y)}{Q(y)} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = -\frac{Q'(y)}{Q(y)} = c, \quad \text{une constante.}$$

Donc

$$\begin{aligned} G'(x) &= c G(x) \implies G(x) = k_1 e^{cx}, \\ Q'(y) &= -c Q(y) \implies Q(y) = k_2 e^{-cy}, \end{aligned}$$

et

$$u(x, y) = k_1 k_2 e^{c(x-y)} = k e^{c(x-y)}.$$

On détermine les deux constantes arbitraires, k et c , au moyen de la condition sur le bord $y = 0$. Puisque

$$u(x, 0) = k e^{cx} = 3e^{-2x}, \quad \text{pour tout } x,$$

alors

$$k = 3, \quad c = -2,$$

d'où la solution

$$u(x, y) = 3e^{-2(x-y)},$$

qui est unique. □

EXEMPLE 1.4. Résoudre l'équation aux dérivées partielles du 2^e ordre avec une condition au bord :

$$u_{xy} = u, \quad u(0, y) = 5e^{y/7}.$$

RÉSOLUTION. Posons

$$u(x, y) = G(x)Q(y);$$

alors l'équation aux dérivées partielles devient

$$G'(x)Q'(y) = G(x)Q(y).$$

En divisant par $G(x)Q'(y)$, on a

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{Q(y)}{Q'(y)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{Q(y)}{Q'(y)} = c, \quad \text{une constante.}$$

Donc

$$\begin{aligned} G'(x) = cG(x) &\implies G(x) = k_1 e^{cx}, \\ Q'(y) = \frac{1}{c}Q(y) &\implies Q(y) = k_2 e^{y/c}, \end{aligned}$$

et

$$u(x, y) = k_1 k_2 e^{(cx+y/c)} = ke^{(cx+y/c)}.$$

On détermine les deux constantes arbitraires, k et c , au moyen de la condition sur le bord $x = 0$. Puisque

$$u(0, y) = ke^{y/c} = 5e^{y/7}, \quad \text{pour tout } y,$$

alors

$$k = 5, \quad c = 7,$$

d'où la solution

$$u(x, y) = 5e^{(7x+y/7)},$$

qui est unique. □

On aura besoin du laplacien en coordonnées polaires. On démontre donc le lemme suivant.

LEMME 1.1. *Le laplacien, rapporté aux coordonnées cartésiennes (x, y) :*

$$(1.3) \quad \nabla^2 u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u,$$

est équivalent au laplacien rapporté aux coordonnées polaires (r, θ) :

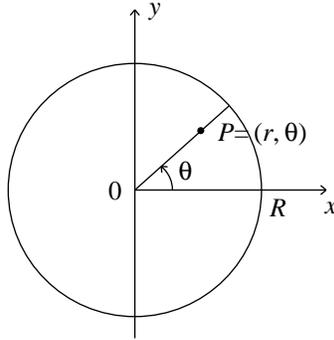
$$(1.4) \quad \nabla^2 u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u.$$

DÉMONSTRATION. On passe de la représentation polaire à la représentation cartésienne pour éviter la dérivée des fonctions trigonométriques inverses. Posons

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta &\implies x_r = \cos \theta, & x_\theta &= -r \sin \theta, \\ y = r \sin \theta &\implies y_r = \sin \theta, & y_\theta &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r \\ &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \end{aligned}$$

FIG. 1.4. Membrane circulaire vibrante de rayon R .

et

$$\begin{aligned} u_{rr} &= u_{xx}x_r \cos \theta + u_{xy}y_r \cos \theta + u_{yx}x_r \sin \theta + u_{yy}y_r \sin \theta \\ &= u_{xx} \cos^2 \theta + u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yx} \cos \theta \sin \theta + u_{yy} \sin^2 \theta \\ &= u_{xx} \cos^2 \theta + 2u_{xy} \sin \theta \cos \theta + u_{yy} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

De même :

$$u_{\theta} = u_x x_{\theta} + u_y y_{\theta} = -ru_x \sin \theta + ru_y \cos \theta$$

et

$$\begin{aligned} u_{\theta\theta} &= -ru_{xx}x_{\theta} \sin \theta - ru_{xy}y_{\theta} \sin \theta - ru_x \cos \theta \\ &\quad + ru_{yx}x_{\theta} \cos \theta + ru_{yy}y_{\theta} \cos \theta - ru_y \sin \theta \\ &= r^2 u_{xx} \sin^2 \theta - r^2 u_{xy} \sin \theta \cos \theta - ru_x \cos \theta \\ &\quad - r^2 u_{xy} \sin \theta \cos \theta + r^2 u_{yy} \cos^2 \theta - ru_y \sin \theta. \end{aligned}$$

La substitution des expressions obtenues pour u_r , u_{rr} et $u_{\theta\theta}$ dans

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$

donne bien

$$u_{xx} + u_{yy}. \quad \square$$

EXEMPLE 1.5. Séparer les variables de l'équation aux dérivées partielles pour le problème de la membrane circulaire vibrante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = 0.$$

RÉSOLUTION. Les coordonnées spatiales naturelles pour ce problème sont les coordonnées polaires (r, θ) (V. figure 1.4). On pose :

$$u(r, \theta, t) = W(r)F(\theta)G(t).$$

Si l'on substitue

$$\begin{aligned}u_{tt} &= WF\ddot{G} \\u_r &= W'FG \\u_{rr} &= W''FG \\u_{\theta\theta} &= WF''G\end{aligned}$$

dans l'équation aux dérivées partielles selon les coordonnées spatiales polaires :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u \right) = 0,$$

les dérivées partielles deviennent des dérivées ordinaires et l'on obtient

$$WF\ddot{G} - c^2 \left(W''FG + \frac{1}{r} W'FG + \frac{1}{r^2} WF''G \right) = 0.$$

On divise cette équation par c^2WFG :

$$\frac{WF\ddot{G}}{c^2WFG} = \frac{W''FG}{WFG} + \frac{1}{r} \frac{W'FG}{WFG} + \frac{1}{r^2} \frac{WF''G}{WFG}$$

et l'on simplifie :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{F''(\theta)}{F(\theta)}.$$

Le 1^{er} membre, qui est indépendant de r et de θ , est constant pour t fixé; par conséquent le second l'est aussi pour tout r et θ . Il suit alors que le 1^{er} membre est constant pour tout t . On a donc

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{F''(\theta)}{F(\theta)} = \lambda, \quad \text{une constante.}$$

On obtient donc une équations différentielle simple pour $G(t)$:

$$(1.5) \quad \ddot{G}(t) = \lambda c^2 G(t).$$

Pour séparer l'équation en F et W :

$$r^2 \frac{W''(r)}{W(r)} + r \frac{W'(r)}{W(r)} + \frac{F''(\theta)}{F(\theta)} = \lambda r^2,$$

on procède de la même façon :

$$r^2 \frac{W''(r)}{W(r)} + r \frac{W'(r)}{W(r)} - \lambda r^2 = -\frac{F''(\theta)}{F(\theta)} = -\mu, \quad \text{une constante.}$$

On obtient alors une équation différentielle pour $F(\theta)$:

$$(1.6) \quad F''(\theta) = \mu F(\theta)$$

et une équation différentielle pour $W(r)$:

$$(1.7) \quad r^2 W''(r) + r W'(r) - (\lambda r^2 - \mu) W(r) = 0.$$

On sait résoudre les deux premières équations (1.5) et (1.6), la troisième (1.7) est l'équation de BESSEL qu'on étudiera aux chapitres 6 et 10. \square

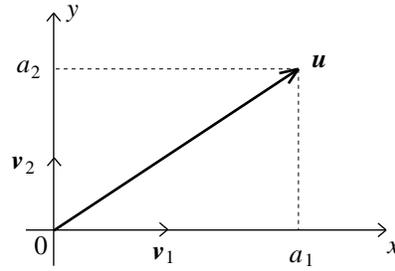


FIG. 1.5. Un 2-vecteur rapporté à une base orthogonale.

1.4. Une 2^e idée : les fonctions orthogonales

On motive cette section en rappelant un simple résultat du produit scalaire pour une *base orthogonale* de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dans le plan euclidien :

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} \|\mathbf{v}_i\|^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2,$$

et la décomposition d'un vecteur quelconque \mathbf{u} suivant les éléments de la base,

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2,$$

(V. figure 1.5). On calcule les coefficients a_1 et a_2 au moyen du produit scalaire :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = a_1 \|\mathbf{v}_1\|^2 \implies a_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2},$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2 = a_2 \|\mathbf{v}_2\|^2 \implies a_2 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}.$$

Alors

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2.$$

Si $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, $i = 1, 2$, on dit que la base de vecteurs est *orthonormée*.

On généralise maintenant ce résultat à une suite orthogonale de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, dans un espace de dimension infinie de fonctions $f(x)$ définies sur un intervalle $a \leq x \leq b$ qui peut être un segment de droite, une demie droite ou la droite toute entière.

NOTATION 1.1. Soit f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$. On note le *produit scalaire* de f et g :

$$(1.8) \quad (f, g) := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

et la norme de f :

$$(1.9) \quad \|f\| := (f, f)^{1/2}.$$

On dit que f et g sont *orthogonales* et l'on note $f \perp g$, si $(f, g) = 0$.

DÉFINITION 1.1. La suite de fonctions, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, est *orthogonale* sur $[a, b]$ relativement au produit scalaire (1.8) si

$$(1.10) \quad \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = \begin{cases} \|\varphi_n\|^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Si $\|\varphi_n\| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, on dit que la suite est *orthonormée*.

THÉORÈME 1.1. Soit $\{\varphi_n(x)\}$ une suite de fonctions orthogonales sur $[a, b]$. Si une fonction $f(x)$ admet le développement convergent selon les φ_n :

$$(1.11) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

alors les coefficients sont uniquement déterminés par la formule

$$(1.12) \quad a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx.$$

Or le 2^e membre est égal à $a_m \|\varphi_m\|^2$ et le 3^e membre est égal à $b_m \|\varphi_m\|^2$ grâce à l'orthogonalité des φ_k ; donc

$$a_m = b_m = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx, \quad m = 0, 1, \dots \quad \square$$

Soit une suite de fonctions, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, orthogonales sur $[a, b]$. Il suit de (1.10) que les fonctions

$$(1.13) \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n(x)$$

forment une suite orthonormée. On a donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.1.

$$(1.14) \quad \{\varphi_n(x)\} \text{ est orthogonale} \implies \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|} \right\} \text{ est orthonormée.}$$

REMARQUE 1.2. Nous n'avons pas dit quelle espace de fonctions admettait une suite orthogonale de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ comme base. L'espace contient toutes les sommes finies :

$$g(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x).$$

Une fonction $f(x)$ est dans l'espace si elle est la limite des $g(x)$:

$$\|f - g_n\| \rightarrow 0, \quad \text{pour une suite } \{g_n(x)\}.$$

Le choix d'un espace de fonctions dépend du choix de la norme $\|f - g_n\|$. On dit que la suite orthogonale est *complète* pour toutes les fonctions limites $f(x)$ et une fonction limite admet un développement *unique* selon la base orthogonale $\{\varphi_n(x)\}$.

1.4.1. Polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$. On construit directement une suite de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$.

EXEMPLE 1.6. Construire une suite orthogonale de polynômes $P_n(x)$ sur $[-1, 1]$ de degré n , tels que $P_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

RÉSOLUTION. Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= ax^0 = a, \\ P_0(1) &= 1 \implies a = 1; \end{aligned}$$

donc

$$P_0(x) = 1.$$

Pour $n = 1$:

$$P_1(x) = ax + b,$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 P_1(x)P_0(x) dx = \int_{-1}^1 (ax + b) \times 1 dx = 2b \implies b = 0, \\ 1 &= P_1(1) = a \times 1 \implies a = 1. \end{aligned}$$

Donc

$$P_1(x) = x.$$

Pour $n = 2$:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

et

$$\begin{aligned} 0 &= (P_2, P_0) = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) \times 1 dx = a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2a}{3} + 2c = 0 \implies a = -3c, \\ 0 &= (P_2, P_1) = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)x dx = a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2b}{3} \implies b = 0, \\ 1 &= P_2(1) = -3c \times 1^2 + c = -2c \implies c = -\frac{1}{2}, \quad a = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1).$$

De même :

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

On verra, au chapitre 8, que les $P_n(x)$ sont les polynômes de LEGENDRE. On représente les 5 premiers $P_n(x)$ à la figure 1.6. \square

On remarque que les n zéros du polynôme $P_n(x)$, de degré n , sont tous dans l'intervalle $] - 1, 1[$, qu'ils sont simples et qu'ils entrelacent les $n - 1$ zéros de $P_{n-1}(x)$. Les fonctions orthogonales que nous étudierons dans ce cours jouissent de ces propriétés.

On emploiera souvent la définition suivante.

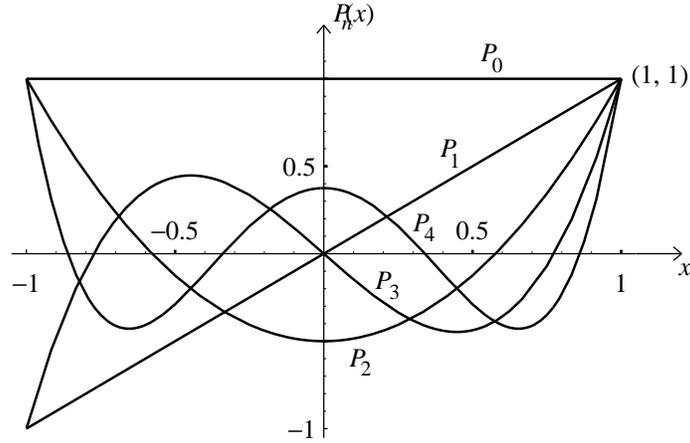


FIG. 1.6. Les 5 premiers polynômes de LEGENDRE.

DÉFINITION 1.2. Soit une fonction $f(x)$ définie sur les réels. On dit que f est *paire* si

$$f(-x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

et *impaire* si

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Une fonction $y = f(x)$ est *paire* si son graphe est symétrique par rapport à l'axe Oy et *impaire* si son graphe est symétrique par rapport à l'origine. Le produit de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires est une fonction paire. Le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire. Soient $f(x)$ paire et $g(x)$ impaire. Alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 0.$$

On sait que les fonctions suivantes sont paires :

- (1) $x^{2n}, \quad n \in \mathbb{Z},$
- (2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad i = \sqrt{-1},$
- (3) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$

et que les fonctions suivantes sont impaires :

- (4) $x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{Z},$
- (5) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad i = \sqrt{-1},$
- (6) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

On verra que les polynômes de LEGENDRE de degré pair, $P_{2n}(x)$, sont pairs et ceux de degré impair, P_{2n+1} , sont impaires.

1.4.2. Famille orthogonale $\{\cos(n\pi x/L), \sin(n\pi x/L)\}$ **sur** $[-L, L]$. On montre que les fonctions cosinus et sinus sont orthogonales entre elles sur un intervalle de périodicité.

Pour faciliter le calcul des produits scalaires des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire les intégrations, on emploiera les identités suivantes :

$$(1.15) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)],$$

$$(1.16) \quad \cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)],$$

$$(1.17) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2}[-\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

THÉORÈME 1.2. *Les fonctions*

$$(1.18) \quad 1, \quad \cos \frac{n\pi}{L}x, \quad \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

forment une suite orthogonale sur $[-L, L]$.

DÉMONSTRATION. On obtient facilement les relations d'orthogonalité des $\cos(n\pi x/L)$ et $\sin(n\pi x/L)$ sur $[-L, L]$ au moyen des identités trigonométriques (1.15)–(1.17) :

$$(1.19) \quad \begin{aligned} I &= \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \left(\frac{m+n}{L}\pi x \right) + \cos \left(\frac{m-n}{L}\pi x \right) \right] dx \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \neq 0, \\ 2L, & m = n = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$(1.20) \quad \begin{aligned} II &= \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\sin \left(\frac{m+n}{L}\pi x \right) - \sin \left(\frac{m-n}{L}\pi x \right) \right] dx = 0; \end{aligned}$$

$$(1.21) \quad \begin{aligned} III &= \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[-\cos \left(\frac{m+n}{L}\pi x \right) + \cos \left(\frac{m-n}{L}\pi x \right) \right] dx \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0. \quad \square \end{cases} \end{aligned}$$

Par le corollaire 1.1 on a la suite **orthonormée** :

$$(1.22) \quad \frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \cos \frac{n\pi}{L}x, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

1.4.3. Familles orthogonales $\{\cos(n\pi x/L)\}$ **et** $\{\sin(n\pi x/L)\}$ **sur** $[0, L]$.
On montre que chacune des familles des fonctions cosinus et sinus est orthogonale sur un demi-intervalle de périodicité.

THÉORÈME 1.3. *Chacune des familles de fonctions :*

$$(1.23) \quad \left\{1, \cos \frac{n\pi}{L}x\right\}, \quad \left\{\sin \frac{n\pi}{L}x\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

est orthogonale sur $[0, L]$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\cos t$ est une fonction paire, $\cos(-t) = \cos t$, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x dx \\ &= 2 \int_0^L \cos \frac{m\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x dx. \end{aligned}$$

Alors par (1.19), $I/2$ devient :

$$(1.24) \quad \int_0^L \cos \frac{m\pi}{L}x \cos \frac{n\pi}{L}x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{L}{2}, & m = n \neq 0, \\ L, & m = n = 0. \end{cases}$$

De même, puisque $\sin t$ est une fonction impaire, $\sin(-t) = -\sin t$, alors $\sin \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x$ est paire et l'on a

$$\begin{aligned} III &= \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x dx \\ &= 2 \int_0^L \sin \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x dx. \end{aligned}$$

Alors par (1.21), $III/2$ devient :

$$(1.25) \quad \int_0^L \sin \frac{m\pi}{L}x \sin \frac{n\pi}{L}x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{L}{2}, & m = n \neq 0, \\ 0, & m = n = 0. \end{cases} \quad \square$$

Les relations d'orthogonalité des cosinus et des sinus sur $[0, L]$ seront très utiles dans les applications.

1.4.4. Familles orthogonales $\{\cos((2n-1)\pi x/2L)\}$ **et** $\{\sin((2n-1)\pi x/2L)\}$ **sur** $[0, L]$. On montre que chacune des familles $\{\cos((2n-1)\pi x/(2L))\}$ et $\{\sin((2n-1)\pi x/(2L))\}$ est orthogonale sur un quart d'intervalle de périodicité.

THÉORÈME 1.4. *Chacune des familles de fonctions :*

$$(1.26) \quad \left\{\cos \frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right\}, \quad \left\{\sin \frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

est orthogonale sur $[0, L]$.

DÉMONSTRATION. Par (1.15), on a

$$\begin{aligned}
 (1.27) \quad & \int_0^L \cos \frac{(2m-1)\pi}{2L} x \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos \left(\frac{m+n-1}{L} \pi x \right) + \cos \left(\frac{m-n}{L} \pi x \right) \right] dx \\
 &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{L}{2}, & m = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

De même, par (1.17), on a

$$\begin{aligned}
 (1.28) \quad & \int_0^L \sin \frac{(2m-1)\pi}{2L} x \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[-\cos \left(\frac{m+n-1}{L} \pi x \right) + \cos \left(\frac{m-n}{L} \pi x \right) \right] dx \\
 &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{L}{2}, & m = n. \quad \square \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les relations d'orthogonalité des $\cos((2n-1)\pi x/(2L))$ et des $\sin((2n-1)\pi x/(2L))$ sur $[0, L]$ seront utiles dans les applications.

1.5. Développement selon une famille de fonctions orthogonales

1.5.1. Les séries de Fourier de cosinus et de sinus. Du théorème 1.3 on déduit le développement en *série de FOURIER de cosinus* d'une fonction $f(x)$ sur $[0, L]$:

$$(1.29) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

où, par (1.12) et (1.24),

$$\begin{aligned}
 (1.30) \quad & a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \\
 & a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx,
 \end{aligned}$$

si la série converge. De même, la *série de FOURIER de sinus* $f(x)$ sur $[0, L]$ est

$$(1.31) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

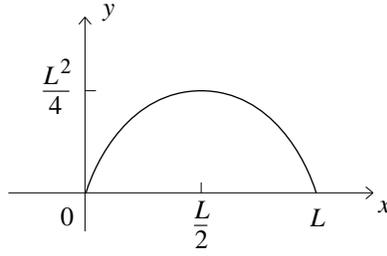
où, par (1.12) et (1.25),

$$(1.32) \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx,$$

si la série converge.

EXEMPLE 1.7. Trouver la série de FOURIER de sinus de la fonction (V. figure 1.7) :

$$f(x) = x(L-x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

FIG. 1.7. Fonction $f(x)$ pour les exemples 1.7 et 1.8.

RÉSOLUTION. La série de FOURIER de sinus de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

où, par (1.32),

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{2}{L} \left[-\frac{L}{n\pi} x(L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L (L-2x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{L}{n\pi} (L-2x) \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L + \frac{2L}{n\pi} \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \right] \\ &= \frac{4L}{n^2\pi^2} \left[-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L \right] = -\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [\cos n\pi - 1] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 8L^2/(n^3\pi^3) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors la solution est

$$f(x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi}{L} x. \quad \square$$

EXEMPLE 1.8. Trouver la série de FOURIER de cosinus de la fonction (V. figure 1.7) :

$$f(x) = x(L-x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

RÉSOLUTION. La série de FOURIER de cosinus de f est de la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x,$$

où, par (1.30),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L (Lx - x^2) dx = \frac{1}{L} \left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right] = \frac{L^2}{6}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (Lx - x^2) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{L}{n\pi} \left[(Lx - x^2) \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L - \int_0^L (L - 2x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right] \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[(L - 2x) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L + 2 \int_0^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx \right] \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} [(L - 2L) \cos n\pi - L \cos 0] + \frac{4L^2}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^L \\ &= \frac{2L^2}{n^2\pi^2} [(-1)(-1)^n - 1] \\ &= \frac{2L^2}{n^2\pi^2} [(-1)^{n+1} - 1] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -4L^2/(n^2\pi^2) & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors la solution est

$$f(x) = \frac{L^2}{6} - \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} x. \quad \square$$

1.5.2. Les séries de Fourier–Legendre. On présente deux exemples simples de développement en série de FOURIER–LEGENDRE.

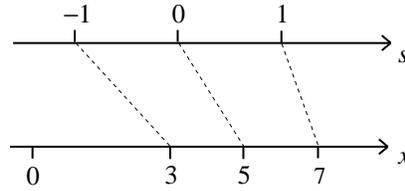
EXEMPLE 1.9. Développer le polynôme :

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1$$

sur $[-1, 1]$ selon les polynômes de LEGENDRE $P_0(x), P_1(x), \dots$

RÉSOLUTION. On exprime les puissances de x suivant la base des polynômes de LEGENDRE

$$\begin{aligned} P_0(x) = 1 &\implies 1 = P_0(x), \\ P_1(x) = x &\implies x = P_1(x), \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) &\implies x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) &\implies x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x). \end{aligned}$$

FIG. 1.8. Application affine de $x \in [3, 7]$ sur $s \in [-1, 1]$.

On évite ainsi le calcul d'intégrales. Alors

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x) - \frac{4}{3}P_2(x) - \frac{2}{3}P_0(x) + 4P_1(x) + P_0(x) \\ &= \frac{2}{5}P_3(x) - \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{23}{5}P_1(x) + \frac{1}{3}P_0(x). \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 1.10. Développer le polynôme :

$$p(x) = 2 + 3x + 5x^2$$

sur $[3, 7]$ selon les polynômes de LEGENDRE $P_0(x), P_1(x), \dots$

RÉSOLUTION. Appliquons $x \in [3, 7]$ sur $s \in [-1, 1]$ (V. figure 1.8).
Posons $s = ax + b$. Alors

$$-1 = 3a + b \quad \text{et} \quad 1 = 7a + b \quad \implies \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = -\frac{5}{2}.$$

On obtient les applications affines suivantes réciproques l'une de l'autre :

$$(1.33) \quad s = \frac{x-5}{2} \quad \text{et} \quad x = 2s + 5.$$

Alors

$$\begin{aligned} p(x) &= p(2s + 5) \\ &= 2 + 3(2s + 5) + 5(2s + 5)^2 \\ &= 142 + 106s + 20s^2 \\ &= 142P_0(s) + 106P_1(s) + 20 \left[\frac{2}{3}P_2(s) + \frac{1}{3}P_0(s) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$p(x) = \left(142 + \frac{20}{3}\right) P_0\left(\frac{x-5}{2}\right) + 106P_1\left(\frac{x-5}{2}\right) + \frac{40}{3}P_2\left(\frac{x-5}{2}\right). \quad \square$$

Exercices pour le chapitre 1er

Résoudre les problèmes aux valeurs initiales. (Indication : substituer $y(x) = e^{\lambda x}$.)

- 1.1. $y' - 2y = 0, \quad y(0) = 3.$
- 1.2. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 10.$
- 1.3. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 7.$
- 1.4. $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

Résoudre les problèmes aux valeurs initiales pour l'équation d'Euler–Cauchy. (Indication : substituer $y(x) = x^r$.)

$$1.5. \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 8, \quad y'(1) = 26.$$

$$1.6. \quad 10x^2 y'' + 46xy' + 32.4y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$$

Résoudre par séparation de variables :

$$1.7. \quad u_x = yu_y.$$

$$1.8. \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

$$1.9. \quad x^2 u_{xy} + 3y^2 u = 0.$$

$$1.10. \quad u_{xy} = u.$$

$$1.11. \quad xu_x = yu_y.$$

Trouver la série de FOURIER de cosinus pour les fonctions suivantes.

$$1.12. \quad f(x) = k, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

$$1.13. \quad f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Trouver la série de FOURIER de sinus pour les fonctions suivantes.

$$1.14. \quad f(x) = k, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

$$1.15. \quad f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Développer les polynômes suivants selon les polynômes de LEGENDRE $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, etc.

$$1.16. \quad p(x) = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$1.17. \quad p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1, \quad -1 \leq x \leq 2.$$

1.18. Montrer que le laplacien, suivant les coordonnées sphériques

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

est de la forme

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Problèmes en coordonnées cartésiennes

2.1. Problème des ondes en dimension 1

On considère une corde vibrante de longueur L (V. figure 2.1)

- mince,
- bien tendue,
- fixée aux bouts en $x = 0$ et $x = L$.

2.1.1. Hypothèses sur le modèle physique. Soit $u(x, t)$, $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$, la position du point de la corde à distance x de l'origine au temps t . On fait les hypothèses suivantes sur le modèle physique :

- (a) la densité linéaire de la corde, ρ , est constante,
- (b) la corde est d'une élasticité parfaite et n'offre aucune résistance à la flexion,
- (c) on néglige la gravité,
- (d) les particules de la corde se meuvent verticalement parce que le déplacement est faible,
- (e) la pente de la corde est faible, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim 0,$$

également parce que le déplacement est faible.

Par (b), les tensions T_1 en P et T_2 en Q sont tangentes à la corde et, par (d), la composante horizontale de la tension est constante (V. figure 2.2). On a donc :

$$(2.1) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{constante.}$$

Les composantes verticales en P et en Q sont, respectivement,

$$-T_1 \sin \alpha, \quad T_2 \sin \beta.$$

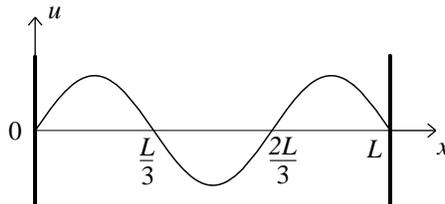


FIG. 2.1. Corde vibrante fixée aux bouts.

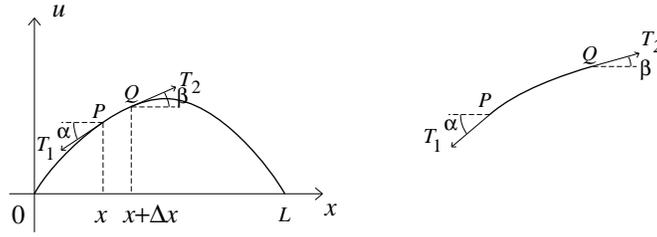


FIG. 2.2. Les composantes de la tension.

Selon la 2^e loi newtonienne : masse \times accélération = résultante,

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha.$$

On a donc, après division par les trois valeurs égales de la constante obtenue en (2.1),

$$(2.2) \quad \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} \\ = \tan \beta - \tan \alpha.$$

En substituant les deux expressions

$$\tan \alpha = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x, \quad \tan \beta = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$$

dans l'équation précédente et en divisant par Δx , on obtient

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right].$$

Finalement, lorsque Δx tend vers zéro, on obtient l'équation des ondes en dimension 1 :

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

2.1.2. Les déplacements simples. Une corde vibrante de longueur L fixée aux bouts admet une suite de déplacements simples $u_n(x, t)$ pour $t = t_0$ fixé (V. figure 2.3) :

$$u_1(x, t_0) = \sin \frac{\pi}{L} x, \\ u_2(x, t_0) = \sin \frac{2\pi}{L} x, \\ u_3(x, t_0) = \sin \frac{3\pi}{L} x, \\ \vdots \\ u_n(x, t_0) = \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

On s'attend donc à retrouver ces déplacements dans la solution du problème de la corde vibrante fixée aux bouts.

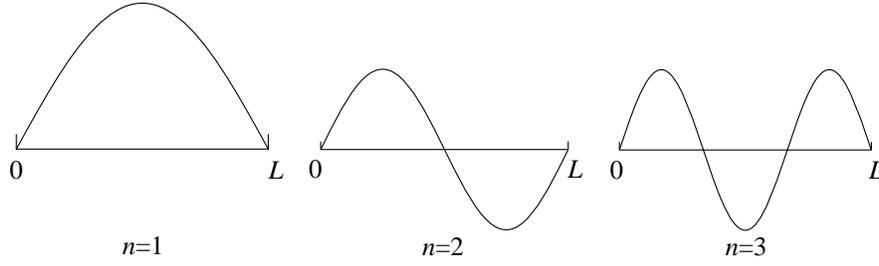


FIG. 2.3. Déplacements simples.

2.1.3. Résolution par séparation des variables. Considérons le problème de la corde vibrante de longueur L fixée aux bouts, modélisé par l'équation aux dérivées partielles (é.d.p.) :

$$(2.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

avec les conditions aux limites (C.L.) :

$$(2.5) \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et les conditions initiales (C.I.) :

$$(2.6) \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

La résolution de ce problème par séparation des variables comporte trois étapes :

Étape 1: la séparation des variables x et t , ce qui donne 2 équations différentielles ;

Étape 2: les solutions simples u_n satisfaisant les C.L. (2.5) ;

Étape 3: la superposition $u = \sum u_n$ satisfaisant les C.I. (2.6).

Étape 1 : Séparation des variables. Posons

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

et substituons les dérivées suivantes :

$$u_{tt} = F\ddot{G}, \quad u_{xx} = F''G, \quad \dot{\quad} := \frac{d}{dt}, \quad ' := \frac{d}{dx}$$

dans l'é.d.p. (2.4) :

$$F\ddot{G} = c^2 F''G.$$

En divisant par $c^2 FG$, on a :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k, \quad \text{une constante.}$$

On obtient ainsi deux équations différentielles, l'une pour $F(x)$ et l'autre pour $G(t)$:

$$(2.7) \quad F''(x) - kF(x) = 0,$$

$$(2.8) \quad \ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0,$$

où k est à déterminer au moyen des conditions aux limites (2.5).

Étape 2 : Valeurs propres et fonctions propres. On résout (2.7) et (2.8) tel que $u = FG$ satisfasse (2.5) :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= F(0)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t, \\ u(L, t) &= F(L)G(t) = 0, \quad \text{pour tout } t. \end{aligned}$$

On exclut le cas $G(t) \equiv 0$, correspondant à la solution nulle sans intérêt ($u \equiv 0$).
Donc

$$(2.9) \quad F(0) = 0, \quad F(L) = 0.$$

Les conditions aux limites (2.9) pour F déterminent les valeurs admissibles de la constante k dans (2.7).

(i) Si $k = 0$, (2.7) admet la solution générale :

$$F(x) = ax + b.$$

Donc

$$F(0) = 0 \implies b = 0$$

et

$$F(L) = 0 \implies aL = 0 \implies a = 0;$$

donc sans intérêt parce que $u \equiv 0$.

(ii) Si $k = \mu^2 > 0$, (2.7) admet la solution générale :

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

De nouveau

$$F(0) = 0 \implies A + B = 0$$

et

$$F(L) = 0 \implies Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0.$$

On a donc le système homogène :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dont le déterminant est non nul :

$$\text{dét} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu L} & e^{-\mu L} \end{bmatrix} = e^{-\mu L} - e^{\mu L} \neq 0$$

puisque $\mu L \neq 0$. Donc l'unique solution est la solution nulle :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ce cas est aussi sans intérêt : $u \equiv 0$.

(iii) Si $k = -p^2 < 0$, (2.7) admet la solution générale :

$$F(x) = A \cos px + B \sin px.$$

Alors

$$F(0) = 0 \implies A \cos 0 = 0 \implies A = 0$$

et

$$F(L) = 0 \implies B \sin pL = 0.$$

Or $B \neq 0$, sinon $u \equiv 0$; donc

$$\sin pL = 0,$$

c'est-à-dire

$$pL = n\pi$$

ou, pour indiquer la dépendance de p sur n , on écrit :

$$(2.10) \quad p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisqu'à l'étape suivante la constante arbitraire B sera multipliée par d'autres constantes arbitraires, B_n et B_n^* , on peut prendre $B = 1$; on a alors la suite de solutions

$$(2.11) \quad F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Maintenant, on résout (2.8) avec

$$k = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$\ddot{G}_n + \lambda_n^2 G_n = 0,$$

où

$$(2.12) \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

La solution générale de cette dernière équation différentielle est

$$G_n(t) = B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t.$$

Donc les fonctions simples non nulles, qu'on appellera *fonctions propres* :

$$(2.13) \quad u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

sont des solutions de l'é.d.p. (2.4) qui satisfont les C.L. (2.5). Dans ce cas, les nombres λ_n seront appelés *valeurs propres* du problème (2.4)–(2.5).

Énonçons la définition générale suivante.

DÉFINITION 2.1. On appelle *valeurs propres* (ou caractéristiques) les nombres λ_n pour lesquelles un problème différentiel homogène aux limites homogènes du type (2.4)–(2.5) admet les solutions non nulles $u_n(x, t)$, appelées *fonctions propres* (ou caractéristiques). L'ensemble de valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots\}$ s'appelle le *spectre*.

Les fonctions propres et les valeurs propres varient de problème en problème, c'est-à-dire elle sont propres à un problème donné.

En physique, u_n s'appelle le n^{e} mode normal; le 1^{er} mode normal, u_1 , s'appelle le mode fondamental, u_2 la 1^{re} harmonique, u_3 la 2^e harmonique, etc. (V. figures 2.4 et 2.5).

Puisque les fonctions propres (2.6) admettent les zéros suivants :

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}L,$$

on voit que le n^{e} mode normal admet $n - 1$ nœuds dans l'intervalle $(0, L)$, c'est-à-dire $n - 1$ points fixes où la corde est stationnaire.

Étape 3 : Superposition des fonctions propres. Pour satisfaire les conditions initiales (2.6), on superpose les solutions simples (2.13) du problème aux limites homogènes d'après le lemme suivant.

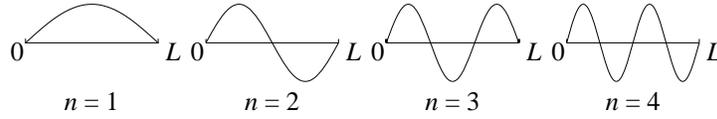


FIG. 2.4. Les quatre premiers modes normaux.

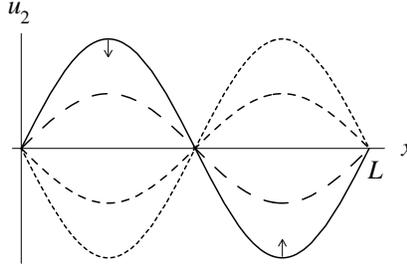


FIG. 2.5. Étude de la première harmonique.

LEMME 2.1 (Superposition de solutions d'un problème homogène). *Soient u et v deux solutions du problème homogène (2.4)–(2.5). Alors $au + bv$ est aussi une solution.*

DÉMONSTRATION.

$$(au + bv)_{tt} = au_{tt} + bv_{tt} = c^2 au_{xx} + c^2 bv_{xx} = c^2 (au + bv)_{xx},$$

$$(au + bv)(0, t) = au(0, t) + bv(0, t) = 0$$

et

$$(au + bv)(L, t) = au(L, t) + bv(L, t) = 0. \quad \square$$

Par récurrence, toute combinaison linéaire (convergente) de solutions est aussi une solution.

Pour satisfaire les conditions initiales (2.6), on cherche une solution qui est une somme (convergente) de fonctions propres :

$$(2.14) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Puisque chacune des fonctions propres (2.13) est solution de (2.4)–(2.5), alors, par le lemme précédent, la somme (2.14) est aussi une solution de (2.4)–(2.5).

On détermine les B_n et les B_n^* . En $t = 0$, $u(x, 0)$ est une superposition de sinus :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

Les B_n sont donc les coefficients de la série de FOURIER de sinus de $f(x)$. On les obtient par la formule (1.32) :

$$(2.15) \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

De même, en $t = 0$, $u_t(x, 0)$ est aussi une superposition de sinus :

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{n\pi}{L} x = g(x).$$

Alors les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de la série de FOURIER de sinus de $g(x)$:

$$\lambda_n B_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx,$$

c'est-à-dire

$$(2.16) \quad B_n^* = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx.$$

Par (2.14), la solution du problème de la corde vibrante (2.4), (2.5) et (2.6) en série de FOURIER de sinus en x est :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x,$$

où les B_n et les $\lambda_n B_n^*$ sont les coefficients de FOURIER des conditions initiales $f(x)$ et $g(x)$ développées en série de sinus.

EXEMPLE 2.1. Résoudre le problème de la corde vibrante :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

fixée aux bouts (C.L.) :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

de déplacement initial triangulaire (C.I.) :

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2kx/L, & 0 < x < \frac{L}{2}, \\ 2k(L-x)/L, & \frac{L}{2} < x < L, \end{cases}$$

et de vitesse initiale (C.I.) :

$$u_t(x, 0) = g(x) = 13 \sin \frac{3\pi}{L} x + 2 \sin \frac{4\pi}{L} x.$$

RÉSOLUTION. Puisque la corde est de longueur L et est fixée aux bouts, les fonctions propres (2.13) sont :

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

et les valeurs propres (2.12) sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}.$$

Par superposition, la solution (2.14) satisfaisant les C.I. est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

En $t = 0$, on a :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

On voit que les B_n sont les coefficients du développement de $f(x)$ en série de FOURIER de sinus. Alors, par la formule (1.32) :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{2}{L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \right]. \end{aligned}$$

On intègre les deux intégrales par parties. La première devient :

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= -\frac{L}{n\pi} x \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour intégrer la seconde intégrale on ne sépare pas le facteur $(L-x)$ puisque celui-ci s'annule à la limite supérieure $x=L$; donc

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= -\frac{L}{n\pi} (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_{L/2}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{L/2}^L \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alors,

$$B_n = \frac{4k}{L^2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} 2 \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8k}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$B_n = \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ 8k/(\pi^2 n^2), & n = 1, 5, 9, 13, \dots, \\ -8k/(\pi^2 n^2), & n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}$$

Donc, le développement de $f(x)$ est

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x - \dots \right).$$

Pour déterminer les B_n^* on dérive $u(x,t)$ par rapport à t :

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n B_n \sin \lambda_n t + \lambda_n B_n^* \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Alors, en $t=0$,

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{n\pi}{L} x \\ &= 13 \sin \frac{3\pi}{L} x + 2 \sin \frac{4\pi}{L} x. \end{aligned}$$

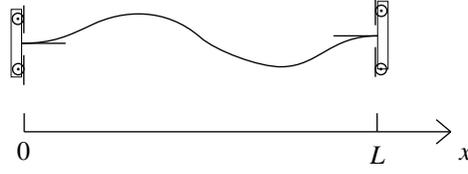


FIG. 2.6. Corde vibrante mobile aux bouts.

Comme le 3^e membre est déjà sous forme de série de FOURIER de sinus, on identifie les coefficients :

$$\begin{aligned}\lambda_1 B_1^* &= 0 \implies B_1^* = 0, \\ \lambda_2 B_2^* &= 0 \implies B_2^* = 0, \\ \lambda_3 B_3^* &= 13 \implies B_3^* = \frac{13}{\lambda_3}, \\ \lambda_4 B_4^* &= 2 \implies B_4^* = \frac{2}{\lambda_4}, \\ \lambda_n B_n^* &= 0 \implies B_n^* = 0, \quad n = 5, 6, \dots\end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{8k}{\pi^2} \cos \lambda_1 t \sin \frac{\pi}{L} x + \left(-\frac{8k}{\pi 3^2} \cos \lambda_3 t + \frac{13}{\lambda_3} \sin \lambda_3 t \right) \sin \frac{3\pi}{L} x \\ &\quad + \frac{2}{\lambda_4} \sin \lambda_4 t \sin \frac{4\pi}{L} x + \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{5^2} \cos \lambda_5 t \sin \frac{5\pi}{L} x - \frac{1}{7^2} \cos \lambda_7 t \sin \frac{7\pi}{L} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9^2} \cos \lambda_9 t \sin \frac{9\pi}{L} x - \frac{1}{11^2} \cos \lambda_{11} t \sin \frac{11\pi}{L} x + \dots \right)\end{aligned}$$

où $\lambda_n = cn\pi/L$. □

2.1.4. Trois problèmes aux valeurs et fonctions propres différentes.

On considère trois exemples de cordes vibrantes donnant lieu à des fonctions propres et à des valeurs propres différentes.

EXEMPLE 2.2. Résoudre le problème d'une corde vibrante mobile aux bouts :

$$\begin{aligned}u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x) \neq \text{const.}, \quad u_t(x, 0) = g(x) \neq \text{const.}, \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. (V. figure 2.6.) On sépare les variables :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= F(x)G(t), \\ F''(x) &= kF(x), \\ \ddot{G}(t) &= c^2 k G(t).\end{aligned}$$

On considère individuellement les 3 cas possibles, $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$.

Le cas $k = 0$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b, \\ F'(0) = a = 0 &\implies F(x) = b \implies F'(L) = 0. \end{aligned}$$

Puisque

$$G(t) = ct + d,$$

on obtient la solution

$$u(x, t) = ct + d \quad (b = 1).$$

Mais

$$u(x, 0) = d = \text{const.} \quad \text{et} \quad u_t(x, 0) = c = \text{const.},$$

ce qui contredit la restriction sur les conditions initiales. Dans ce cas, la corde ne vibre pas mais elle s'éloigne à la vitesse c .

Le cas $k = p^2 > 0$. On a :

$$F(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Les conditions aux limites produisent le système linéaire homogène en A et B :

$$\begin{aligned} F'(0) &= pA - pB = 0, \\ F'(L) &= pe^{pL}A - pe^{-pL}B = 0. \end{aligned}$$

Puisque le déterminant du système est non nul :

$$\begin{vmatrix} p & -p \\ pe^{pL} & -pe^{-pL} \end{vmatrix} = p[e^{pL} - e^{-pL}] \neq 0,$$

alors l'unique solution est

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $u \equiv 0$. Ces deux cas sont sans intérêt.

Le cas $k = -p^2 < 0$. On a

$$\begin{aligned} F(x) &= a \cos px + b \sin px, \\ G(t) &= \alpha \cos cpt + \beta \sin cpt. \end{aligned}$$

On détermine les fonctions propres et les valeurs propres au moyen des conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= (-ap \sin px + bp \cos px)|_{x=0} G(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ &\implies bp = 0 \implies b = 0; \\ u_x(L, t) &= -ap \sin(pL) G(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ &\implies pL = n\pi \implies p_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Donc, les valeurs propres sont

$$\lambda_n = cn\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors,

$$F_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

et

$$G_n(t) = \alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t.$$

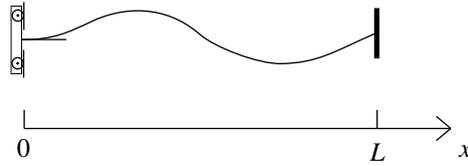


FIG. 2.7. Corde vibrante mobile au bout $x = 0$ et fixée au bout $x = L$.

Les fonctions propres sont

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On satisfait les conditions initiales par superposition des fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

avec

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n\pi}{L} x = f(x), \\ B_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \\ B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \cos \frac{n\pi}{L} x = g(x), \\ B_n^* &= \frac{1}{\lambda_n} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 2.3. Résoudre le problème d'une corde vibrante de longueur L mobile au bout $x = 0$ et fixée au bout $x = L$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$u(x, 0) = 7 \cos \frac{5\pi}{2L} x, \quad u_t(x, 0) = 2 \cos \frac{7\pi}{2L} x, \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. (V. figure 2.7.) On sépare les variables :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t), \\ F''(x) &= kF(x), \\ \ddot{G}(t) &= c^2 kG(t). \end{aligned}$$

De nouveau, on considère individuellement les 3 cas possibles, $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$. Le cas $k = 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= ax + b, \\ F'(0) &= a = 0, \\ F(L) &= b = 0. \end{aligned}$$

Le cas $k = p^2 > 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= Ae^{px} + Be^{-px}, \\ F'(0) &= pA - pB = 0, \\ F(L) &= Ae^{pL} + Be^{-pL} = 0, \\ \begin{vmatrix} p & -p \\ e^{pL} & e^{-pL} \end{vmatrix} &= p [e^{-pL} + e^{pL}] \neq 0; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ces deux cas sont sans intérêt puisque $u \equiv 0$.

Le cas $k = -p^2 < 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cos px + B \sin px, \\ F'(0) &= pB = 0, \\ F(L) &= A \cos pL = 0; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} pL &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

on écrit donc :

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Alors,

$$F_n(x) = A_n \cos \frac{(2n-1)n\pi}{2L} x$$

et

$$G_n(t) = \alpha_n \cos cp_n t + \beta_n^* \sin cp_n t.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont, respectivement :

$$\lambda_n = \frac{c(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On superpose les fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

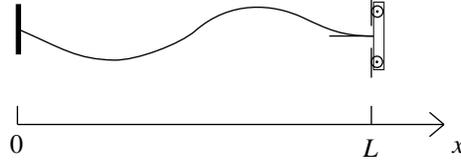


FIG. 2.8. Corde vibrante fixée au bout $x = 0$ et mobile au bout $x = L$.

pour satisfaire les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 7 \cos \frac{5\pi}{2L} x \\ &= 7 \cos \frac{(2 \times 3 - 1)\pi}{2L} x. \end{aligned}$$

Puisque, par le théorème 1.4, les fonctions $\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$ sont orthogonales sur $[0, L]$, on peut identifier les coefficients :

$$\begin{aligned} B_3 &= 7, \\ B_n &= 0, \quad n = 1, 2, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 2 \cos \frac{7\pi}{2L} x \\ &= 2 \cos \frac{(2 \times 4 - 1)\pi}{2L} x, \end{aligned}$$

et par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} \lambda_4 B_4^* &= 2, \\ \lambda_n B_n^* &= 0, \quad n \neq 4. \end{aligned}$$

La solution est donc

$$u(x, t) = 7 \cos \lambda_3 t \cos \frac{5\pi}{2L} x + \frac{2}{\lambda_4} \sin \lambda_4 t \cos \frac{7\pi}{2L} x. \quad \square$$

EXEMPLE 2.4. Résoudre le problème d'une corde vibrante de longueur L fixée au bout $x = 0$ et mobile au bout $x = L$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

et aux conditions initiales :

$$u(x, 0) = 3 \sin \frac{7\pi}{2L} x, \quad u_t(x, 0) = 17 \sin \frac{3\pi}{2L} x, \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. (V. figure 2.8.) On sépare les variables :

$$u(x, t) = F(x)G(t),$$

$$F''(x) = kF(x),$$

$$\ddot{G}(t) = c^2 k G(t).$$

Si $k = 0$:

$$F(x) = ax + b,$$

$$F(0) = b = 0,$$

$$F'(L) = a = 0;$$

si $k = p^2 > 0$:

$$F(x) = Ae^{px} + Be^{-px},$$

$$F(0) = A + B = 0,$$

$$F'(L) = pAe^{pL} - pBe^{-pL} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ pe^{pL} & -pe^{-pL} \end{vmatrix} = -p [e^{-pL} + e^{pL}] \neq 0;$$

alors

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0;$$

donc ces deux cas sont sans intérêt. Enfin, si $k = -p^2 < 0$:

$$F(x) = A \cos px + B \sin px,$$

$$F(0) = A = 0,$$

$$F'(L) = pB \cos pL = 0;$$

$$\begin{aligned} pL &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ &= (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \end{aligned}$$

donc

$$p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}.$$

Alors,

$$F_n(x) = A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x$$

et

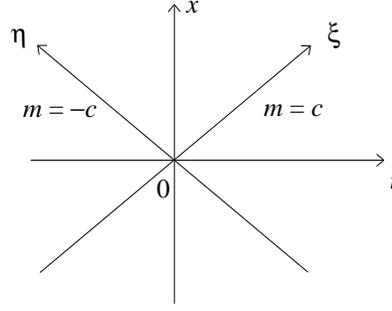
$$G_n(t) = \alpha_n \cos cp_n t + \beta_n \sin cp_n t.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont, respectivement :

$$\lambda_n = \frac{c(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$u_n(x, t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

FIG. 2.9. Les caractéristiques $x \pm ct = 0$ de l'équation des ondes.

On superpose les fonctions propres :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

pour satisfaire les conditions initiales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 3 \sin \frac{7\pi}{2L} x \\ &= 3 \sin \frac{(2 \times 4 - 1)\pi}{2L} x. \end{aligned}$$

Puisque, par le théorème 1.4, les fonctions $\sin \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L} x \right)$ sont orthogonales sur $[0, L]$, on peut identifier les coefficients :

$$\begin{aligned} B_4 &= 3, \\ B_n &= 0, \quad n \neq 4. \end{aligned}$$

De même,

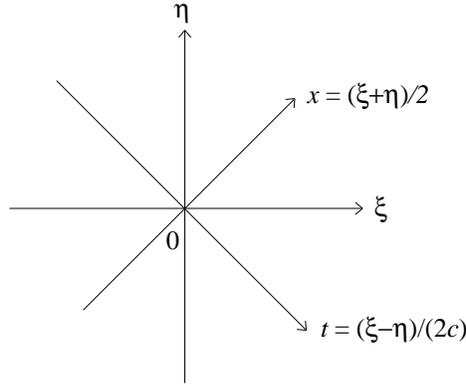
$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \\ &= 17 \sin \frac{3\pi}{2L} x \\ &= 17 \sin \frac{(2 \times 2 - 1)\pi}{2L} x, \end{aligned}$$

et par identification des coefficients :

$$\begin{aligned} \lambda_2 B_2^* &= 17, \\ \lambda_n B_n^* &= 0, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

La solution est donc

$$u(x, t) = 3 \cos \lambda_4 t \sin \frac{7\pi}{2L} x + \frac{17}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t \sin \frac{3\pi}{2L} x. \quad \square$$

FIG. 2.10. Le nouveau repère (ξ, η) pour l'équation des ondes.

2.1.5. La solution de d'Alembert de l'équation des ondes en 1 dimension. Soit le problème des ondes

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

aux conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

On transforme les variables indépendantes x et t de l'équation aux dérivées partielles par la substitution :

$$\xi = x + ct,$$

$$\eta = x - ct.$$

Les droites

$$x \pm ct = k$$

sont appelées caractéristiques de l'équation des ondes (V. figure 2.9). On prend alors pour nouveau repère (V. figure 2.10) les caractéristiques

$$x \pm ct = 0.$$

Par dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta,$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_\xi)_\xi \xi_x + (u_\xi)_\eta \eta_x + (u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\eta)_\eta \eta_x \\ &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

et

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = cu_\xi - cu_\eta,$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c(u_\xi)_\xi \xi_t + c(u_\xi)_\eta \eta_t - c(u_\eta)_\xi \xi_t - c(u_\eta)_\eta \eta_t \\ &= c^2 u_{\xi\xi} - c^2 u_{\xi\eta} - c^2 u_{\eta\xi} + c^2 u_{\eta\eta} \\ &= c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{tt} = c^2 u_{xx} &\implies c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta} = c^2 u_{\xi\xi} + 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}, \\ &4c^2 u_{\xi\eta} = 0, \end{aligned}$$

$$u_{\xi\eta} = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{\partial}{\partial\xi} u(\xi, \eta) = 0.$$

On intègre par rapport à η :

$$\frac{\partial}{\partial\xi} u(\xi, \eta) = \int \frac{\partial}{\partial\eta} \frac{\partial}{\partial\xi} u(\xi, \eta) d\eta = 0 + h(\xi) = h(\xi),$$

où la constante d'intégration, $h(\xi)$, est fonction de ξ . On intègre maintenant par rapport à ξ :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int \frac{\partial}{\partial\xi} u(\xi, \eta) d\xi = \int h(\xi) d\xi + \psi(\eta) \\ &= \varphi(\xi) + \psi(\eta), \end{aligned}$$

où $\varphi(\xi)$ et $\psi(\eta)$ sont deux fonctions arbitraires qu'on détermine au moyen des conditions initiales. On revient aux variables x et t :

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

La fonction $\varphi(x + ct)$ décrit une onde régressive et la fonction $\psi(x - ct)$ décrit une onde progressive (V. figure 2.11). Par la condition initiale sur u on a :

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

et par la condition initiale sur u_t :

$$u_t(x, t) = c\varphi'(x + ct) - c\psi'(x - ct),$$

on a :

$$u_t(x, 0) = c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x).$$

On obtient donc le système différentiel du premier ordre à coefficients constants :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \psi'(x) &= f'(x), \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) &= g(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi'(x) \\ \psi'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(x) \\ g(x) \end{bmatrix}.$$

On résout le système algébrique par la règle de CRAMER :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} f'(x) & 1 \\ g(x) & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & -c \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-cf'(x) - g(x)}{-2c} = \frac{1}{2} \left[f'(x) + \frac{1}{c}g(x) \right], \\ \psi'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & f'(x) \\ c & g(x) \end{vmatrix}}{-2c} \\ &= \frac{g(x) - cf'(x)}{-2c} = \frac{1}{2} \left[f'(x) - \frac{1}{c}g(x) \right]. \end{aligned}$$

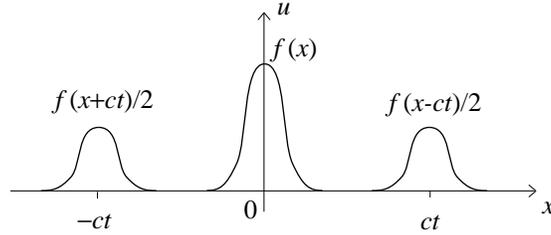


FIG. 2.11. Le déplacement $f(x)$ au temps $t = 0$ se répartit en une onde progressive $f(x - ct)/2$ et une onde régressive $f(x + ct)/2$.

On intègre par rapport à x :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k_1, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s) ds + k_2.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(s) ds + k_1 \\ &\quad + \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(s) ds + k_2 \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds + (k_1 + k_2).\end{aligned}$$

Puisque

$$u(x, 0) = f(x) + k_1 + k_2 = f(x) \implies k_1 + k_2 = 0,$$

alors

$$(2.17) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

C'est la solution de d'ALEMBERT. Au second membre, les deux premiers termes décrivent une onde régressive et une onde progressive, qui ne dépendent que de la position initiale de la corde vibrante, respectivement au point $(x + ct, 0)$ et $(x - ct, 0)$ et qui se propage le long des caractéristiques. Le troisième terme ne dépend que de la vitesse initiale sur $[x - ct, x + ct]$ qui est le domaine de dépendance de la solution u au point (x, t) .

2.2. Problème de la chaleur en dimension 1

Considérons une tige mince de longueur L , de conductivité thermique k , de chaleur spécifique σ et de densité linéaire ρ , isolée sur sa longueur (V. figure 2.12).

FIG. 2.12. Tige mince de longueur L isolée sur sa longueur.

D'après la loi newtonienne de l'écoulement de la chaleur, la température de la tige $u(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$(2.18) \quad u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad c^2 = \frac{k}{\sigma\rho}.$$

Trouver $u(x, t)$ si la température aux bouts est zéro (C.L.) :

$$(2.19) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et la température initiale (C.I.) est

$$(2.20) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. (Trois étapes)

ÉTAPE 1. LA SÉPARATION DES VARIABLES. Posons

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

dans (2.18) ; alors les equations

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -p^2 < 0$$

nous donnent deux équations différentielles découplées :

$$(2.21) \quad F''(x) + p^2 F(x) = 0,$$

$$(2.22) \quad \dot{G}(t) + c^2 p^2 G(t) = 0.$$

Puisque la température de la tige est nulle aux deux bouts, on sait déjà que $-p^2 = 0$ ou > 0 implique que $u \equiv 0$.

ÉTAPE 2. LES FONCTIONS PROPRES. Les fonctions propres $u_n(x, t)$ sont les solutions non nulles de l'é.d.p. (2.18) et des C.L. (2.19). De (2.21) on obtient

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

et de (2.19)

$$F(0) = A = 0$$

et

$$F(L) = B \sin pL = 0 \implies pL = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

D'où les valeurs de p :

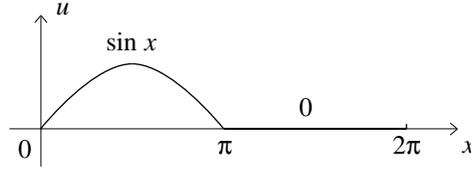
$$p_n = \frac{n\pi}{L}.$$

Puisque B sera multiplié par la suite par une constante arbitraire, on peut prendre $B = 1$. Donc

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, \dots$$

De même, de (2.22) on a

$$\dot{G}_n(t) + \lambda_n^2 G_n(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L},$$

FIG. 2.13. Condition initiale $u(x, 0)$ pour l'exemple 2.5.

d'où

$$G_n(t) = B_n e^{-\lambda_n^2 t}.$$

On a donc les fonctions propres et les valeurs propres :

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ÉTAPE 3. On satisfait la condition initiale par superposition des fonctions propres

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}$$

pour que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Puisque $u(x, 0)$ est représenté par le développement de FOURIER de sinus de la fonction $f(x)$, alors les coefficients sont donnés par la formule (1.32) :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad \square$$

EXEMPLE 2.5. Trouver la température $u(x, t)$ d'une tige de longueur $L = 2\pi$, isolée latéralement, aux conditions aux limites nulles :

$$u(0, t) = u(2\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et à la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Prendre $c^2 = 25$.

RÉSOLUTION. (V. figure 2.13.) Puisque la température est nulle aux bouts, on sait que les valeurs propres sont :

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{5n\pi}{2\pi} = \frac{5n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et que la solution est la superposition des fonctions propres correspondantes :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}.$$

De la condition initiale, on obtient

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x).$$

Puisque $u(x, 0)$ est représenté par le développement de FOURIER de sinus de la fonction $f(x)$, alors les coefficients sont donnés par la formule (1.32) :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{2\pi} x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin \frac{n}{2} x dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [-\cos(x+y) + \cos(x-y)],$$

on a, si $n \neq 2$,

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[-\cos\left(\frac{n}{2} + 1\right)x + \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right)x \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{2}{n+2} \sin \frac{n+2}{2} x \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n-2} \sin \frac{n-2}{2} x \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{1}{n+2} \sin\left(\frac{n}{2} + 1\right)\pi + \frac{1}{n-2} \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right)\pi \right]. \end{aligned}$$

Donc pour n pair, $n \neq 2$:

$$B_n = 0.$$

Pour $n = 4k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, (c'est-à-dire pour $n = 1, 5, 9, \dots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+2}(-1) + \frac{1}{n-2}(-1) \right] \\ &= -\frac{4}{\pi(n^2 - 4)}, \end{aligned}$$

et pour $n = 4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \dots$, (c'est-à-dire pour $n = 3, 7, 11, \dots$),

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n+2}(+1) + \frac{1}{n-2}(+1) \right] \\ &= \frac{4}{\pi(n^2 - 4)}. \end{aligned}$$

Enfin, pour $n = 2$,

$$B_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (-\cos 2x + 1) dx = \frac{1}{2}.$$

La solution est donc

$$u(x, t) = -\frac{4}{\pi(-3)} \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{-25t/4} + \frac{1}{2} \sin x e^{-25t} + \frac{4}{5\pi} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) e^{-225t/4} - \dots \quad \square$$

EXEMPLE 2.6. Résoudre le problème de la chaleur d'une tige avec conditions aux limites non homogènes modélisé par l'équation aux dérivées partielles :

$$(2.23) \quad u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$(2.24) \quad u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B, \quad t > 0,$$

et la condition initiale :

$$(2.25) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. On transforme le problème en deux problèmes connus. Exprimons $u(x, t)$ comme la somme de deux fonctions $v(x, t)$ et $\psi(x)$,

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x),$$

telles que v et ψ sont solutions de (2.23) et v satisfait les conditions aux limites homogènes

$$v(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad v(L, t) = 0.$$

Alors (2.23) devient

$$v_t = c^2 v_{xx} + c^2 \psi'',$$

et de (2.24) on a :

$$0 = v(0, t) = u(0, t) - \psi(0) = A - \psi(0) \implies \psi(0) = A$$

et

$$0 = v(L, t) = u(L, t) - \psi(L) = B - \psi(L) \implies \psi(L) = B.$$

Pour que v soit solution de (2.23) il faut que

$$\psi'' = 0;$$

donc

$$\psi(x) = \alpha x + \beta.$$

On détermine α et β au moyen des conditions aux limites sur ψ :

$$\psi(0) = \beta = A \implies \beta = A,$$

$$\psi(L) = \alpha L + A = B \implies \alpha = \frac{B - A}{L},$$

ce qui donne

$$\psi(x) = \frac{B - A}{L} x + A.$$

Enfin, de la condition initiale (2.25), on obtient

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= u(x, 0) - \psi(x) = f(x) - \frac{B - A}{L} x - A \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x. \end{aligned}$$

Puisque v est solution de (2.23) aux conditions aux limites $v = 0$ en $x = 0$ et en $x = L$, alors

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \\ A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - \frac{B - A}{L} x - A \right] \sin \frac{n\pi}{L} x dx. \end{aligned}$$

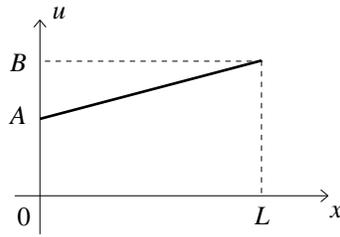
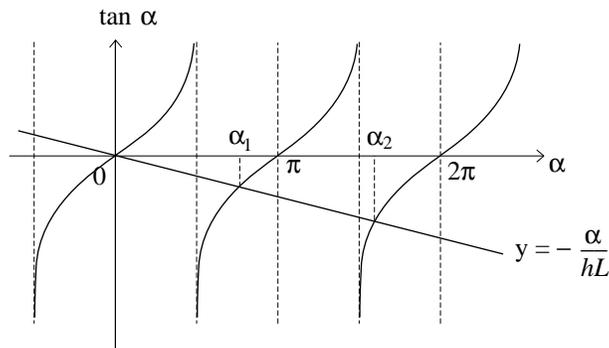


FIG. 2.14. État stationnaire pour l'exemple 2.6.

FIG. 2.15. Les racines de l'équation transcendante $\tan \alpha = -\alpha/(hL)$.

La solution est donc :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{B-A}{L} x + A.$$

La série au second membre représente l'état transitoire et les deux derniers termes représentent l'état stationnaire (V. figure 2.14). \square

EXEMPLE 2.7. Résoudre le problème de la chaleur d'une tige de longueur L dans un milieu ambiant à 0°C , modélisé par le problème

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

aux valeurs aux limites

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = -hu(L, t), \quad t \geq 0,$$

et aux valeurs initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

RÉSOLUTION. La solution générale de l'équation de la chaleur

$$u(x, t) = e^{-c^2 \mu^2 t} (A \cos \mu x + B \sin \mu x),$$

obtenue par séparation des variables, doit satisfaire les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$:

$$u(0, t) = A = 0$$

et

$$u_x(L, t) = e^{-c^2 \mu^2 t} (\mu B \cos \mu L) = -h e^{-c^2 \mu^2 t} B \sin \mu L,$$

d'où

$$\tan(\mu L) = -\frac{\mu}{h}.$$

Posons

$$\alpha = \mu L, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu = \frac{\alpha}{L}.$$

Alors α est solution de l'équation transcendante

$$\tan \alpha = -\frac{\alpha}{hL}.$$

On approxime les racines de cette équation dans la figure 2.15. On a donc

$$\mu_n = \frac{\alpha_n}{L}, \quad \lambda_n = c\mu_n = \frac{c\alpha_n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Les fonctions propres sont

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Puisque les conditions aux limites sont homogènes de degré 0 en $x = 0$ et de degré 1 en $x = L$, on obtient la solution par superposition :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\alpha_n}{L}x\right) e^{-\lambda_n^2 t}.$$

Celle-ci doit satisfaire la condition initiale

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{\alpha_n}{L}x = f(x).$$

On détermine les B_n au moyen du développement de FOURIER de $f(x)$ valide parce que les fonctions

$$\sin\frac{\alpha_n x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

sont orthogonales sur $[0, L]$, c'est-à-dire

$$(2.26) \quad \int_0^L \sin\frac{\alpha_n}{L}x \sin\frac{\alpha_m}{L}x dx = 0, \quad m \neq n.$$

On obtient donc

$$B_m \int_0^L \sin^2\frac{\alpha_m}{L}x dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \sin\frac{\alpha_n}{L}x \sin\frac{\alpha_m}{L}x dx = \int_0^L f(x) \sin\frac{\alpha_m}{L}x dx.$$

Pour démontrer (2.26) on pose

$$y_n = \sin\frac{\alpha_n}{L}x;$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_0^L y_m y_n'' dx + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 \int_0^L y_n y_m dx &= \int_0^L y_m \left(y_n'' + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 y_n\right) dx = 0, \\ \int_0^L y_n y_m'' dx + \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2 \int_0^L y_m y_n dx &= \int_0^L y_n \left(y_m'' + \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2 y_m\right) dx = 0, \end{aligned}$$

et, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} y_m y_n' \Big|_0^L - \int_0^L y_m' y_n' dx + \left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 \int_0^L y_n y_m dx &= 0, \\ y_n y_m' \Big|_0^L - \int_0^L y_n' y_m' dx + \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2 \int_0^L y_m y_n dx &= 0. \end{aligned}$$

La différence entre les deux termes intégrés est

$$y_m(L)y_n'(L) - y_n(L)y_m'(L) = \frac{\alpha_n}{L} \sin \alpha_m \cos \alpha_n - \frac{\alpha_m}{L} \sin \alpha_n \cos \alpha_m,$$

c'est-à-dire, après division par $\cos \alpha_m \cos \alpha_n$,

$$\frac{1}{L}(\alpha_n \tan \alpha_m - \alpha_m \tan \alpha_n) = \frac{\alpha_n}{L} \left(-\frac{\alpha_m}{hL}\right) - \frac{\alpha_m}{L} \left(-\frac{\alpha_n}{hL}\right) = 0,$$

d'où

$$\left[\left(\frac{\alpha_n}{L}\right)^2 - \left(\frac{\alpha_m}{L}\right)^2\right] \int_0^L \sin \frac{\alpha_n}{L} x \sin \frac{\alpha_m}{L} x dx = 0.$$

Si $m \neq n$, alors $\alpha_n \neq \alpha_m$ et la dernière intégrale est nulle, ce qui démontre l'orthogonalité en question.

Donc, avec $m = n$,

$$B_n = \int_0^L f(x) \sin \frac{\alpha_n}{L} x dx \Big/ \int_0^L \sin^2 \frac{\alpha_n}{L} x dx,$$

où

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2 \frac{\alpha_n}{L} x dx &= \frac{1}{2}L - \frac{L}{4\alpha_n} \sin 2\alpha_n \\ &= \frac{1}{2}L - \frac{L}{2\alpha_n} \frac{\sin \alpha_n}{\cos \alpha_n} \cos^2 \alpha_n \\ &= \frac{1}{2}L - \frac{L}{2\alpha_n} \left(-\frac{\alpha_n}{hL}\right) \cos^2 \alpha_n \\ &= \frac{Lh + \cos^2 \alpha_n}{2h}. \quad \square \end{aligned}$$

2.3. Le problème des ondes en 2 dimensions

On considère une membrane rectangulaire vibrante

- mince,
- bien tendue,
- fixée au bord,
- aux vibrations de faible amplitude.

2.3.1. Le modèle mathématique. Le modèle est donné par l'équation des ondes sur le rectangle $R = [0, a] \times [0, b]$,

$$(2.27) \quad u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in R, t > 0,$$

avec une condition au bord

$$(2.28) \quad u(x, y, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0 \text{ et tout } (x, y) \in \partial R \text{ (le bord de } R),$$

et deux conditions initiales

$$(2.29) \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in R.$$

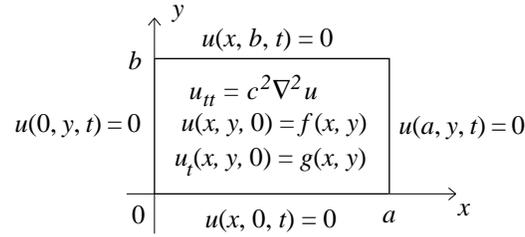


FIG. 2.16. Les données sur la membrane vibrante rectangulaire.

(V. figure 2.16)

2.3.2. Résolution par séparation des variables.

ÉTAPE 1. Pour séparer les variables on pose

$$u(x, y, t) = H(x)Q(y)G(t)$$

dans (2.27) :

$$HQ\ddot{G} = c^2(H''QG + HQ''G).$$

En divisant par c^2HQG , on a :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2G(t)} = \frac{H''(x)}{H(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(y)} = -\nu^2.$$

On sépare l'équation en $G(t)$:

$$(2.30) \quad \ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad \lambda = c\nu,$$

et les équations en $H(x)$ et $Q(y)$:

$$\frac{H''(x)}{H(x)} = -\left[\frac{Q''(y)}{Q(y)} + \nu^2\right] = -k^2,$$

d'où

$$(2.31) \quad H''(x) + k^2 H(x) = 0,$$

$$(2.32) \quad Q''(y) + p^2 Q(y) = 0, \quad p^2 = \nu^2 - k^2.$$

ÉTAPE 2. On trouve les solutions de (2.31) et (2.32) qui satisfont les conditions au bord (2.28) :

$$H(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

$$Q(y) = C \cos py + D \sin py,$$

avec

$$H(0) = 0, \quad H(a) = 0,$$

$$Q(0) = 0, \quad Q(b) = 0;$$

donc

$$H(0) = A = 0,$$

$$H(a) = B \sin ka = 0 \implies k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

De même

$$C = 0 \quad \text{et} \quad p_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Donc

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a}x, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$Q_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b}y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puisque

$$\lambda = c\nu \quad \text{et} \quad p^2 = \nu^2 - k^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \nu^2 = k^2 + p^2,$$

alors

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2},$$

et

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

D'autre part, la solution générale de (2.30) est

$$G_{mn}(t) = B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t.$$

On a les **fonctions propres** (solutions de (2.27) et (2.28)) :

$$u_{mn}(x, y, t) = (B_{mn} \cos \lambda_{mn}t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y,$$

et les **valeurs propres** :

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

ÉTAPE 3. On trouve par superposition la solution

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t)$$

qui satisfait les conditions initiales (2.29). De la première de ces conditions, on obtient

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y = f(x, y).$$

Pour déterminer les B_{mn} on développe $f(x, y)$ en série de FOURIER de sinus sur $0 < x < a$ et $0 < y < b$. Alors,

$$(2.33) \quad \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m_0\pi}{a}x \sin \frac{n_0\pi}{b}y \, dx \, dy =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \int_0^a \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{m_0\pi}{a}x \, dx \int_0^b \sin \frac{n\pi}{b}y \sin \frac{n_0\pi}{b}y \, dy.$$

Donc

$$B_{mn} = \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y \, dx \, dy, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$$

Enfin, on détermine les B_{mn}^* de la même façon :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}^* \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi}{a}x \sin \frac{n\pi}{b}y = g(x, y);$$

alors

$$B_{mn}^* = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

EXEMPLE 2.8. Soit une membrane vibrante rectangulaire R bien tendue de côtés $a = b = 1$ fixée au bord ∂R :

$$u(x, y, t) = 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \partial R \text{ et tout } t \geq 0,$$

et de conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= k \sin(\pi x) \sin(2\pi y) = f(x, y), \\ u_t(x, y, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{pour tout } (x, y) \in R.$$

Trouver $u(x, y, t)$ si $c = 1$.

RÉSOLUTION. En se référant à la résolution par séparation des variables ci-haut, on a

$$\lambda_{mn} = 1 \times \pi \sqrt{\frac{m^2}{1^2} + \frac{n^2}{1^2}} = \pi \sqrt{m^2 + n^2}$$

et

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (B_{mn} \cos \lambda_{mn} t + B_{mn}^* \sin \lambda_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{1} x \sin \frac{n\pi}{1} y,$$

$$u(x, y, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y)$$

$$= k \sin(\pi x) \sin(2\pi y).$$

Alors

$$B_{1,2} = k,$$

$$B_{mn} = 0, \quad (m, n) \neq (1, 2),$$

et

$$B_{mn}^* = 0,$$

puisque $u_t(x, y, 0) = g(x, y) = 0$. La solution est donc

$$u(x, y, t) = k \cos(\pi\sqrt{5}t) \sin(\pi x) \sin(2\pi y). \quad \square$$

2.3.3. Les lignes nodales de la membrane vibrante.

DÉFINITION 2.2. On appelle *lignes nodales* d'une membrane vibrante les courbes stationnaires, c'est-à-dire fixes pour tout t .

EXEMPLE 2.9. Considérons une membrane rectangulaire vibrante de côtés $a = b = 1$, fixée au bord et de vitesse initiale nulle,

$$u_t = 0 \implies B_{mn}^* = 0.$$

Alors les fonctions propres,

$$u_{mn}(x, y, t) = B_{mn} \cos\left(c\pi\sqrt{m^2 + n^2}t\right) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

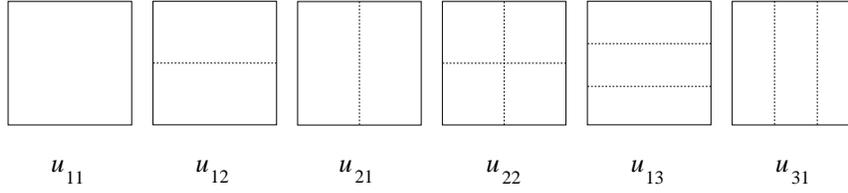


FIG. 2.17. Les lignes nodales de la membrane rectangulaire.

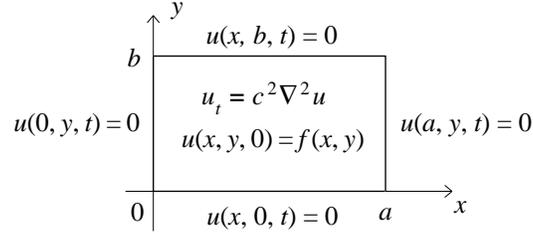


FIG. 2.18. Les données calorifiques sur la plaque rectangulaire.

admettent les lignes nodales (V. figure 2.17) :

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \sin \pi x \sin \pi y \neq 0 \implies \text{aucune ligne nodale,} \\
 u_{12} &= \sin \pi x \sin 2\pi y = 0 \implies y = \frac{1}{2}, \\
 u_{21} &= \sin 2\pi x \sin \pi y = 0 \implies x = \frac{1}{2}, \\
 u_{22} &= \sin 2\pi x \sin 2\pi y = 0 \implies x = \frac{1}{2} \text{ et } y = \frac{1}{2}, \\
 u_{13} &= \sin \pi x \sin 3\pi y = 0 \implies y = \frac{1}{3} \text{ et } y = \frac{2}{3}, \\
 u_{31} &= \sin 3\pi x \sin \pi y = 0 \implies x = \frac{1}{3} \text{ and } x = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

2.4. Le problème de la chaleur en 2 dimensions

On considère le problème de la chaleur d'une plaque rectangulaire R de dimensions $a \times b$, aux faces isolées, (V. figure 2.18) :

$$(2.34) \quad u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad \text{pour tout } (x, y) \in R \text{ et tout } t > 0,$$

de température nulle au bord ∂R ,

$$(2.35) \quad u(x, y, t) = 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \partial R \text{ et tout } t \geq 0,$$

et de température initiale

$$(2.36) \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad \text{pour tout } (x, y) \in R.$$

RÉSOLUTION. On a les trois étapes ordinaires.

ÉTAPE 1. On sépare les variables :

$$u(x, y, t) = H(x)Q(y)G(t)$$

et l'on pose cette expression dans (2.34) :

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{H''(x)}{H(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(y)} = -\nu^2;$$

on sépare l'équation en $G(t)$:

$$\dot{G}(t) = -\lambda^2 G(t), \quad \lambda = c\nu,$$

et les équations pour $H(x)$ et $Q(y)$:

$$\frac{H''(x)}{H(x)} = -\left[\frac{Q''(y)}{Q(y)} + \nu^2\right] = -k^2;$$

donc

$$\begin{aligned} H''(x) + k^2 H(x) &= 0, \\ Q''(y) + p^2 Q(y) &= 0, \quad p^2 = \nu^2 - k^2. \end{aligned}$$

ÉTAPE 2. On trouve les solutions $H(x)$ et $Q(y)$ qui satisfont (2.35). Alors,

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad p_n = \frac{n\pi}{b},$$

$$H_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$Q_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Puis résolvant l'équation pour $G(t)$, on a

$$G_{mn}(t) = B_{mn} e^{-\lambda_{mn}^2 t}, \quad \lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

On a les **fonctions propres** (solutions de (2.34) et (2.35)) :

$$u_{mn}(x, y, t) = B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\lambda_{mn}^2 t}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

et les **valeurs propres** :

$$\lambda_{mn} = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

ÉTAPE 3. On satisfait (2.36) par superposition des fonctions propres :

$$(2.37) \quad u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-\lambda_{mn}^2 t},$$

c'est-à-dire on détermine les B_{mn} par (2.36) :

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = f(x, y).$$

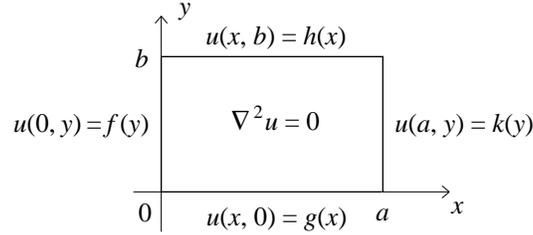


FIG. 2.19. Conditions au bord du problème de potentiel.

Alors, comme pour la membrane vibrante rectangulaire, on développe $f(x, y)$ selon les $\sin(m\pi x/a)$ et $\sin(n\pi y/b)$ sur $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. Donc

$$(2.38) \quad \frac{2}{a} \times \frac{2}{b} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n_0\pi}{b}y\right) dx dy =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right) dx \frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n_0\pi}{b}y\right) dy.$$

Puisque

$$\frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m_0\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq m_0, \\ 1, & m = m_0, \end{cases}$$

$$\frac{2}{b} \int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n_0\pi}{b}y\right) dy = \begin{cases} 0, & n \neq n_0, \\ 1, & n = n_0, \end{cases}$$

le 2^e membre de (2.38) se réduit à $B_{m_0n_0}$. D'où

$$B_{m_0n_0} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\frac{m_0\pi}{a}x \sin\frac{n_0\pi}{b}y dx dy.$$

Donc, en général, B_{mn} est le coefficient de $\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$ du développement de FOURIER de $f(x, y)$ en $\sin(m\pi x/a)$ sur $0 \leq x \leq a$ et en $\sin(n\pi y/b)$ sur $0 \leq y \leq b$. \square

REMARQUE 2.1. On voit, par (2.37), que la chaleur décroît exponentiellement avec le temps. C'est le cas des problèmes de diffusion sans source de chaleur et de température nulle au bord.

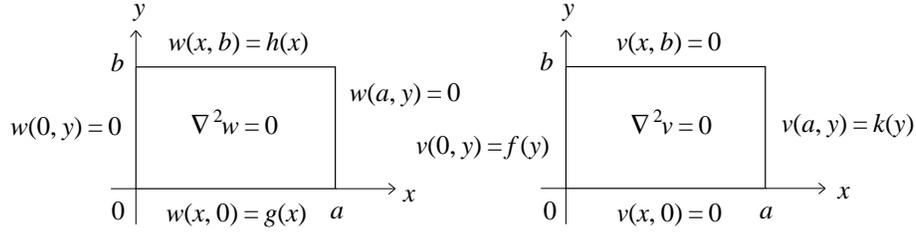
Pour le problème des ondes, dans les modèles idéaux considérés aux sections 2.1, respectivement 2.3, où il n'y a pas de perte d'énergie, les positions $u(x, t)$, respectivement $u(x, y, t)$, oscillent avec le temps t .

2.5. Le problème du potentiel pour un rectangle

Le potentiel (ou la chaleur stationnaire), $u(x, y)$, dans un rectangle, de côtés a et b , satisfait l'équation de LAPLACE :

$$(2.39) \quad \nabla^2 u = 0.$$

Trouver u si le potentiel (ou la chaleur) satisfait les conditions au bord indiquées dans la figure 2.19.

FIG. 2.20. Les deux problèmes particuliers pour w et v .

RÉSOLUTION. La solution sera la somme des solutions des deux problèmes particuliers,

$$u(x, y) = w(x, y) + v(x, y),$$

indiqués dans la figure 2.20. On résout le 1^{er} problème par les trois étapes ordinaires. On sépare les variables :

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \varphi(x)\psi(y), \\ \varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) &= 0, \\ \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} &= -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = -\lambda^2. \end{aligned}$$

On obtient deux équations différentielles séparées :

$$(2.40) \quad \varphi''(x) + \lambda^2\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(a) = 0,$$

et

$$(2.41) \quad \psi''(y) - \lambda^2\psi(y) = 0.$$

Les valeurs propres du problème aux limites (2.40) sont

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$\varphi_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a}x.$$

Alors

$$w_m(x, y) = \psi_m(y) \sin \frac{m\pi}{a}x$$

et

$$w_m(0, y) = w_m(a, y) = 0.$$

La solution, par superposition,

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(y) \sin \frac{m\pi}{a}x,$$

doit satisfaire les conditions aux limites

$$w(x, 0) = g(x), \quad w(x, b) = h(x).$$

Donc la condition aux limites en $y = 0$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(0) \sin \frac{m\pi}{a}x = g(x),$$

implique que

$$\psi_m(0) = g_m = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx,$$

et la condition aux limites en $y = b$,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(b) \sin \frac{m\pi}{a} x = h(x),$$

implique que

$$\psi_m(b) = h_m = \frac{2}{a} \int_0^a h(x) \sin \frac{m\pi}{a} x dx.$$

D'où $\psi_m(y)$ est solution du problème aux limites :

$$\begin{aligned} \psi_m'' - \lambda_m^2 \psi_m &= 0, \\ \psi_m(0) &= g_m, \quad \psi_m(b) = h_m. \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$\psi_m(y) = A_m \cosh \lambda_m y + B_m \sinh \lambda_m y.$$

On détermine les constantes A_m et B_m au moyen des conditions aux limites :

$$\psi_m(0) = A_m = g_m$$

et

$$\psi_m(b) = g_m \cosh \lambda_m b + B_m \sinh \lambda_m b = h_m.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \psi_m(y) &= g_m \cosh \lambda_m y + \frac{h_m - g_m \cosh \lambda_m b}{\sinh \lambda_m b} \sinh \lambda_m y \\ &= g_m \cosh \lambda_m y - \frac{g_m \cosh \lambda_m b}{\sinh \lambda_m b} \sinh \lambda_m y + \frac{h_m}{\sinh \lambda_m b} \sinh \lambda_m y \\ &= g_m \frac{\sinh \lambda_m b \cosh \lambda_m y - \cosh \lambda_m b \sinh \lambda_m y}{\sinh \lambda_m b} + \frac{h_m}{\sinh \lambda_m b} \sinh \lambda_m y. \end{aligned}$$

Alors

$$\psi_m(y) = g_m \frac{\sinh \frac{m\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{m\pi b}{a}} + h_m \frac{\sinh \frac{m\pi y}{a}}{\sinh \frac{m\pi b}{a}}.$$

On obtient ainsi

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{\sinh \frac{m\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{m\pi b}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \frac{\sinh \frac{m\pi y}{a}}{\sinh \frac{m\pi b}{a}} \sin \frac{m\pi x}{a}.$$

De même pour le 2^e problème, on a

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\sinh \frac{n\pi(a-x)}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} k_n \frac{\sinh \frac{n\pi x}{b}}{\sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

où

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

et

$$k_n = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad \square$$

Exercices pour la section 2.1

2.1. Résoudre le problème de la corde vibrante de longueur 6, fixée aux bouts, de position initiale :

$$u(x, 0) = \frac{1}{55}x(6 - x)$$

et de vitesse initiale :

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{99} \sin \frac{7\pi}{6}x.$$

Prendre $c = 13$.

2.2. Résoudre le problème de la corde vibrante de longueur 6, fixée aux bouts, de position initiale :

$$u(x, 0) = \frac{1}{55}x(6 - x)$$

et de vitesse initiale :

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{99} \sin^2 \frac{7\pi}{6}x.$$

Prendre $c = 13$.

2.3. Soit $f(t)$ définie sur $0 < t < L$. On prolonge f sur $L < t < 2L$ par symétrie par rapport à la droite $t = L$. Montrer que le développement de la fonction prolongée en série de sinus est de la forme

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2L}$$

où

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{(2n-1)\pi t}{2L} dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

2.4. Soit $f(t)$ définie sur $0 < t < L$. Prolonger f sur $L < t < 2L$ de telle façon que le développement de la fonction prolongée en série de cosinus soit de la forme

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2L}$$

et exprimer les a_n , $n = 1, 2, \dots$, par une formule.

2.5. Résoudre le problème de la corde vibrante :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= -\frac{4ax^2}{L^2} + \frac{4ax}{L}, & 0 < x < L, \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.6. Trouver la déflexion $u(x, t)$ d'une corde vibrante si

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < L, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u_x(L, t) &= 0, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= ax, & u_t(x, 0) &= 0, & \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.7. Résoudre :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 < x < 1, & \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & \quad t > 0, \end{aligned}$$

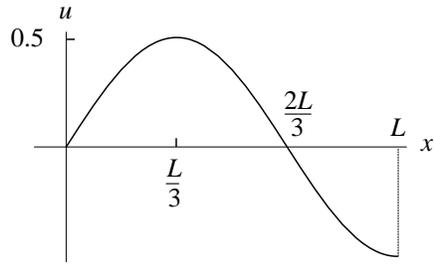


FIG. 2.21. Condition initiale $u(x,0)$ pour l'exercice 2.11 de la section 2.2.

$$u(x,0) = 2 \sin \pi x + 3 \sin 3\pi x, \quad 0 < x < 1,$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

2.8. Résoudre :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} hx/a, & 0 < x < a, \\ h(L-x)/(L-a), & a < x < L, \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

2.9. Résoudre :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + hu(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = ax, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

2.10. Résoudre :

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = k = \text{const}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

Exercices pour la section 2.2

2.11. Soit une tige mince de longueur L isolée latéralement et au bout $x = L$. Trouver la chaleur $u(x,t)$ de la tige si u satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = 0.5 \sin \frac{3\pi}{2L} x.$$

(V. figure 2.21). De plus, si $L = 13$ et $c = 11$, calculer u en $x = 7$ et $t = 0.1$. (Remarque : Les angles sont en radians.)

2.12. Résoudre le problème de la chaleur :

$$u_t = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < x < L.$$

2.13. Résoudre le problème de la chaleur d'une tige de longueur 6 de chaleur nulle aux bouts et de condition initiale

$$u(x, 0) = \frac{1}{55}x(6 - x).$$

Prendre $c = 13$.

2.14. Trouver $u(x, t)$ et la température stationnaire

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$$

si

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= U_1 = \text{const}, \quad u(L, t) = U_2 = \text{const}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= U_0 = \text{const}, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.15. Résoudre le problème de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= U_0 = \text{const}, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.16. Résoudre le problème de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.17. Résoudre le problème de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(L, t) = A, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

2.18. Résoudre le problème de la chaleur :

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = At, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

Exercices pour la section 2.3

2.19. Résoudre le problème de la membrane rectangulaire vibrante, fixée au bord, de côtés $a = 3$ et $b = 2$, aux conditions initiales :

$$u(x, y, 0) = 7 \sin \frac{4\pi}{3}x \sin \frac{5\pi}{2}y + 13 \sin \frac{4\pi}{3}x \sin \frac{9\pi}{2}y,$$

$$u_t(x, y, 0) = 0.$$

De plus, si $c = 4$, calculer $u(x, y, t)$ au point $(x, y, t) = (1.7, 0.9, 0.01)$.
(Remarque : les angles sont en radians.)

2.20. Résoudre le problème des ondes d'une membrane rectangulaire :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = Axy(a-x)(b-y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u_t(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

2.21. Résoudre le problème des ondes d'une membrane rectangulaire :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u_t(x, y, 0) = Axy(a-x)(b-y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

Exercices pour les sections 2.4 et 2.5

2.22. Résoudre le problème de la chaleur d'une plaque rectangulaire de côtés $a = 3$ et $b = 2$, aux faces isolées, de température nulle au bord et de température initiale :

$$u(x, y, 0) = 17 \sin \frac{2\pi}{3}x \sin \frac{5\pi}{2}y + 13 \sin \frac{4\pi}{3}x \sin \frac{7\pi}{2}y.$$

De plus, si $c = 4$, calculer $u(x, y, t)$ au point $(x, y, t) = (1.5, 0.7, 0.02)$.
(Remarque : les angles sont en radians.)

2.23. Résoudre :

$$u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(a, y, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, y, 0) = Axy(a-x)(b-y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b.$$

2.24. Résoudre le problème du potentiel $\nabla^2 u = 0$ dans le rectangle de côtés $a = 2$ et $b = 3$ avec les conditions au bord :

$$h(x) = 0.5 \sin \frac{3\pi}{2}x, \quad g(x) = 0,$$

$$f(y) = 0.7 \sin \frac{2\pi}{3}y, \quad k(y) = y(3-y),$$

2.25. Soit une plaque rectangulaire de côtés : $-L \leq x \leq L$ et $0 \leq y \leq L$, aux faces isolées. Résoudre le problème de la chaleur stationnaire si les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0, & u(x, L) &= 0, & -L \leq x \leq L, \\u(-L, y) &= u(L, y) = 50 \sin \frac{\pi}{L}y, & 0 \leq y \leq L.\end{aligned}$$

2.26. Soit une plaque rectangulaire de côtés : $-L \leq x \leq L$ et $0 \leq y \leq L$, aux faces isolées. Résoudre le problème de la chaleur stationnaire si les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0, & u(x, L) &= 0, & -L \leq x \leq L, \\u(-L, y) &= u(L, y) = 50 \sin \frac{\pi}{2L}y, & 0 \leq y \leq L.\end{aligned}$$

2.27. Résoudre le problème du potentiel :

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & & 0 < y < b, \\u(0, y) &= A, & u(a, y) &= 0, \\u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= B.\end{aligned}$$

Analyse de Fourier

3.1. Séries de Fourier

3.1.1. Définition des séries de Fourier. Les séries de FOURIER traitent naturellement des fonctions périodiques.

DÉFINITION 3.1. Une fonction $f(x)$ est *périodique* de *période* $T > 0$ si

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ réel,}$$

et T est le plus petit nombre strictement positif ayant cette propriété. On dira que f est *T-périodique*.

DÉFINITION 3.2. Soit $f(x + T) = f(x)$, pour tout x réel. Alors on associe à f la *série de FOURIER* :

$$(3.1) \quad f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right), \quad T = 2L,$$

où

$$(3.2) \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$(3.3) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(3.4) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Si la série (3.1) converge, on remplace le signe \sim par le signe $=$.

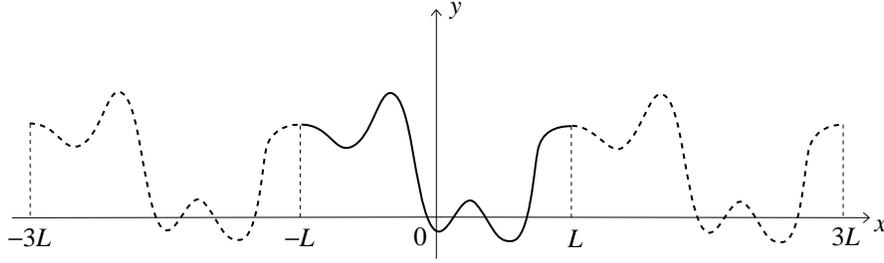
REMARQUE 3.1. Soit $f(x)$ la restriction à $[-L, L]$ d'une fonction d'une variable réelle $2L$ -périodique (V. figure 3.1),

$$f(x + 2L) = f(x) \quad \text{pour tout } x,$$

Si f est suffisamment lisse, la série de FOURIER de $f(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ (V. théorème 3.2).

DÉRIVATION DES FORMULES (3.2)–(3.4). On calcule a_0 :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \right] dx \\ &= a_0 \int_{-L}^L 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L 1 \times \cos \frac{n\pi}{L}x dx \end{aligned}$$

FIG. 3.1. Une fonction lisse $2L$ -périodique.

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L 1 \times \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\
 & = a_0 \times 2L + 0 + 0 \\
 & = 2a_0L
 \end{aligned}$$

par les relations d'orthogonalité (1.14) et (1.15). Donc

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx.$$

On calcule les a_m :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & = \int_{-L}^L \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \cos \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & = a_0 \int_{-L}^L 1 \times \cos \frac{m\pi}{L} x dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \cos \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & = a_m L, \quad m = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned}$$

par les relations d'orthogonalité (1.14) et (1.15). Donc

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi}{L} x dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Enfin, on calcule les b_m :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & = a_0 \int_{-L}^L 1 \times \sin \frac{m\pi}{L} x dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx \\
 & = b_m L, \quad m = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

par les relations d'orthogonalité (1.15) et (1.16). Donc

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi}{L} x dx. \quad \square$$

COROLLAIRE 3.1 (Séries de Fourier de cosinus). *Soit une fonction $f(x)$ et a_n , respectivement b_n , ses coefficients de FOURIER obtenus par les formules (3.2)–(3.3), respectivement (3.4). Si $f(x)$ est paire, alors les b_n sont nuls et l'on associe f à la série de FOURIER de cosinus*

$$(3.5) \quad f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x, \quad T = 2L,$$

où

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

COROLLAIRE 3.2 (Séries de Fourier de sinus). *Soit une fonction $f(x)$ et a_n , respectivement b_n , ses coefficients de FOURIER obtenus par les formules (3.2)–(3.3), respectivement (3.4). Si $f(x)$ est impaire, alors les a_n sont nuls et l'on associe f à la série de FOURIER de sinus*

$$(3.6) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad T = 2L,$$

où

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

REMARQUE 3.2. La propriété suivante des fonctions périodiques pourra simplifier le calcul des coefficients des séries de FOURIER.

Si f est $2L$ -périodique, alors, pour tout x_0 ,

$$(3.7) \quad \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx..$$

Puisque

$$\cos \frac{n\pi}{L}(x + 2L) = \cos \frac{n\pi}{L}x$$

et

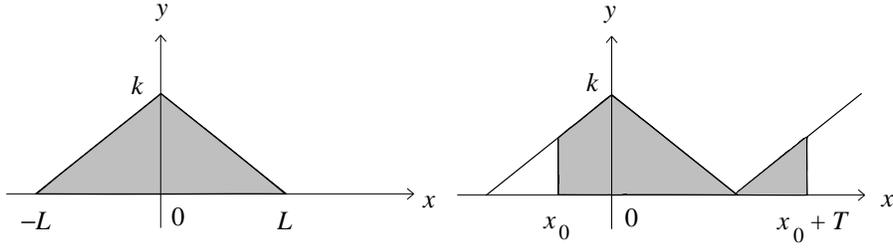
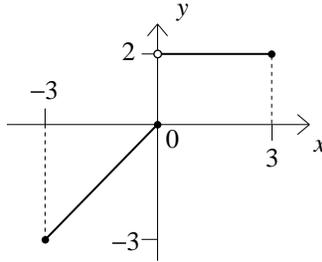
$$\sin \frac{n\pi}{L}(x + 2L) = \sin \frac{n\pi}{L}x,$$

on a

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx = \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx.$$

Ces égalités sont géométriquement évidentes puisque dans chaque cas l'aire sous la fonction intégrée est la même pour toute base de longueur $2L$ (V. figure 3.2).

FIG. 3.2. Égalité des aires sur une période $T = 2L$.FIG. 3.3. La fonction $f(x)$ continue par morceaux de l'exemple 3.1.

Voici une démonstration analytique de l'égalité (3.7) au moyen du changement de variable

$$y = x + 2L, \quad x = y - 2L, \quad dx = dy.$$

Dans ce cas,

$$\int_{-L}^{x_0} f(x) dx = \int_L^{x_0+2L} f(y-2L) dy = \int_L^{x_0+2L} f(y) dy$$

puisque $f(y-2L) = f(y)$. Il suit que

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{x_0}^L f(x) dx + \int_{-L}^{x_0} f(x) dx \\ &= \int_{x_0}^L f(x) dx + \int_L^{x_0+2L} f(y) dy \\ &= \int_{x_0}^{x_0+2L} f(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.1. Développer la fonction continue par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} x, & -3 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 3, \end{cases}$$

en série de FOURIER.

RÉSOLUTION. La fonction f n'est ni paire ni impaire (V. figure 3.3). Donc on pose

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi}{3}x + b_n \sin \frac{n\pi}{3}x \right].$$

On calcule a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2 \times 3} \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \frac{1}{6} \left[\int_{-3}^0 x dx + \int_0^3 2 dx \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^0 + 2x \Big|_0^3 \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[-\frac{9}{2} + 6 \right] = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On calcule a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi}{3}x dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 x \cos \frac{n\pi}{3}x dx + \int_0^3 2 \cos \frac{n\pi}{3}x dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[x \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3}x \Big|_{-3}^0 + 2 \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3}x \Big|_0^3 - \frac{3}{n\pi} \int_{-3}^0 \sin \frac{n\pi}{3}x dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[0 - (-3) \frac{3}{n\pi} \sin(-n\pi) + \frac{6}{n\pi} \sin n\pi - 0 + \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \cos \frac{n\pi}{3}x \Big|_{-3}^0 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \left[\cos 0 - \cos \frac{n\pi}{3}(-3) \right] \\ &= \frac{3}{(n\pi)^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ 6/(n\pi)^2, & n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Enfin, on calcule b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi}{3}x dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\int_{-3}^0 x \sin \frac{n\pi}{3}x dx + \int_0^3 2 \sin \frac{n\pi}{3}x dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[-x \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3}x \Big|_{-3}^0 - 2 \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{3}x \Big|_0^3 + \frac{3}{n\pi} \int_{-3}^0 \cos \frac{n\pi}{3}x dx \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[0 + \frac{(-3) \times 3}{n\pi} \cos(-n\pi) - \frac{6}{n\pi} [\cos n\pi - \cos 0] + \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{3}x \Big|_{-3}^0 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[-\frac{9}{n\pi}(-1)^n - \frac{6}{n\pi}(-1)^n + \frac{6}{n\pi} + \left(\frac{3}{n\pi} \right)^2 [\sin 0 - \sin(-n\pi)] \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} [-3(-1)^n - 2(-1)^n + 2] \end{aligned}$$

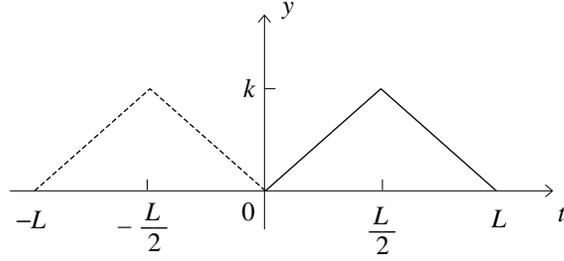


FIG. 3.4. Fonction prolongée en fonction paire.

$$= -\frac{5}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} = \begin{cases} 7/(n\pi), & n \text{ impair,} \\ -3/(n\pi), & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Finalement, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{6}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos \frac{\pi}{3}x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi}{3}x + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi}{3}x + \dots \right] \\ + \frac{1}{\pi} \left[\frac{7}{1} \sin \frac{\pi}{3}x - \frac{3}{2} \sin \frac{2\pi}{3}x + \frac{7}{3} \sin \frac{3\pi}{3}x - \frac{3}{4} \sin \frac{4\pi}{3}x + \dots \right].$$

Comme f n'est pas continue, la série n'est pas uniformément convergente au voisinage des points de discontinuité de f (V. le théorème 3.1) et les b_n sont d'ordre $O(1/n)$ d'après la remarque 3.3 à la section suivante. \square

EXEMPLE 3.2. Soit la fonction tente :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{L}t, & 0 < t < \frac{L}{2}, \\ \frac{2k}{L}(L-t), & \frac{L}{2} < t < L. \end{cases}$$

Développer f sur $[0, L]$ en série de FOURIER

- (a) de cosinus.
- (b) de sinus.

RÉSOLUTION. La résolution illustrera des propriétés générales des fonctions paires, respectivement impaires.

(a) On prolonge $f(t)$ en une fonction paire sur $[-L, L]$ (V. figure 3.4) et l'on développe en série de FOURIER de cosinus. Pour $n = 0$:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt = \frac{2}{2L} \int_0^L f(t) dt \\ = \frac{2}{2L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} t dt + \int_{L/2}^L (L-t) dt \right] \\ = \frac{k}{2}.$$

Pour $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{2}{L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} t \cos \frac{n\pi}{L} t dt + \int_{L/2}^L (L-t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt \right]. \end{aligned}$$

On intègre chacune des intégrales par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} t \cos \frac{n\pi}{L} t dt &= \frac{L}{n\pi} t \sin \frac{n\pi}{L} t \Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \sin \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{L}{n\pi} \frac{L}{2} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{L}{n\pi} \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{L} t \Big|_0^{L/2} \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right); \end{aligned}$$

(remarque : on garde $(L-t)$ en un seul facteur)

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (L-t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt &= \frac{L}{n\pi} (L-t) \sin \frac{n\pi}{L} t \Big|_{L/2}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{L/2}^L \sin \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= -\frac{L}{n\pi} \frac{L}{2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{L} t \Big|_{L/2}^L \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Alors

$$a_n = \frac{4k}{L^2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

Pour $n = 1$:

$$a_1 = \frac{4k}{\pi^2 1^2} (0 + 1 - 1) = 0.$$

Et généralement, pour :

$$\begin{aligned} n \text{ impair} : \quad a_n &= 0, \\ n = 2 : \quad a_2 &= \frac{4k}{\pi^2 2^2} (2(-1) - 1 - 1) = -\frac{16k}{\pi^2 2^2}, \\ n = 4 : \quad a_4 &= \frac{4k}{\pi^2 4^2} (2(+1) - 1 - 1) = 0, \\ n = 6 : \quad a_6 &= \frac{4k}{\pi^2 6^2} (2(-1) - 1 - 1) = -\frac{16k}{\pi^2 6^2}, \\ n = 8 : \quad a_8 &= 0, \\ n = 10 : \quad a_{10} &= -\frac{16k}{\pi^2 10^2}. \end{aligned}$$

Les b_n sont tous nuls puisque f est paire; en effet,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt = 0$$

puisque l'on intègre une fonction impaire sur $[-L, L]$.

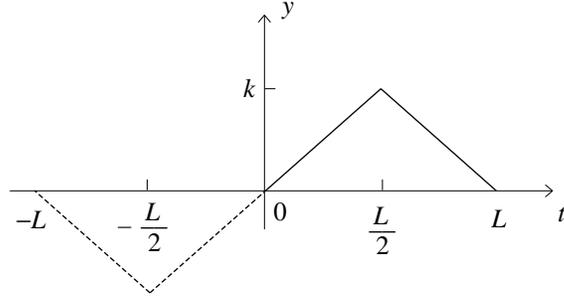


FIG. 3.5. Fonction prolongée en fonction impaire.

Donc, si f est paire, sa série de FOURIER est une série de cosinus :

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \sum_{n=2,6,10,14,\dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{L} t.$$

Les a_n sont d'ordre $O(1/n^2)$ d'après la remarque 3.3 à la section suivante puisque la fonction $f(x)$ prolongée sur une période est continue mais pas dérivable.

(b) On prolonge f en une fonction impaire sur $[-L, L]$ (V. figure 3.5) et on la développe en série de FOURIER de sinus.

Les a_0 et a_n sont tous nuls puisque $f(x)$ est impaire ; en effet,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t dt = 0$$

puisque l'on intègre une fonction impaire. De même pour a_0 .

On calcule les b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{2}{L} \frac{2k}{L} \left[\int_0^{L/2} t \sin \frac{n\pi}{L} t dt + \int_{L/2}^L (L-t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt \right]. \end{aligned}$$

On intègre chacune des intégrales par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} t \sin \frac{n\pi}{L} t dt &= -\frac{L}{n\pi} t \cos \frac{n\pi}{L} t \Big|_0^{L/2} + \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} t \Big|_0^{L/2} \\ &= -\frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}; \end{aligned}$$

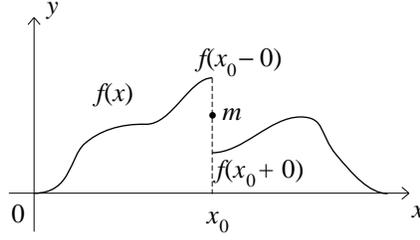


FIG. 3.6. Convergence d'une série de FOURIER au point x_0 vers la valeur moyenne $m = [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]/2$.

(remarque : on garde $(L - t)$ en un seul facteur)

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (L - t) \sin \frac{n\pi}{L} t dt &= -\frac{L}{n\pi} (L - t) \cos \frac{n\pi}{L} t \Big|_{L/2}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{L/2}^L \cos \frac{n\pi}{L} t dt \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{L} t \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Alors :

$$b_n = \frac{4k}{L^2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} 2 \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{8k}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

En général,

$$\begin{aligned} n \text{ pair} &: b_n = 0, \\ n = 1, 5, 9, \dots &: b_n = \frac{8k}{\pi^2 n^2}, \\ n = 3, 7, 11, \dots &: b_n = -\frac{8k}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Le développement est donc :

$$f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} t - \dots \right).$$

Les b_n sont d'ordre $O(1/n^2)$ d'après la remarque 3.3 à la section suivante puisque la fonction $f(x)$ prolongée sur une période est continue mais pas dérivable. \square

3.1.2. La convergence des séries de Fourier. Énonçons un théorème général sur la convergence des séries de FOURIER.

THÉORÈME 3.1. *Soit f une fonction T -périodique, continue par morceaux. Si f admet partout une dérivée à gauche et une dérivée à droite :*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

alors la série de FOURIER de f converge partout. Sa somme est égale à $f(x_0)$ si f est continue en x_0 , sinon elle est égale à la valeur moyenne (V. figure 3.6) :

$$m = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Maintenant, on démontre un théorème plus faible sur la convergence des séries de FOURIER.

THÉORÈME 3.2. *Soit f une fonction $2L$ -périodique. Si $f(x)$ et $f'(x)$ sont continues et $|f''(x)| < M$, pour tout x , alors la série de FOURIER de f converge.*

DÉMONSTRATION. Après deux intégrations par parties on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{1}{L} \times \frac{L}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_{-L}^L - \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= \frac{L}{n^2\pi^2} f'(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\ &= -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx. \end{aligned}$$

Donc

$$|a_n| \leq \frac{2L^2 M}{n^2\pi^2} =: \frac{C}{n^2}.$$

De même

$$|b_n| \leq \frac{2L^2 M}{n^2\pi^2} = \frac{C}{n^2}.$$

Enfin,

$$\left| a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right| \leq |a_0| + 2C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \quad \square$$

REMARQUE 3.3. On voit de la même façon que les coefficients de FOURIER a_n et b_n sont de l'ordre de $1/n^k$, quand $n \rightarrow \infty$, si la k^{e} dérivée $f^{(k)}(x)$ de $f(x)$ est continue par morceaux, mais pas continue; si elle est continue, l'ordre est de $1/n^{k+1}$.

3.1.3. Le phénomène de Gibbs. Il faut aussi savoir qu'au voisinage d'un point de discontinuité de f où les limites à gauche et à droite existent, la somme partielle de la série de FOURIER

$$S_N(f; x) = a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

oscille autour de la valeur de la fonction et la dépasse d'environ 18%. C'est le phénomène de GIBBS qui ne disparaît pas quand N augmente mais se rapproche du saut (V. la figure 3.7).

EXEMPLE 3.3. Soit la fonction 2π -périodique :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \quad \text{pour tout } x.$$

Tracer $f(x)$ sur au moins deux périodes. Développer f en série de FOURIER. Tracer les trois premiers termes non nuls de la série de FOURIER et les sommes partielles des deux premiers et des trois premiers termes.

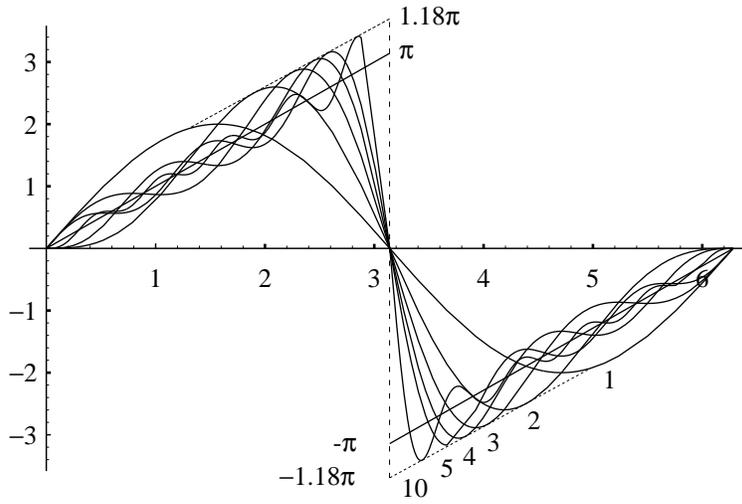


FIG. 3.7. Le phénomène de GIBBS pour les sommes partielles $S_N(f; x)$, $N = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ de la fonction dent-de-scie $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, de période 2π .

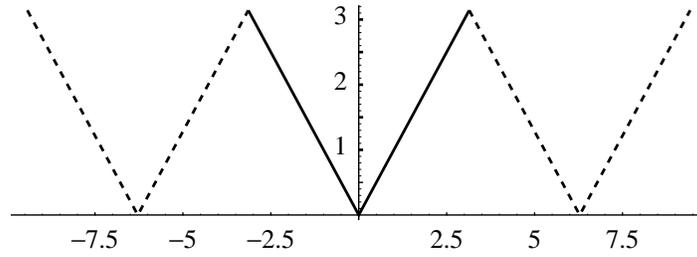


FIG. 3.8. Trois périodes de $f(x)$ de l'exemple 3.3.

RÉSOLUTION. On trace trois périodes de $f(x)$ à la figure 3.8. Puisque f est paire (V. figure 3.8), les b_n sont nuls. Puisque la fonction prolongée est continue mais pas dérivable, les a_n sont d'ordre $O(1/n^2)$ d'après la remarque 3.3. Comme $T = 2L = 2\pi$, alors $L = \pi$,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

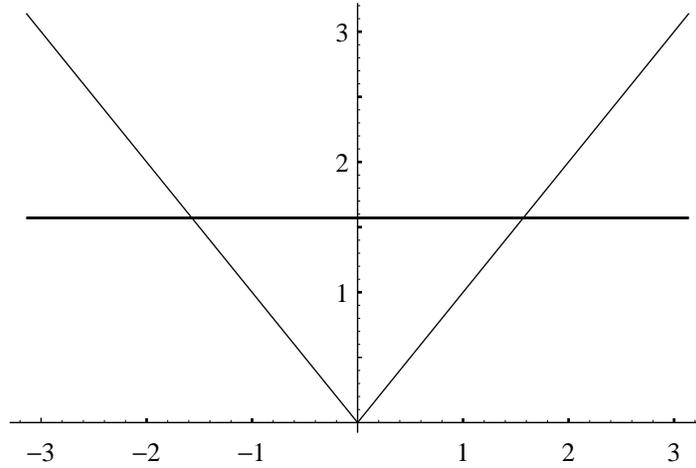


FIG. 3.9. Le terme constant $a_0 = \pi/2$ de l'exemple 3.3.

et

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos \frac{n\pi}{\pi} x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi n^2} [\cos n\pi - 1] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ -4/(\pi n^2), & n \text{ impair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

La série est donc

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos nx \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \dots
 \end{aligned}$$

On montre aux figures 3.9–3.11 les trois premiers termes non nuls de la série et la somme des deux premiers termes à la figure 3.10 et celle des trois premiers à la figure 3.11. \square

REMARQUE 3.4. Pour les applications il est utile de se souvenir que les coefficients de FOURIER de $f(x)$ sont de l'ordre $1/n^2$ si $f'(x)$ est continue mais seulement de l'ordre $1/n$ si $f'(x)$ n'est pas continue (V. remarque 3.3).

3.1.4. Cas particuliers de développements en série de Fourier. On emploie certaines identités trigonométriques pour obtenir le développement en série de FOURIER de fonctions périodiques exprimées aux moyens des puissances de $\cos x$ et $\sin x$.

EXEMPLE 3.4. Trouver la série de FOURIER de

$$\cos^4 x.$$

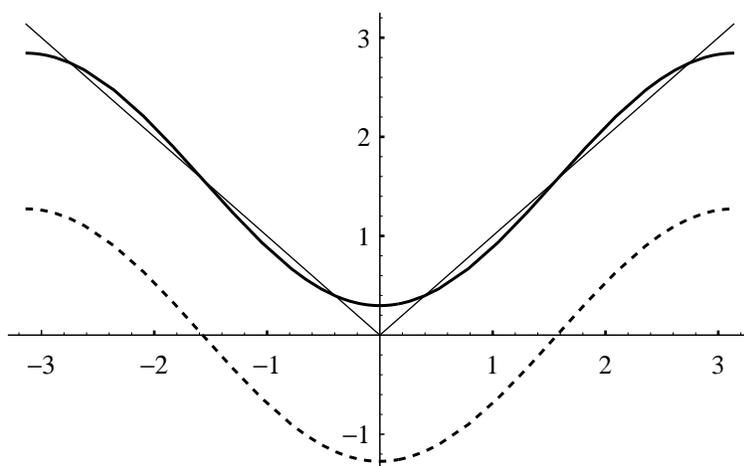


FIG. 3.10. Le 2^e terme en pointillé et la somme des 2 premiers termes de l'exemple 3.3.

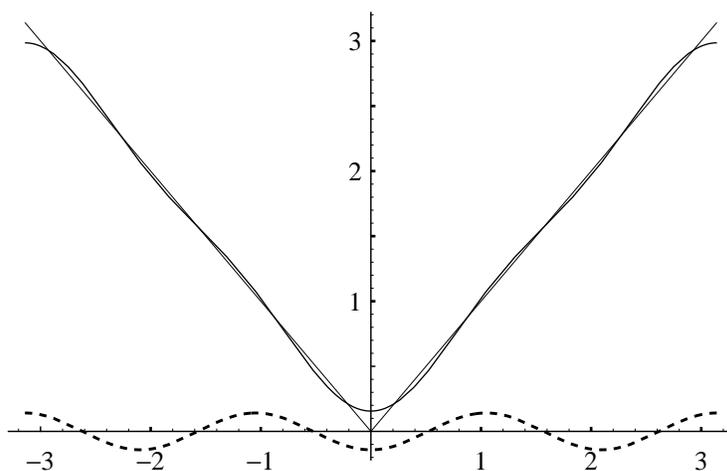


FIG. 3.11. Le 3^e terme en pointillé et la somme des 3 premiers termes de l'exemple 3.3.

RÉSOLUTION. On emploie l'identité d'EULER :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

avec $\theta = 4x$ et $\theta = x$:

$$e^{i4x} = \cos 4x + i \sin 4x$$

et

$$\begin{aligned} (e^{ix})^4 &= (\cos x + i \sin x)^4 \\ &= \cos^4 x + i4 \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - i4 \cos x \sin^3 x + \sin^4 x \\ &= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + i4 \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x, \\ \sin 4x &= 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x,\end{aligned}$$

et, par l'identité $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos^4 x - 6 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 \\ &= \cos^4 x + 6 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \\ &= 8 \cos^4 x - 4 \cos 2x - 4 + 1 \\ &= 8 \cos^4 x - 4 \cos 2x - 3.\end{aligned}$$

On a donc la série de FOURIER :

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8},$$

qui est une série de cosinus parce que $\cos^4 x$ est une fonction paire. \square

REMARQUE 3.5. Pour les développements en série de FOURIER on emploie le développement de $\cos^4 x$ en $\cos nx$ et pour les développements en série de FOURIER-LEGENDRE emploie le développement de $\cos 4x$ en $\cos^n x$.

EXEMPLE 3.5. Trouver la série de FOURIER de

$$g(s) = \cos^3 \frac{\pi}{13} s.$$

RÉSOLUTION. On peut exprimer $\cos^3 x$ directement selon les fonctions 1, $\cos x$, $\cos 2x$, etc., par la formule

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

c'est-à-dire

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x.$$

Donc

$$g(s) = \frac{3}{4} \cos \frac{1\pi}{13} s + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi}{13} s.$$

Ceci est la série de FOURIER de $g(s)$ qui est une série de cosinus puisque $g(s)$ est une fonction paire :

$$g(-s) = \cos^3 \left(-\frac{\pi}{13} s \right) = \cos^3 \left(\frac{\pi s}{13} \right) = g(s). \quad \square$$

D'une façon générale, on peut trouver les séries de FOURIER de $\cos^k \alpha$ et de $\sin^k \alpha$, sans intégration, par les formules suivantes qui nous font passer de la base $\{\cos^k \alpha, \sin^k \alpha\}$ à la base $\{\cos m\alpha, \sin n\alpha\}$.

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), & \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha), & \sin^3 \alpha &= \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha), \\ \cos^4 \alpha &= \frac{1}{8}(3 + 4 \cos^2 \alpha + \cos 4\alpha), & \sin^4 \alpha &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos^2 \alpha + \cos 4\alpha).\end{aligned}$$

3.1.5. La forme eulérienne des séries de Fourier. Rappelons d'abord quelques points de notation des nombres complexes. Notons $i = \sqrt{-1}$. Soit a et b des nombres réels. Alors $c = a + ib$ est un nombre complexe. On note $\Re c = a$ la partie réelle de c et $\Im c = b$ sa partie imaginaire. On note $\bar{c} = a - ib$ le conjugué complexe de c .

On modifie la définition du produit scalaire pour les fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 3.3. On définit le produit scalaire de deux fonctions complexes u et v sur $[a, b]$ par l'intégrale :

$$(3.8) \quad (u, v) := \int_a^b u(x)\bar{v}(x) dx,$$

où \bar{v} est la conjuguée complexe de v .

LEMME 3.1. Les fonctions $\{e^{i(n\pi/L)x}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sont orthogonales sur $[-L, L]$ et de norme $\sqrt{2L}$.

DÉMONSTRATION. On voit que

$$\int_{-L}^L e^{i(m\pi/L)x} e^{-i(n\pi/L)x} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2L, & m = n. \end{cases}$$

La norme est la racine carrée de $2L$. □

THÉORÈME 3.3. La forme eulérienne ou complexe de la série de FOURIER de $f(x)$ est

$$(3.9) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x},$$

où les coefficients complexes sont

$$(3.10) \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i(n\pi/L)x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Puisque la base des fonctions $\{e^{i(n\pi/L)x}\}$ du développement de FOURIER complexe est une famille orthogonale, le théorème suit du lemme précédent. □

Pour retrouver la série de FOURIER réelle d'une fonction $f(x)$ à valeur réelle, on emploie l'identité d'EULER :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n e^{i(n\pi/L)x} + c_{-n} e^{-i(n\pi/L)x} \right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \left(\cos \frac{n\pi}{L}x + i \sin \frac{n\pi}{L}x \right) + c_{-n} \left(\cos \frac{n\pi}{L}x - i \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(c_n + c_{-n}) \cos \frac{n\pi}{L}x + i(c_n - c_{-n}) \sin \frac{n\pi}{L}x \right].
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0, \\
a_n &= c_n + c_{-n} = 2\Re c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\
b_n &= i(c_n - c_{-n}) = -2\Im c_n, \quad n = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire 2 fois la partie réelle et moins 2 fois la partie imaginaire de c_n , puisque $c_{-n} = \bar{c}_n$ si f est réelle. Réciproquement,

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0, \\
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \\
c_{-n} &= \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

En génie électrique, on emploie couramment la forme eulérienne, appelée aussi exponentielle, des séries de FOURIER.

3.2. Série de Fourier discrète et convolution

Soit $f(x)$ un signal 2π -périodique sur $[0, 2\pi]$ échantillonné en n points :

$$(3.11) \quad f_k := f(x_k), \quad x_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

On veut construire le polynôme trigonométrique complexe :

$$p(x) = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell e^{i\ell x}$$

qui interpole $f(x)$ aux nœuds x_k :

$$f_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell e^{i\ell x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Par l'orthogonalité des exponentielles discrètes :

$$(3.12) \quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\ell 2\pi k/n} e^{-im 2\pi k/n} = \begin{cases} 0, & \ell \neq m, \\ n, & \ell = m, \end{cases}$$

et un changement de l'ordre des sommations, on obtient les coefficients c_m :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-imx_k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell e^{i(\ell-m)x_k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(\ell-m)2\pi k/n} \\ &= nc_m. \end{aligned}$$

Notons :

$$f = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]^T$$

le n -vecteur signal. Alors la transformée de FOURIER discrète (TFD/DFT) de f , appelée spectre des fréquences de f , est le n -vecteur

$$\hat{f} = [\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{n-1}]^T$$

où

$$\hat{f}_m = nc_m = \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-imx_k}.$$

En notation matricielle, on a

$$\hat{f} = F_n f,$$

où la matrice de FOURIER d'ordre n , $F_n = (e_{nk})$, est définies par les éléments :

$$e_{jk} = e^{-ijx_k} = e^{2\pi ijk/n} =: w^{jk}, \quad w = w_n = e^{-2\pi i/n}, \quad j, k = 0, 1, \dots, n-1.$$

EXEMPLE 3.6. Soit le signal $f = [2, 4, 6, 8]^T$ en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Trouver $\hat{f} = [c_0, c_1, c_2, c_3]^T$.

RÉSOLUTION. On a $w = e^{-2\pi i/4} = e^{-i\pi/2} = -i$. Donc $e_{jk} = w^{jk} = (-i)^{jk}$ et

$$F_4 \hat{f} = \begin{bmatrix} w^0 & w^0 & w^0 & w^0 \\ w^0 & w^1 & w^2 & w^3 \\ w^0 & w^2 & w^4 & w^6 \\ w^0 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \hat{f} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

On vérifie que la transposée complexe de $F = F_4$, notée \overline{F} , satisfait l'équation :

$$\overline{F}F = 4I.$$

Donc

$$F^{-1} = \frac{1}{4} \overline{F}.$$

Il suit que $\hat{f} = F^{-1}f$ se calcule sans invertir F :

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1+i \\ -1 \\ -1-i \end{bmatrix}. \quad \square$$

Dans le cas de n arbitraire avec

$$w = e^{2\pi i/n}, \quad w^n = e^{2\pi i} = 1,$$

on écrit F pour F_n et l'on a le système $Fc = f$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{bmatrix}.$$

On peut voir que

$$F\overline{F} = \overline{F}F = nI, \quad F^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F}.$$

Alors la transformée de FOURIER discrète de f est

$$c = \frac{1}{n}\overline{F}f.$$

Ce processus contient la transformation de FOURIER rapide (TFR/FFT) en moins de $O(n \log n)$ multiplications au lieu de $O(n^2)$ multiplications.

La convolution discrète est d'une utilisation fréquente dans les applications. Elle applique deux n -vecteurs $f = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]^T$ et $g = [g_0, g_1, \dots, g_{n-1}]^T$ en un n -vecteur noté $f * g$ par la formule suivante, où la somme des indices j et k de $f_j g_k$ est prise modulo n :

$$f * g = [f_0 g_0 + f_1 g_{n-1} + g_2 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_1, \dots, f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0]^T.$$

Cette méthode directe requiert $O(n^2)$ multiplications.

La convolution se calcule aussi par la **règle de la convolution** indexconvolution !règle de la suivante :

$$f * g = nF \left(F^{-1} f F^{-1} g \right) = nF \left[\left(\frac{1}{n}\overline{F}f \right) \left(\frac{1}{n}\overline{F}g \right) \right],$$

où le produit de deux vecteurs se fait composante à composante. Cette règle indirecte est rapide et ne requiert que $O(n \log n)$ étapes.

La convolution peut se calculer par la matrice circulante

$$C = \begin{bmatrix} f_0 & f_{n-1} & \cdot & \cdot & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_{n-1} & \cdot & f_2 \\ \cdot & f_1 & f_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} & \cdot & f_1 & f_0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est périodique puisque les diagonales inférieures réapparaissent comme diagonales supérieures.

EXEMPLE 3.7. Calculer la convolution $f * g$ des 4-vecteurs f et g .

RÉSOLUTION.

$$Cg = \begin{bmatrix} f_0 & f_3 & f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 & f_3 & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_0 & f_3 \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 g_0 + f_3 g_1 + f_2 g_2 + f_1 g_3 \\ f_1 g_0 + f_0 g_1 + f_3 g_2 + f_2 g_3 \\ f_2 g_0 + f_1 g_1 + f_0 g_2 + f_3 g_3 \\ f_3 g_0 + f_2 g_1 + f_1 g_2 + f_0 g_3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Les matrices circulantes C ont des propriétés très intéressantes. Si C est d'ordre n , alors ses vecteurs propres sont les colonnes de la matrice de FOURIER $F = F_n$. On a donc

$$C = F\Lambda F^{-1}.$$

C'est la représentation matricielle de la transformation de FOURIER discrète :

- (1) $c = F^{-1}f$ est la transformée discrète de f ;
- (2) $d = F^{-1}g$ est la transformée discrète de g ;
- (3) $ncd = \Lambda cd$, où cd est le produit composante à composante ;
- (4) $f * g = F(ncd)$.

Dans les applications, cette méthode est rapide.

3.3. Transformation de Fourier

Soit une fonction $f(x)$ de carré sommable ou d'énergie finie, c'est-à-dire $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$(3.13) \quad \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

DÉFINITION 3.4. La transformation de FOURIER de $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par la formule

$$(3.14) \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx.$$

On dit que $\hat{f}(\omega)$ est la transformée de FOURIER de $f(x)$.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ par l'identité de PLANCHEREL (V. l'exercice 3.18) :

$$(3.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

DÉFINITION 3.5. Soit $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$. La transformation inverse de FOURIER de $\hat{f}(\omega)$ est définie par la formule

$$(3.16) \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

On dit que $f(x)$ est la transformée de FOURIER inverse de $\hat{f}(\omega)$.

Si $f(x)$ est sommable, c'est-à-dire $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$(3.17) \quad \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

alors $\hat{f}(\omega)$ est uniformément continue et, par le lemme de RIEMANN-LEBESGUE,

$$\hat{f}(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{quand } |\omega| \rightarrow \infty.$$

La transformation de FOURIER représente la fonction $f(x)$ par $\hat{f}(\omega)$ dans le domaine des fréquences ω et $\hat{f}(\omega)$ est l'amplitude (complexe) du signal en la fréquence ω .

On présente quelques exemples de transformées de FOURIER qui sont importants dans les applications.

EXEMPLE 3.8. Trouver la transformée de FOURIER de la mesure (fonction) de DIRAC $\delta(x)$.

RÉSOLUTION.

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta(x) dx = e^{i\omega \times 0} = 1. \quad \square$$

EXEMPLE 3.9. Trouver la transformée de FOURIER de l'impulsion décroissante paire :

$$(3.18) \quad f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-a|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} e^{ax} dx + \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx \\ &= \left[\frac{e^{(a-i\omega)x}}{a-i\omega} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{2}{a^2 + \omega^2}. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.10. Trouver la transformée de FOURIER de l'impulsion décroissante impaire :

$$(3.19) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ -e^{ax}, & x < 0, \end{cases} \quad a > 0.$$

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\omega) &= - \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega x} e^{ax} dx + \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax} dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)x} dx + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)x} dx \\ &= - \left[\frac{e^{(a-i\omega)x}}{(a-i\omega)} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= - \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = - \frac{2i\omega}{a^2 + \omega^2}. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.11. Trouver la transformée de FOURIER de la fonction

$$(3.20) \quad f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

RÉSOLUTION. Par l'exemple 3.10,

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{2i\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{i\omega}. \quad \square$$

EXEMPLE 3.12. Trouver la transformée de FOURIER de la fonction identité :

$$(3.21) \quad f(x) = 1.$$

RÉSOLUTION. Par l'exemple 3.9,

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = 0, \quad \text{si } \omega \neq 0.$$

Pour déterminer $\widehat{f}(\omega)$ en $\omega = 0$, on intègre $\widehat{f}(\omega)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2 \arctan \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi,$$

pour tout a même si \widehat{f} approche 0. Il suit que

$$\widehat{f}(\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad \square$$

EXEMPLE 3.13. Trouver la transformée de FOURIER de la fonction d'HEAVISIDE :

$$(3.22) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

RÉSOLUTION. La fonction d'HEAVISIDE est la somme des fonctions des exemples 3.11 et 3.12 divisée par 2. On a donc

$$\widehat{f}(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \quad \square$$

Un des buts de l'analyse transformationnelle est de représenter certains opérateurs d'une façon simple.

On voit que la dérivation en x dans le domaine du temps devient une multiplication par $i\omega$ dans le domaine des fréquences. En effet, par intégration par parties, on a :

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f'(x) dx \\ &= e^{-i\omega x} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} i\omega f(x) dx \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega), \end{aligned}$$

où le terme intégré est nul en $\pm\infty$ du fait que $\widehat{f}(\omega) \rightarrow 0$ avec $\omega \rightarrow \pm\infty$ si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

De même, la dérivée $\widehat{f}'(\omega)$ de $\widehat{f}(\omega)$ dans le domaine des fréquences provient de la multiplication par $-ix$ dans le domaine du temps :

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \widehat{f}(\omega) &:= \widehat{f}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-ix) f(x) dx \\ &= \mathcal{F}(-ixf(x))(\omega). \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.6. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Laurent SCHWARTZ des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide est l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui satisfont les inégalités suivantes :

$$(3.25) \quad |x^m f^{(k)}(x)| < C_{mk} < \infty, \quad \text{pour tout } m, k \geq 0.$$

On voit que $f \in \mathcal{S}$ implique que $f^{(k)}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$ pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$

THÉORÈME 3.4. *La transformation de FOURIER est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire*

$$f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{si et seulement si} \quad \widehat{f}(\omega) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

DÉMONSTRATION. Par (3.24) et (3.23) le produit par $-ix$ et la dérivation d/dx dans le domaine du temps deviennent respectivement la dérivation $d/d\omega$ et le produit par $i\omega$ dans le domaine des fréquences. Le résultat suit par intégration par parties où tous les termes intégrés sont nuls en $\pm\infty$. On a :

$$\widehat{f}^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-ix)^k f(x) dx$$

et

$$\left| (i\omega)^m \widehat{f}^{(k)}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{d^m}{dx^m} [(-ix)^k f(x)] dx \right| < C_{mk}$$

puisque $f \in \mathcal{S}$. Il suit que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$. La réciproque se fait de la même façon. \square

Puisque l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans la norme de $L^2(\mathbb{R})$, il suffit de démontrer les résultats dans \mathcal{S} et de passer à la limite. L'avantage de travailler sur des fonctions en \mathcal{S} , c'est que la dérivation de tout ordre et l'intégration par parties fonctionnent bien.

La convolution est une autre opération importante en analyse transformationnelle.

DÉFINITION 3.7. Soit f et g de carré sommable. La convolution de f et de g , notée $f * g$, est définie par la formule :

$$(3.26) \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

On dit que f est convoluée avec g .

On voit que la convolution est commutative :

$$f * g = g * f.$$

En effet, par le changement de variable $s = x - y$, on a $ds = -dy$ et

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} f(x-s)g(s) (-ds) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s) ds \\ &= (g * f)(x). \end{aligned}$$

La convolution dans le domaine du temps devient le produit ordinaire dans le domaine des fréquences.

THÉORÈME 3.5. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$(3.27) \quad \mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

DÉMONSTRATION. Par définition de la transformée de FOURIER de la convolution, on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{f * g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \right] dx \\
 &\quad \text{(on peut interchanger l'ordre d'intégration si } f, g \in L^2(\mathbb{R})) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) e^{-i\omega x} dx dy \\
 &\quad \text{(posons } x-y = s \text{ et } dx = ds) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(s) e^{-i\omega(s+y)} ds dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega y} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} g(s) ds \\
 &= \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega). \quad \square
 \end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que

$$(3.28) \quad \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f * g}) = 2\pi(\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(\mathcal{F}^{-1}\widehat{g}).$$

EXEMPLE 3.14. Montrer :

$$(3.29) \quad \mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/(4a)}, \quad a > 0.$$

RÉSOLUTION. Par définition et par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx \\
 &= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-2ax) e^{-ax^2} dx \\
 &= -\frac{2a}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} (-ix) e^{-ax^2} dx \\
 &= -\frac{2a}{i\omega} \widehat{f}'(\omega).
 \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle séparable :

$$-2a\widehat{f}'(\omega) = \omega\widehat{f}(\omega),$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{d\widehat{f}}{\widehat{f}} &= -\frac{1}{2a}\omega, \\
 \ln \widehat{f}(\omega) &= -\frac{1}{4a}\omega^2 + k_1, \\
 \widehat{f}(\omega) &= k e^{-\omega^2/(4a)}.
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la constante k on pose

$$k = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i0x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

par l'exemple suivant. □

EXEMPLE 3.15. Montrer :

$$(3.30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$$

RÉSOLUTION. On procède par changement de variables. Soit la substitution :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

d'où

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad dx dy = r dr d\theta.$$

Écrivons

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_{r=0}^{r=+\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-ar^2} r dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=+\infty} e^{-ar^2} r dr \\ &= 2\pi \frac{1}{2a} e^{-ar^2} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

On obtient donc la réponse en prenant la racine carrée :

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad \square$$

De la même façon, on peut montrer la formule suivante :

$$(3.31) \quad \mathcal{F}^{-1}(e^{-a\omega^2}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-t^2/(4a)}, \quad a > 0.$$

EXEMPLE 3.16. Résoudre l'équation de la chaleur :

$$(3.32) \quad u_t = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0.$$

RÉSOLUTION. La transformée de FOURIER de l'équation de la chaleur par rapport à la variable x est une équation différentielle séparable en t avec paramètre ω :

$$\widehat{u}_t(\omega, t) = c^2(-i\omega)^2 \widehat{u}(\omega, t).$$

On intègre cette équation et l'on emploie la transformée de FOURIER de la condition initiale :

$$\widehat{u}(\omega, 0) = \widehat{f}(\omega).$$

On a donc :

$$\widehat{u}_t(\omega, t) = \widehat{f}(\omega) e^{-c^2\omega^2 t}.$$

Le second membre est le produit de deux fonctions de ω , donc sa transformée de FOURIER inverse sera une convolution par les formules (3.27) et (3.31) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left(\mathcal{F}^{-1} \widehat{f}(\omega) \right) * \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-c^2 \omega^2 t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{c^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2 / (c^2 t)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2 / (c^2 t)} dy. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 3.6. Puisque

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } t \rightarrow 0+,$$

on voit que le noyau de l'intégrale, $K(x - y, t)$, tend vers la mesure de DIRAC (fonction de DIRAC), $\delta(x - y)$, quand t tend vers $0+$, c'est-à-dire

$$K(x - y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-(x-y)^2 / (c^2 t)} \rightarrow \delta(x - y)$$

quand t tend vers $0+$. On vérifie que l'intégrale du noyau sur $-\infty < x < \infty$ est égale à 1 au moyen du changement de variable

$$s = \frac{x - y}{2c\sqrt{t}}, \quad dy = -2c\sqrt{t} ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2 / (c^2 t)} dy &= -\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} 2c\sqrt{t} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \\ &= 1, \end{aligned}$$

par l'exemple 3.15. De plus, $K(x - y, t)$ est positif et son support tend vers le point $x - y$ quand t tend vers $0+$. Donc $K(x - y, t) \rightarrow \delta(x - y)$ quand $t \rightarrow 0+$.

En mécanique quantique, le principe d'incertitude d'HEISENBERG affirme qu'on ne peut mesurer simultanément la position $x f(x)$ et le momentum $f'(x)$ d'une particule avec la même grande précision. Il en va de même pour $f(x)$ et $\widehat{f}(\omega)$. Par exemple, le support de $f(x) = \delta(x)$ est de longueur nulle, $x = 0$, mais celui de $\widehat{f}(\omega) = 1$ est de longueur infinie, $-\infty < \omega < \infty$.

Notons W_x et W_ω la demi-largeur de $f(x)$ dans le domaine du temps et de $\widehat{f}(\omega)$ dans le domaine des fréquences :

$$(3.33) \quad W_x^2(f) = \frac{\int x^2 |f(x)|^2 dx}{\int |f(x)|^2 dx}, \quad W_\omega^2(\widehat{f}) = \frac{\int \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega}{\int |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega},$$

où l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 3.6 (Principe d'incertitude d'HEISENBERG). *Pour toute fonction $f(x)$,*

$$(3.34) \quad W_x^2(f) W_\omega^2(\widehat{f}) \geq \frac{1}{2}.$$

DÉMONSTRATION. Par l'inégalité de SCHWARTZ et l'identité de PLANCHEREL de l'exercice 3.18 :

$$(3.35) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right) \\ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)$$

On intègre le 1^{er} membre de (3.35) par parties :

$$(3.36) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x) dx = \left[x \frac{f(x)^2}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{2} dx.$$

Le terme intégré est nul si $f(x) \in L^2\mathbb{R}$. De nouveau par l'identité de PLANCHEREL de l'exercice 3.18 :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) f'(x) dx \right|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{2} dx \right) \\ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{2} dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\omega)^2}{2} d\omega \right).$$

On a donc :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)^2}{2} dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{f}(\omega)^2}{2} d\omega \right) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega \widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right)$$

Le théorème suit en multipliant les deux membres de cette inégalité par 2π et en prenant la racine carrée. \square

Exercices pour la section 3.1

Trouver la série de FOURIER de

3.1. $f(t) = |t|$ sur $-2 < t < 2$.

3.2. $g(s) = \cos^4 \frac{\pi}{7} s$ sur $-7 < s < 7$.

(Indication : $\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$ et $2 \cos^2 \alpha = \cos 2\alpha + 1$.)

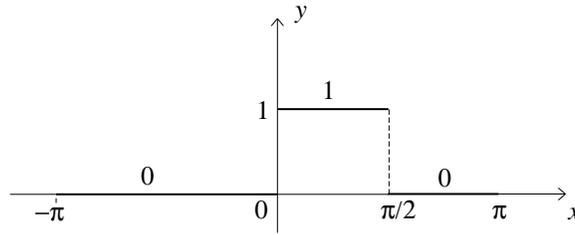
Tracer chacune des fonctions données et trouver sa série de FOURIER.

3.3. $f(x) = \begin{cases} -k, & -L < x < 0, \\ k, & 0 < x < L. \end{cases}$

3.4. $g(t) = t$, $-1 < t < 1$.

3.5. $h(z) = z^2$, $-L < z < L$.

3.6. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -3 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 3. \end{cases}$

FIG. 3.12. La fonction $f(x)$ de l'exercice 3.7.

3.7. Trouver la série de FOURIER pour la fonction suivante (V. figure 3.12) et tracer le graphique de la somme des 3 premiers termes.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

3.8. Répondre à la question de l'exercice 3.7 pour la fonction

$$f(x) = x + |x|, \quad -\pi < x < \pi.$$

3.9. Montrer que les coefficients c_n du développement de FOURIER complexe de $f(x)$ sont imaginaires purs si f est impaire et réels si f est paire.

3.10. Trouver la série de FOURIER complexe de la fonction périodique

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

3.11. Répondre à la question de l'exercice 3.10 pour la fonction

$$f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Exercices pour la section 3.2

3.12. Trouver la transformée de FOURIER $c = F^{-1}f$ des vecteurs :

$$f = [1, 1, 1, 1]^T, \quad f = [1, 0, 1, 0]^T, \quad f = [1, -1]^T.$$

3.13. Trouver la transformée de FOURIER inverse Fc des vecteurs :

$$f = [1, 1, 1, 1]^T, \quad f = [0, 0, 1, 0]^T, \quad f = [2, 4, 6, 8]^T.$$

3.14. Écrire la matrice unitaire $U = F_4/\sqrt{4}$ d'ordre 4 et vérifier que la 2^{ième} et la 3^{ième} colonnes sont orthogonales. Trouver U^{-1} .

3.15. Trouver la convolution discrète (périodique) de $[1, 2, 3]^T$ et $[3, 3, 1]^T$.

3.16. Trouver la convolution de $f = [1, 1, 1, 1]^T$ et $g = [1, 0, 1, 0]^T$ et leurs transformées c et d , le produit composante à composante cd et la transformée inverse $F(4cd)$.

3.17. Soit $f = [4, 2, 0, 2]^T$. Calculer $c = F^{-1}f$. De plus calculer $f * f$ par la règle de la convolution et vérifier le résultat par la convolution directe (périodique) de f convoluée avec f .

Exercices pour la section 3.3

On suppose que toutes les intégrales convergent absolument. On emploie la fonction d'HEAVISIDE :

$$1_+(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

On note $\overline{f(x)}$ la conjuguée complexe de la fonction $f(x)$.

3.18. Démontrer l'identité de PLANCHEREL :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

3.19. Démontrer l'identité de PLANCHEREL :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega.$$

3.20 Démontrer l'identité de PLANCHEREL :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(x)g(x) dx.$$

Trouver la transformée de FOURIER des fonctions suivantes.

$$3.21. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -b < x < b, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$3.22. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$3.23. f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad a > 0.$$

$$3.24. f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$3.25. f(x) = \begin{cases} e^{iax}, & \text{si } -b < x < c, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$3.26. f(x) = \frac{\sin ax}{x}, \quad a > 0.$$

Montrer les formules suivantes.

$$3.27. \mathcal{F}[1_+(x-a) - 1_+(b-x)] = \frac{e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}}{i\omega}, \quad a < b.$$

$$3.28. \mathcal{F}[x^k e^{-ax} 1_+(x)] = \frac{k!}{(a+i\omega)^{k+1}}, \quad a > 0.$$

$$3.29. \mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2+x^2}\right] = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a\omega|}, \quad a \text{ réel.}$$

$$3.30. \mathcal{F} \left[\int_a^x f(x) dx \right] = \frac{\widehat{f}(\omega)}{i\omega} + c\delta(\omega).$$

$$3.31. \mathcal{F}[f(x-d)] = e^{-ixd} \widehat{f}(\omega).$$

$$3.32. \mathcal{F}[e^{ixd} f(x)] = \widehat{f}(\omega-d).$$

Problèmes en coordonnées sphériques

4.1. Le problème du potentiel pour une sphère

Soit $u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ la distribution du potentiel électrique sur une sphère S de rayon R . On veut déterminer le potentiel u à l'intérieur de S et le potentiel u^* à l'extérieur de S . On fait l'hypothèse suivante sur le modèle physique : le potentiel est borné à l'intérieur de S et nul à l'infini.

4.1.1. Le modèle mathématique. Le potentiel $u(r, \theta, \varphi)$ satisfait l'équation de LAPLACE à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère,

$$(4.1) \quad \nabla^2 u = 0,$$

c'est-à-dire pour $r < R$ et $r > R$, et satisfait sur la sphère la condition aux limites (C.L.)

$$(4.2) \quad u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

De plus

$$(4.3) \quad u \text{ est bornée à l'origine } (r = 0)$$

et

$$(4.4) \quad u^* = 0 \text{ à l'infini } \left(\lim_{r \rightarrow \infty} u^*(r, \theta, \varphi) = 0 \right).$$

Le problème consiste à trouver le potentiel $u(r, \theta, \varphi)$, $r < R$, à l'intérieur de S et le potentiel $u^*(r, \theta, \varphi)$, $r > R$, à l'extérieur de S (V. figure 4.1).

Il est naturel d'exprimer le laplacien ∇^2 en coordonnées sphériques (V. section 13.8) :

$$(4.5) \quad \nabla^2 u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot \varphi}{r^2} u_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} u_{\theta\theta}$$

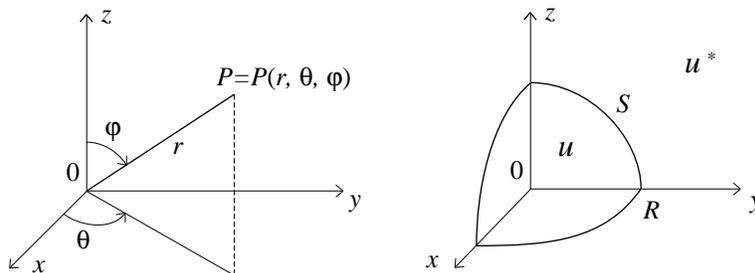


FIG. 4.1. Repère sphérique et sphère S .

où

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \sin \varphi, & r > 0, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\z &= r \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq \pi.\end{aligned}$$

Dans ce cours, on se restreindra au cas simple où la fonction f au bord ne dépend que de φ :

$$(4.6) \quad u(R, \theta, \varphi) = f(\varphi).$$

Il est alors raisonnable de supposer que les potentiels u et u^* ne dépendent pas de θ :

$$u = u(r, \varphi), \quad u^* = u^*(r, \varphi).$$

Ainsi $u_{\theta\theta} = 0$, ce qui simplifie le laplacien :

$$(4.7) \quad \begin{aligned}r^2 \nabla^2 u &= r^2 \left[u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot \varphi}{r^2} u_\varphi \right] \\&= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi u_\varphi) = 0.\end{aligned}$$

4.1.2. Résolution par séparation des variables. On réduit l'équation de LAPLACE à un système d'équations différentielles par séparation des variables. Posons

$$u(r, \varphi) = G(r)H(\varphi)$$

dans (4.7) :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) H + \frac{1}{\sin \varphi} G \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) = 0$$

et divisons par GH :

$$\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = - \frac{1}{H \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) = k.$$

Alors on obtient deux équations différentielles, une en φ :

$$(4.8) \quad \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sin \varphi \frac{dH}{d\varphi} \right) + kH = 0,$$

et l'autre en r :

$$(4.9) \quad \frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) = k.$$

Cette dernière équation est une équation d'EULER, appelée aussi équation d'EULER-CAUCHY :

$$(4.10) \quad r^2 G'' + 2rG' - kG = 0,$$

qui admet des solutions de la forme r^α . En effet, écrivons

$$k = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où la notation anticipe le résultat, et substituons

$$G(r) = r^\alpha$$

dans l'équation (4.10) :

$$\alpha(\alpha-1)r^2 r^{\alpha-2} + 2\alpha r r^{\alpha-1} - n(n+1)r^\alpha = 0,$$

c'est-à-dire

$$r^\alpha[\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n + 1)] = 0.$$

Puisque r n'est pas identiquement nul, on obtient l'équation algébrique du second degré en α :

$$\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha - n(n + 1) = 0,$$

qu'on met en facteurs :

$$\alpha^2 + \alpha - n(n + 1) = (\alpha - n)(\alpha + n + 1) = 0.$$

Ainsi l'équation d'EULER admet, pour chaque n , les deux solutions indépendantes :

$$(4.11) \quad G_n(r) = r^n, \quad G_n^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Pour résoudre (4.8), avec $k = n(n + 1)$, on pose :

$$w = \cos \varphi, \quad \left(\implies \frac{dw}{d\varphi} = -\sin \varphi \right).$$

Comme

$$\frac{d}{d\varphi} = \frac{dw}{d\varphi} \frac{d}{dw} = -\sin \varphi \frac{d}{dw},$$

on a

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} = -\frac{d}{dw}.$$

Alors (4.8) s'écrit :

$$-\frac{d}{dw} \left(-\sin^2 \varphi \frac{dH}{dw} \right) + n(n + 1)H = 0.$$

Pour compléter le changement de φ à w on utilise l'identité

$$\sin^2 \varphi = 1 - w^2.$$

On obtient donc

$$\frac{d}{dw} \left((1 - w^2) \frac{dH}{dw} \right) + n(n + 1)H = 0,$$

ou

$$(4.12) \quad (1 - w^2) \frac{d^2 H}{dw^2} - 2w \frac{dH}{dw} + n(n + 1)H = 0.$$

Cette équation est l'équation de LEGENDRE, qu'on étudiera en détail au chapitre 8. D'après le corollaire 8.1 et la remarque 8.1, pour que les solutions $H_n(w)$ de (4.12) et leurs dérivées $H_n'(w)$ soient bornées en $w = \pm 1$, il faut et il suffit que $n = 0, 1, 2, \dots$. Dans ce cas,

$$H_n(w) = P_n(w) = P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où $P_n(x)$ est le polynôme de LEGENDRE de degré n .

Donc les solutions $u_n = H_n(\cos \varphi)G_n(r)$ et $u_n^* = H_n(\cos \varphi)G_n^*(r)$ de l'équation de LAPLACE (4.7) sont

$$(4.13) \quad u_n(r, \varphi) = r^n P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

et

$$(4.14) \quad u_n^*(r, \varphi) = \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

à des constantes multiplicatives près. Pour ce problème, les u_n et les u_n^* sont les fonctions propres et $k_n = n(n + 1)$ les valeurs propres.

Enfin, on obtient par superposition la solution intérieure, bornée à l'origine :

$$(4.15) \quad u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \varphi)$$

et la solution extérieure, nulle à l'infinie :

$$(4.16) \quad u^*(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi).$$

On se sert de la condition aux limites (4.6) pour déterminer les A_n et les B_n :

$$u(R_1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_1^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi),$$

$$u^*(R_1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R_1^{n+1}} P_n(\cos \varphi) = f(\varphi).$$

Mais, avant de passer au développement de $f(\varphi)$ en série de FOURIER–LEGENDRE selon les polynômes de LEGENDRE $P_n(\cos \varphi)$, qui forment une famille orthogonale avec le poids $\sin \varphi$ sur $[0, \pi]$, comme on verra à la section suivante, on présente des exemples simples où $f(\varphi)$ s'exprime immédiatement en série de FOURIER–LEGENDRE.

EXEMPLE 4.1. Soit une sphère de rayon R et de potentiel $f(\varphi)$. Trouver les potentiels $u(r, \varphi)$ et $u^*(r, \varphi)$ dans les 3 cas suivants :

- (a) $R = 3, f(\varphi) = 1$;
- (b) $R = 5, f(\varphi) = \cos \varphi$;
- (c) $R = 7, f(\varphi) = \cos^2 \varphi$.

RÉSOLUTION. (a) $R = 3, f(\varphi) = 1$. Pour la solution intérieure :

$$u(3, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 3^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = 1 = 1 \times P_0(\cos \varphi);$$

donc

$$A_0 3^0 = 1 \implies A_0 = 1, \quad A_n 3^n = 0 \implies A_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et

$$u(r, \varphi) = 1 \times P_0(\cos \varphi) = 1.$$

Pour la solution extérieure :

$$u^*(3, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{3^{n+1}} P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = 1 = 1 \times P_0(\cos \varphi);$$

donc

$$\frac{B_0}{3} = 1 \implies B_0 = 3 \quad \frac{B_n}{3^{n+1}} = 0 \implies B_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et

$$u^*(r, \varphi) = \frac{3}{r}.$$

(b) $R = 5$, $f(\varphi) = \cos \varphi$. Pour la solution intérieure :

$$u(5, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n 5^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = \cos \varphi = 1 \times P_1(\cos \varphi);$$

donc

$$A_0 5^0 = 0, \quad A_1 5^1 = 1, \quad A_n 5^n = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

et

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{5} r^1 P_1(\cos \varphi) = \frac{r}{5} \cos \varphi.$$

Pour la solution extérieure :

$$u^*(5, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{5^{n+1}} P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = \cos \varphi = 1 \times P_1(\cos \varphi);$$

donc

$$\frac{B_0^*}{5} = 0, \quad \frac{B_1^*}{5^2} = 1, \quad \frac{B_n^*}{5^{n+1}} = 0, \quad n = 2, 3, \dots,$$

et

$$u^*(r, \varphi) = \frac{5^2}{r^2} P_1(\cos \varphi) = \frac{5^2}{r^2} \cos \varphi.$$

(c) $R = 7$, $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$. On exprime d'abord z^2 au moyen des polynômes de LEGENDRE :

$$P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1) \implies z^2 = \frac{2}{3} P_2(z) + \frac{1}{3} P_0(z).$$

Pour la solution intérieure :

$$\begin{aligned} u(7, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n 7^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} P_2(\cos \varphi). \end{aligned}$$

donc

$$A_0 7^0 = \frac{1}{3} \implies A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 7 = 0 \implies A_1 = 0,$$

$$A_2 7^2 = \frac{2}{3} \implies A_2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7^2}, \quad A_n 7^n = 0, \quad n = 3, 4, \dots,$$

et

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} \times \frac{r^2}{7^2} P_2(\cos \varphi) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{r^2}{7^2} \times \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{r^2}{7^2} + \frac{r^2}{7^2} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

On vérifie :

$$u(7, \varphi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{7^2}{7^2} + \frac{7^2}{7^2} \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi = f(\varphi).$$

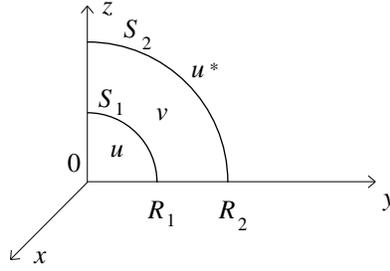


FIG. 4.2. Deux sphères S_1 et S_2 de rayon R_1 et R_2 et les potentiels u , v et u^* .

Pour la solution extérieure :

$$\begin{aligned} u^*(7, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{7^{n+1}} P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) = \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} P_2(\cos \varphi); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{B_0}{7} = \frac{1}{3} \implies B_0 = \frac{1}{3} \times 7, \quad \frac{B_1}{7^2} = 0 \implies B_1 = 0,$$

$$\frac{B_2}{7^3} = \frac{2}{3} \implies B_2 = \frac{2}{3} \times 7^3, \quad \frac{B_n}{7^{n+1}} = 0 \implies B_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots,$$

et

$$\begin{aligned} u^*(r, \varphi) &= \frac{1}{3} \times \frac{7}{r} + \frac{2}{3} \times \frac{7^3}{r^3} P_2(\cos \varphi) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{7}{r} + \frac{2}{3} \times \frac{7^3}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1). \end{aligned}$$

On vérifie la réponse obtenue :

$$\begin{aligned} u^*(7, \varphi) &= \frac{1}{3} \times \frac{7}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{7^3}{7^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cos^2 \varphi = f(\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

4.2. Le potentiel pour deux sphères concentriques

Considérons les sphères concentriques S_1 et S_2 de rayon, respectivement, R_1 et R_2 , $0 < R_1 < R_2$. Soient u le potentiel dans S_1 , v le potentiel entre S_1 et S_2 et u^* le potentiel hors S_2 (V. figure 4.2), qui satisfont les conditions aux limites

$$(4.17) \quad u(R_1, \varphi) = v(R_1, \varphi) = f(\varphi)$$

et

$$(4.18) \quad v(R_2, \varphi) = u^*(R_2, \varphi) = g(\varphi).$$

Le problème consiste à déterminer les potentiels :

$$\begin{aligned} u(r, \varphi), & \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ v(r, \varphi), & \quad R_1 \leq r \leq R_2, \\ u^*(r, \varphi), & \quad r \geq R_2. \end{aligned}$$

RÉSOLUTION. Le potentiel satisfait l'équation de LAPLACE aux points qui ne sont pas sur l'une ou l'autre sphère :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(r, \varphi) &= 0, & r < R_1, \\ \nabla^2 u^*(r, \varphi) &= 0, & r > R_2, \\ \nabla^2 v(r, \varphi) &= 0, & R_1 < r < R_2. \end{aligned}$$

4.2.1. Le potentiel à l'intérieur de la petite sphère. Puisque le potentiel $g(\varphi)$ sur S_2 n'influence pas le potentiel u et que u est bornée, en particulier $u(0, \varphi)$ à l'origine, alors, par (4.15),

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \varphi)$$

et, par (4.17),

$$(4.19) \quad u(R_1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_1^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi).$$

Employons la relation d'orthogonalité (V. le théorème 8.4) :

$$(4.20) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n, \end{cases}$$

qui, après le changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, & dx &= -\sin \varphi d\varphi, \\ x = -1 &\implies \varphi = \pi, & x = 1 &\implies \varphi = 0, \end{aligned}$$

devient :

$$(4.21) \quad \int_0^\pi P_m(\cos \varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(\varphi) P_{m_0}(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_1^n \int_0^\pi P_n(\cos \varphi) P_{m_0}(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &= A_{m_0} R_1^{m_0} \frac{2}{2m_0 + 1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$(4.22) \quad A_n R_1^n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

d'où A_n .

4.2.2. Le potentiel à l'extérieur de la grande sphère. Puisque le potentiel $f(\varphi)$ sur S_1 n'influence pas le potentiel u^* et que $u^* \rightarrow 0$ avec $r \rightarrow \infty$, alors, par (4.16),

$$u^*(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi)$$

et, par (4.18),

$$(4.23) \quad u^*(R_2, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R_2^{n+1}} P_n(\cos \varphi) = g(\varphi).$$

Donc, comme au paragraphe 4.2.1 :

$$(4.24) \quad \frac{B_n}{R_2^{n+1}} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi g(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

d'où B_n .

4.2.3. Le potentiel entre les deux sphères. Puisque les potentiels $f(\varphi)$ et $g(\varphi)$ influencent v et que $0 < R_1 < r < R_2 < \infty$,

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi).$$

Or, par (4.17),

$$v(R_1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R_1^n + \frac{b_n}{R_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi) = f(\varphi);$$

donc, par (4.19)

$$(4.25) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R_1^n + \frac{b_n}{R_1^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_1^n P_n(\cos \varphi).$$

De même, par (4.18),

$$v(R_2, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R_2^n + \frac{b_n}{R_2^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi) = g(\varphi);$$

donc, par (4.23),

$$(4.26) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n R_2^n + \frac{b_n}{R_2^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{R_2^{n+1}} P_n(\cos \varphi).$$

Puisque les $P_n(\cos \varphi)$ sont orthogonaux sur $[0, \pi]$ avec le poids $\sin \varphi$, et par conséquent, indépendants, on peut identifier les coefficients dans (4.25) et (4.26). On obtient alors le système linéaire :

$$\begin{aligned} a_n R_1^n + \frac{b_n}{R_1^{n+1}} &= A_n R_1^n, \\ a_n R_2^n + \frac{b_n}{R_2^{n+1}} &= \frac{B_n}{R_2^{n+1}}, \end{aligned}$$

pour $n = 0, 1, 2, \dots$. Puisque $R_2 > R_1$, le déterminant de la matrice du système

$$\begin{bmatrix} R_1^n & \frac{1}{R_1^{n+1}} \\ R_2^n & \frac{1}{R_2^{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n R_1^n \\ \frac{B_n}{R_2^{n+1}} \end{bmatrix}$$

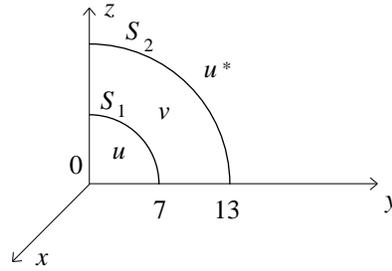


FIG. 4.3. Deux sphères S_1 et S_2 de rayon 7 et 13 et les potentiels u , v et u^* .

est non nul :

$$\frac{R_1^n}{R_2^{n+1}} - \frac{R_2^n}{R_1^{n+1}} = \frac{R_1^{n+2} - R_2^{n+2}}{R_1^{n+1} R_2^{n+1}} \neq 0;$$

alors la solution (a_n, b_n) est unique. □

REMARQUE 4.1. En général,

$$v(r, \varphi) \neq u(r, \varphi) + u^*(r, \varphi)$$

parce que

$$\begin{aligned} u(R_1, \varphi) + u^*(R_1, \varphi) &= f(\varphi) + u^*(R_1, \varphi) \neq f(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) + u^*(R_2, \varphi) &= u(R_2, \varphi) + g(\varphi) \neq g(\varphi). \end{aligned}$$

EXEMPLE 4.2. Trouver (en volts) les potentiels u dans la petite sphère S_1 , u^* à l'extérieur de la grande sphère S_2 et v entre les deux sphères (V. figure 4.3), pour

$$\begin{aligned} R_1 &= 7 \text{ m}, & R_2 &= 13 \text{ m}, \\ f(\varphi) &= \cos 2\varphi \text{ V sur } S_1, & g(\varphi) &= 5 \text{ V sur } S_2. \end{aligned}$$

RÉSOLUTION. (i) Dans S_1 . — On rappelle les identités :

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ &= 2 \cos^2 \varphi - 1 \end{aligned}$$

et

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \implies x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x).$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi &= \frac{4}{3}P_2(\cos \varphi) + \frac{2}{3}P_0(\cos \varphi) - P_0(\cos \varphi) \\ &= -\frac{1}{3}P_0(\cos \varphi) + \frac{4}{3}P_2(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u(7, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n 7^n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi) \\ &= -\frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{4}{3} P_2(\cos \varphi). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients :

$$\begin{aligned} A_0 7^0 &= -\frac{1}{3} \implies A_0 = -\frac{1}{3}, \\ A_2 7^2 &= \frac{4}{3} \implies A_2 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{7^2}, \end{aligned}$$

et

$$A_n = 0, \quad n = 1, 3, 4, 5, \dots,$$

on obtient

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= -\frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{4}{3} \times \frac{r^2}{7^2} P_2(\cos \varphi) \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{r^2}{7^2} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1). \end{aligned}$$

(ii) À l'extérieur de S_2 . —

$$u^*(r, \varphi) = \frac{5 \times 13}{r},$$

puisque, comme à l'exemple 4.1(a),

$$\frac{B_0}{13} = 5, \quad \text{ou} \quad B_0 = 5 \times 13.$$

(iii) Entre S_1 et S_2 . —

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi).$$

Pour $n = 0$:

$$\begin{bmatrix} 7^0 & \frac{1}{7^1} \\ 13^0 & \frac{1}{13^1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 5 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} A_0 7^0 \\ \frac{B_0}{13^1} \end{bmatrix} \right).$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 7^2 & \frac{1}{7^3} \\ 13^2 & \frac{1}{13^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} A_2 7^2 \\ \frac{B_2}{13^3} \end{bmatrix} \right).$$

Enfin, pour $n \neq 0, n \neq 2$:

$$\begin{bmatrix} 7^n & \frac{1}{7^{n+1}} \\ 13^n & \frac{1}{13^{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} a_0 &= 11.2222, & a_2 &= -0.0013, \\ b_0 &= -80.8889, & b_2 &= 479.0166, \end{aligned}$$

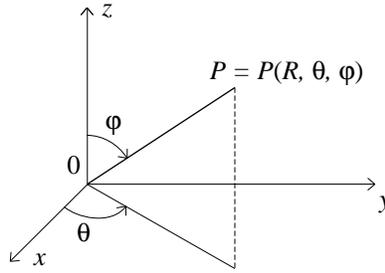


FIG. 4.4. Un point P en coordonnées sphériques sur une sphère de rayon R .

et

$$v(r, \varphi) = 11.2222 - \frac{80.8889}{r} + \left(-0.0013r^2 + \frac{479.0166}{r^3} \right) \frac{1}{2}(3 \cos^2 \varphi - 1). \quad \square$$

Puisque les problèmes de température stationnaire satisfont les mêmes équations que les problèmes de potentiel, on les résout de la même façon.

4.3. La température $u(\varphi, t)$ d'une sphère mince

On résout un problème de chaleur sur une surface dans l'espace. Ce problème fait intervenir les polynômes de LEGENDRE.

EXEMPLE 4.3. Trouver la température $u(\theta, \varphi, t; R)$ d'une sphère mince de rayon R (V. figure 4.4), isolée à l'intérieur et à l'extérieur et de température initiale

$$u(\theta, \varphi, 0; R) = f(\varphi).$$

RÉSOLUTION. Puisque f est indépendante de θ , on suppose que la solution

$$u = u(\varphi, t; R)$$

est aussi indépendante de θ .

On exprime l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 \nabla^2 u \\ &= \frac{c^2}{R^2 \sin \varphi} (u_\varphi \sin \varphi)_\varphi. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$u = F(\varphi)G(t)$$

dans cette équation, on obtient deux équations différentielles :

$$\frac{R^2 \dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{1}{\sin \varphi F(\varphi)} [F'(\varphi) \sin \varphi]_\varphi = -k^2.$$

La solution de l'équation en t est

$$G(t; R) = e^{-\lambda^2 t}, \quad \lambda = \frac{ck}{R}.$$

Si dans l'équation en φ ,

$$\frac{1}{\sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left[\sin \varphi \frac{dF}{d\varphi} \right] + k^2 F(\varphi) = 0,$$

on transforme la variable indépendante :

$$w = \cos \varphi, \quad \frac{d}{d\varphi} = \frac{dw}{d\varphi} \frac{d}{dw} = -\sin \varphi \frac{d}{dw},$$

on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dw} \left[-\sin^2 \varphi \frac{dF}{dw} \right] + k^2 F &= 0, \\ \frac{d}{dw} \left[(1-w^2) \frac{dF}{dw} \right] + n(n+1)F &= 0, \quad k^2 = n(n+1), \\ (1-w^2) \frac{d^2 F}{dw^2} - 2w \frac{dF}{dw} + n(n+1)F &= 0, \end{aligned}$$

qui est l'équation de LEGENDRE. Cette équation admet des solutions bornées sur $[-1, 1]$ si et seulement si $n = 0, 1, 2, \dots$, (V. le corollaire 8.1 et la remarque 8.1).
Donc

$$F_n(w) = P_n(w) = P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On a les valeurs propres :

$$\lambda_n = \frac{c}{R} \sqrt{n(n+1)},$$

et les fonctions propres :

$$u_n(\varphi, t; R) = P_n(\cos \varphi) e^{-\lambda_n^2 t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Finalement, on obtient la solution par superposition des fonctions propres :

$$u(\varphi, t; R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \varphi) e^{-\lambda_n^2 t}.$$

On détermine les a_n au moyen d'un développement de la condition initiale :

$$u(\varphi, 0; R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \varphi) = f(\varphi)$$

en série de FOURIER-LEGENDRE. Alors les coefficients sont :

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi. \quad \square$$

Exercices pour le chapitre 4

Trouver les potentiels (en volts) intérieur et extérieur, $u(r, \varphi)$ et $u^*(r, \varphi)$, pour les sphères de rayon et de potentiel respectifs suivants.

4.1. $R = 0.5$ m, $f(\varphi) = \sin^2 \varphi$ V.

4.2. $R = 2.0$ m, $f(\varphi) = 10 \cos^3 \varphi - 3 \cos^2 \varphi - 5 \cos \varphi - 1$ V.

4.3. $R = 1.7$ m, $f(\varphi) = \cos 3\varphi$ V.

4.4. Soient deux sphères concentriques S_1 et S_2 de rayon :

$$R_1 = 3 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 5 \text{ m},$$

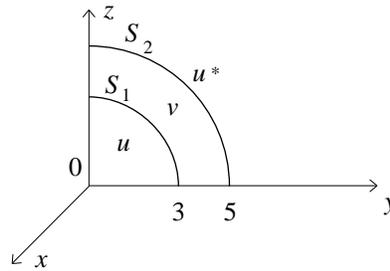


FIG. 4.5. Sphères S_1 et S_2 et températures u , v et u^* pour l'exercice 4 du chapitre 4.

et de température

$$f(\varphi) = (\cos \varphi)^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad g(\varphi) = (\cos^2 \varphi)^\circ\text{C}.$$

Trouver les températures stationnaires (V. figure 4.5)

$$u(r, \varphi), \quad u^*(r, \varphi) \quad \text{et} \quad v(r, \varphi),$$

à l'intérieur de S_1 , à l'extérieur de S_2 et entre les deux sphères.

4.5. Soient S_1 et S_2 deux sphères concentriques de rayon $R_1 = 3$ m et $R_2 = 4$ m et de potentiel respectif (en volts) :

$$f(\varphi) = 1 + \cos \varphi \text{ V} \quad \text{et} \quad g(\varphi) = \sin^2 \varphi \text{ V}.$$

Trouver les potentiels

$$\begin{aligned} u(r, \varphi), & \quad 0 < r < 3 \quad \text{à l'intérieur de } S_1, \\ u^*(r, \varphi), & \quad 4 < r < \infty \quad \text{à l'extérieur de } S_2, \\ v(r, \varphi), & \quad 3 < r < 4 \quad \text{entre } S_1 \text{ et } S_2. \end{aligned}$$

4.6. Trouver la température $u(\varphi, t; R)$ d'une sphère mince de rayon $R = 5$ isolée à l'intérieur et à l'extérieur et de température initiale

$$u(\varphi, 0; 5) = \cos^3 \varphi.$$

Prendre $c = 3$.

Approximation en norme quadratique

5.1. Développement de Fourier généralisé

Tout d'abord on rappelle la notation 1.1 et la définition 1.1.

DÉFINITION 5.1. Soit $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, une suite de fonctions définies sur $[a, b]$ et orthogonales relativement au produit scalaire

$$(5.1) \quad (\varphi_m, \varphi_n) = \int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x) dx = \begin{cases} \|\varphi_m\|^2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

On note

$$(5.2) \quad \|\varphi_n\| = (\varphi_n, \varphi_n)^{1/2}$$

la norme $L^2[a, b]$ de $\varphi(x)$. On associe à une fonction f définie sur $[a, b]$ la série de FOURIER généralisée

$$(5.3) \quad f(x) \sim \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x),$$

où

$$(5.4) \quad c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_n(x) dx.$$

Si la série (5.3) converge dans la norme $L^2[a, b]$:

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right)^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{si } N \rightarrow \infty,$$

on remplace le signe \sim par le signe $=$.

5.2. Approximation en norme quadratique

On veut maintenant approcher une fonction $f(x)$ en norme quadratique sur $[a, b]$ par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales :

$$g(x) = a_1\varphi_1(x) + \dots + a_N\varphi_N(x),$$

qui minimise la forme quadratique :

$$(5.5) \quad E(a_1, \dots, a_N) = \int_a^b [g(x) - f(x)]^2 dx.$$

On cherche donc le minimum sur a_1, a_2, \dots, a_N :

$$(5.6) \quad \min_{a_1, \dots, a_N} E(a_1, \dots, a_N) = \min_{a_1, \dots, a_N} \int_a^b [g(x) - f(x)]^2 dx.$$

THÉORÈME 5.1. *L'approximation en norme quadratique de $f(x)$ sur $[a, b]$ par la fonction*

$$g(x) = a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_N\varphi_N(x)$$

est la série de FOURIER généralisée de f tronquée après le N^e terme :

$$g(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_N\varphi_N(x),$$

où les c_k sont les coefficients de FOURIER généralisés de $f(x)$ donnés par (5.4).

DÉMONSTRATION. Puisque E est une forme quadratique, son minimum existe et est unique. Au minimum, la dérivée par rapport à a_k , $k = 1, \dots, N$, est nulle :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial E}{\partial a_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial a_k} \int_a^b [a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots + a_N\varphi_N(x) - f(x)]^2 dx \\ &= 2 \int_a^b [a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x) + \cdots + a_N\varphi_N(x) - f(x)]\varphi_k(x) dx. \end{aligned}$$

Par (5.1), on a

$$\int_a^b a_k\varphi_k(x)\varphi_k(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi_k(x) dx.$$

Donc

$$a_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x)\varphi_k(x) dx$$

est le k^e coefficient du développement de FOURIER généralisé de f selon les $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ \square

EXEMPLE 5.1. Approcher une fonction $f(x)$ quelconque sur $[-1, 1]$ par

$$g(x) = a_0P_0(x) + \cdots + a_7P_7(x).$$

RÉSOLUTION. Les polynômes de LEGENDRE, $P_0(x), P_1(x), \dots$ satisfont sur $[-1, 1]$ les relations d'orthogonalité :

$$(P_m, P_n) = \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} \|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Pour approcher $f(x)$ en norme quadratique sur $[-1, 1]$ par

$$g(x) = a_0P_0(x) + \cdots + a_7P_7(x),$$

c'est-à-dire calculer :

$$\min_{a_0, \dots, a_7} \int_{-1}^1 [g(x) - f(x)]^2 dx,$$

il suffit de développer $f(x)$ en une série de FOURIER-LEGENDRE,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x), \quad c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x) dx,$$

et de prendre les 8 premiers termes,

$$a_k = c_k, \quad k = 0, \dots, 7. \quad \square$$

EXEMPLE 5.2. Calculer les trois premiers termes du développement de FOURIER-LEGENDRE de la fonction

$$f(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

RÉSOLUTION. Pour utiliser l'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE on transforme le domaine de $f(x)$ de $[0, 1]$ à $[-1, 1]$ au moyen de la substitution

$$s = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}.$$

Alors,

$$f(x) = e^x = e^{(1+s)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(s), \quad -1 \leq s \leq 1,$$

où

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 e^{(1+s)/2} P_m(s) dx.$$

On calcule d'abord trois intégrales par récurrence :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-1}^1 e^{s/2} ds = 2 \left(e^{1/2} - e^{-1/2} \right), \\ I_1 &= \int_{-1}^1 s e^{s/2} ds = 2s e^{s/2} \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 e^{s/2} ds \\ &= 2 \left(e^{1/2} + e^{-1/2} \right) - 2I_0 \\ &= -2e^{1/2} + 6e^{-1/2}, \\ I_2 &= \int_{-1}^1 s^2 e^{s/2} ds = 2s^2 e^{s/2} \Big|_{-1}^1 - 4 \int_{-1}^1 s e^{s/2} ds \\ &= 2 \left(e^{1/2} + e^{-1/2} \right) - 4I_1 \\ &= 10e^{1/2} - 26e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} e^{1/2} I_0 = e - 1 \approx 1.7183, \\ a_1 &= \frac{3}{2} e^{1/2} I_1 = -3e + 9 \approx 0.8452, \\ a_2 &= \frac{5}{2} e^{1/2} \frac{1}{2} (3I_2 - I_0) = 35e - 95 \approx 0.1399. \end{aligned}$$

On a donc l'approximation

$$f(x) \approx 1.7183P_0(2x-1) + 0.8452P_1(2x-1) + 0.1399P_2(2x-1). \quad \square$$

EXEMPLE 5.3. Approcher le polynôme $f(x) = 2 + 3x + 4x^2 + 3x^3$ en norme quadratique sur $[-1, 1]$ par $p(x) = a + bx + cx^2$.

RÉSOLUTION. Pour un polynôme, on obtient facilement, et sans intégration, l'approximation en exprimant les puissances de x au moyen des polynômes de

LEGENDRE, qui sont orthogonaux sur $[-1, 1]$,

$$\begin{aligned} P_0(x) = 1 &\Rightarrow 1 = P_0(x), \\ P_1(x) = x &\Rightarrow x = P_1(x), \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) &\Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) &\Rightarrow x^3 = \frac{3}{5}P_1(x) + \frac{2}{5}P_3(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (5.7) \quad f(x) &= 2P_0(x) + 3P_1(x) + \frac{4}{3}P_0(x) + \frac{8}{3}P_2(x) + \frac{9}{5}P_1(x) + \frac{6}{5}P_3(x) \\ &= \left(2 + \frac{4}{3}\right)P_0(x) + \left(3 + \frac{9}{5}\right)P_1(x) + \frac{8}{3}P_2(x) + \frac{6}{5}P_3(x). \end{aligned}$$

Par le théorème 5.1, on tronque le développement de $f(x)$ après le terme en $P_2(x)$ puisque la base $\{1, x, x^2\}$ est équivalente à la base $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x)\}$. Donc

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{10}{3}P_0(x) + \frac{24}{5}P_1(x) + \frac{8}{3}P_2(x) \\ &= \frac{10}{3} + \frac{24}{5}x + \frac{8}{3} \times \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &= 2 + \frac{24}{5}x + 4x^2. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 5.1. Voici une seconde façon, plus longue, de résoudre l'exemple précédent. On développe $p(x)$ selon les polynômes de LEGENDRE

$$\begin{aligned} p(x) &= aP_0(x) + bP_1(x) + \frac{c}{3}P_0(x) + \frac{2c}{3}P_2(x) \\ &= \left(a + \frac{c}{3}\right)P_0(x) + bP_1(x) + \frac{2c}{3}P_2(x), \end{aligned}$$

et l'on indentifie les coefficients de ce développement avec ceux du développement de $f(x)$ en (5.7). Alors on obtient le système linéaire suivant, qu'on résout de bas en haut :

$$\begin{aligned} a + \frac{c}{3} &= 2 + \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{10}{3} - \frac{c}{3} = \frac{10 - c}{3} = 2, \\ b &= 3 + \frac{9}{5} \Rightarrow b = \frac{24}{5}, \\ \frac{2c}{3} &= \frac{8}{3} \Rightarrow c = 4. \end{aligned}$$

On obtient de nouveau le développement tronqué de $f(x)$.

EXEMPLE 5.4. Soit f une fonction $2L$ -périodique ($f(x + 2L) = f(x)$ pour tout x). Approcher f sur $[-L, L]$ en norme quadratique au moyen de la série de FOURIER partielle :

$$g(x) = a_0 \times 1 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right).$$

RÉSOLUTION. Par (1.14–1.16), les fonctions

$$1, \cos \frac{n\pi}{L}x, \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

sont orthogonales de normes au carré :

$$(1, 1) = \int_{-L}^L 1^2 dx = \|1\|^2 = 2L,$$

et

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi}{L} x dx = L, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = L, \quad n = 1, 2, \dots$$

Alors, par le théorème 5.1,

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

et $g(x)$ est le développement de FOURIER de $f(x)$ tronqué à $n = N$. \square

REMARQUE 5.2. L'espace $L^2[a, b]$ est l'ensemble des fonctions $f(x)$ de carré sommable (au sens de LEBESGUE) sur $[a, b]$, c'est-à-dire de norme $L^2[a, b]$ finie. Cette norme est définie par la formule (5.2). Une famille de fonctions $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ définie sur $[a, b]$ est *complète* dans $L^2[a, b]$ si, pour tout $f \in L^2[a, b]$, le produit scalaire nul, $(f, \varphi_n) = 0$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, implique que $f = 0$ sur $[a, b]$. Si $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ est une famille orthogonale complète de fonctions de $L^2[a, b]$, alors, pour tout $f \in L^2[a, b]$,

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n(x) \right)^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{avec } N \rightarrow \infty,$$

où les coefficients c_n sont définis par la formule (5.4). On peut montrer que la famille de fonctions

$$\left\{ 1, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

est complète dans $L^2[-L, L]$.

5.3. Une application : la quadrature gaussienne

On obtient facilement la formule de la quadrature gaussienne à n points au moyen des polynômes de LEGENDRE. On considère $n = 2$ et $n = 3$.

EXEMPLE 5.5. Déterminer les 4 paramètres de la quadrature gaussienne à 2 points :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(x_1) + bf(x_2).$$

RÉSOLUTION. Par symétrie, on prévoit que les nœuds sont opposés, $x_1 = -x_2$, et les poids sont égaux, $a = b$. Puisqu'on a 4 paramètres, la formule est exacte pour les polynômes de degré 3 et, par l'exemple 5.3, il suffit de considérer les polynômes $P_0(x), \dots, P_3(x)$. Comme $P_0(x) = 1$ est orthogonal à $P_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, on a

$$(5.8) \quad 2 = \int_{-1}^1 P_0(x) dx = aP_0(x_1) + bP_0(x_2) = a + b,$$

$$(5.9) \quad 0 = \int_{-1}^1 1 \times P_1(x) dx = aP_1(x_1) + bP_1(x_2) = ax_1 + bx_2,$$

$$(5.10) \quad 0 = \int_{-1}^1 1 \times P_2(x) dx = aP_2(x_1) + bP_2(x_2),$$

$$(5.11) \quad 0 = \int_{-1}^1 1 \times P_3(x) dx = aP_3(x_1) + bP_3(x_2),$$

Pour satisfaire (5.10) on choisit x_1 et x_2 tels que

$$P_2(x_1) = P_2(x_2) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0 \Rightarrow -x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\,350\,27.$$

Alors, par (5.9)

$$a = b.$$

De plus, (5.11) est automatiquement satisfaite car $P_3(x)$ est impair. Enfin, par (5.8),

$$a = b = 1.$$

On a donc la formule de GAUSS à deux points :

$$(5.12) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad \square$$

EXEMPLE 5.6. Déterminer les 6 paramètres de la quadrature gaussienne à 3 points :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(x_1) + bf(x_2) + cf(x_3).$$

RÉSOLUTION. Par symétrie, on prévoit que les nœuds extrêmes sont opposés, $x_1 = -x_3$, et $x_2 = 0$, les poids extrêmes sont égaux, $a = c$, et le poids central dépasse les deux autres, $b > a = c$. Puisqu'on a 6 paramètres, la formule est exacte pour les polynômes de degré 5 et, par l'exemple 5.3, il suffit de considérer

la base $P_0(x), \dots, P_5(x)$:

$$(5.13) \quad 2 = \int_{-1}^1 P_0(x) dx = aP_0(x_1) + bP_0(x_2) + cP_0(x_3),$$

$$(5.14) \quad 0 = \int_{-1}^1 P_1(x) dx = aP_1(x_1) + bP_1(x_2) + cP_1(x_3),$$

$$(5.15) \quad 0 = \int_{-1}^1 P_2(x) dx = aP_2(x_1) + bP_2(x_2) + cP_2(x_3),$$

$$(5.16) \quad 0 = \int_{-1}^1 P_3(x) dx = aP_3(x_1) + bP_3(x_2) + cP_3(x_3),$$

$$(5.17) \quad 0 = \int_{-1}^1 P_4(x) dx = aP_4(x_1) + bP_4(x_2) + cP_4(x_3),$$

$$(5.18) \quad 0 = \int_{-1}^1 P_5(x) dx = aP_5(x_1) + bP_5(x_2) + cP_5(x_3).$$

Pour satisfaire (5.16), prenons pour x_1, x_2, x_3 les 3 zéros de

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}x(5x^2 - 3),$$

c'est-à-dire

$$-x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.774\,596\,7, \quad x_2 = 0.$$

Alors (5.14) implique

$$-\sqrt{\frac{3}{5}}a + \sqrt{\frac{3}{5}}c = 0 \Rightarrow a = c;$$

donc (5.18) est satisfaite puisque $P_5(x)$ est impair. De plus, par la substitution $a = c$ dans (5.15), on obtient

$$a \frac{1}{2} \left(3 \times \frac{3}{5} - 1 \right) + b \left(-\frac{1}{2} \right) + a \frac{1}{2} \left(3 \times \frac{3}{5} - 1 \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(5.19) \quad 4a - 5b + 4a = 0 \quad \text{ou} \quad 8a - 5b = 0.$$

Maintenant, de (5.13) on déduit

$$(5.20) \quad 2a + b = 2 \quad \text{ou} \quad 10a + 5b = 10.$$

Si l'on additionne la seconde expression de (5.19) et de (5.20), on obtient

$$a = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0.555;$$

alors

$$b = 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9} = 0.888.$$

Enfin, on vérifie que (5.17) est satisfaite. Puisque

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

on a

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{5 \times 1}{9 \times 8} \left(35 \times \frac{9}{25} - 30 \times \frac{3}{5} + 3 \right) + \frac{8}{9} \times \frac{3}{8} &= \frac{2 \times 5}{9 \times 8} \left(\frac{315 - 450 + 75}{25} \right) + \frac{8}{9} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{2 \times 5}{9 \times 8} \times \frac{(-60)}{25} + \frac{8 \times 3}{9 \times 8} \\ &= \frac{-24 + 24}{9 \times 8} = 0. \end{aligned}$$

On a donc la formule de GAUSS à trois points :

$$(5.21) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \quad \square$$

REMARQUE 5.3. On a normalisé l'intervalle d'intégration des quadratures de GAUSS sur $[-1, 1]$. Pour intégrer sur $[a, b]$ on emploie le changement de variable déjà utilisée à l'exemple 1.10 :

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}, \quad dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) dt.$$

Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) dt.$$

EXEMPLE 5.7. Évaluer

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

par la formule de GAUSS à 2 points.

RÉSOLUTION. Posons

$$x = \frac{(\pi/2)t + \pi/2}{2}, \quad dx = \frac{\pi}{4} dt.$$

En $t = -1$, $x = 0$ et, en $t = 1$, $x = \pi/2$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi t + \pi}{4}\right) dt \\ &\approx \frac{\pi}{4} [1.0 \times \sin(0.10566\pi) + 1.0 \times \sin(0.39434\pi)] \\ &= 0.99847. \end{aligned}$$

L'erreur est 1.53×10^{-3} . □

REMARQUE 5.4. La quadrature gaussienne est la formule la plus précise pour un nombre de points donné. L'erreur pour la formule à n points est

$$E_n(f) = \frac{2}{(2n+1)!} \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1.$$

Cette formule à n points est donc exacte pour un polynôme de degré $2n - 1$.

Exercices pour le chapitre 5

5.1. Approcher $g(x) = 1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4$ en norme quadratique sur $[-1, 1]$ au moyen de

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

Calculer les trois premiers coefficients non nuls du développement de FOURIER-LEGENDRE de $f(x)$ sur $[-1, 1]$.

$$5.2. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$5.3. f(x) = e^x, \quad -1 < x < 1.$$

5.4. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

et

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

Trouver, au dix-millième près, les valeurs de a , b et c qui minimisent la forme quadratique

$$\int_{-1}^1 [p(x) - f(x)]^2 dx$$

De plus, tracer $f(x)$ et $p(x)$ sur le même graphique.

(Indication : Prendre les trois premiers termes du développement de $f(x)$ selon les polynômes de LEGENDRE.

5.5. Évaluer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^1 (5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1) dx,$$

par la formule de GAUSS à 3 points; calculer la valeur exacte de I et calculer l'erreur de la valeur approchée.

5.6. Évaluer :

$$I = \int_{0.2}^{1.5} e^{-x^2} dx,$$

par la formule de Gauss à 3 points.

5.7. Obtenir la formule de GAUSS à 4 points.

Problèmes en coordonnées polaires

6.1. Le problème des ondes

On considère une membrane circulaire vibrante de rayon R , bien tendue et fixée au bord. Le problème des ondes donne lieu à l'équation aux dérivées partielles (V. figure 6.1) :

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t > 0,$$

avec la condition au bord :

$$u(R, \theta, t) = 0,$$

et les conditions initiales :

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), \quad u_t(r, \theta, 0) = g(r, \theta),$$

auxquelles on ajoute l'hypothèse physique :

$$u(r, \theta, t) \text{ bornée, } \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0.$$

On emploie le laplacien en coordonnées polaires (1.2) (voir le lemme 1.1) :

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}.$$

6.1.1. Résolution par séparation des variables. On se restreint au cas simple suivant : on suppose que f et g sont fonctions de r seulement ; par conséquent il est raisonnable de supposer que la solution $u = u(r, t)$ n'est fonction que de r et de t . Alors $u_{\theta\theta} = 0$, et l'on a l'équation aux dérivées partielles :

$$(6.1) \quad u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right),$$

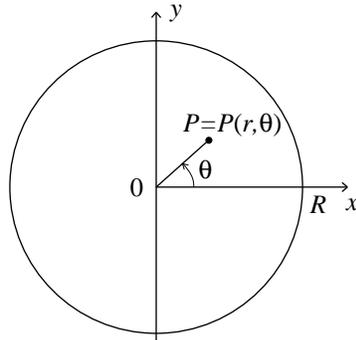


FIG. 6.1. Membrane circulaire de rayon R et un point P de coordonnées polaires (r, θ) .

avec la condition au bord :

$$(6.2) \quad u(R, t) = 0,$$

et les conditions initiales :

$$(6.3) \quad u(r, 0) = f(r),$$

$$(6.4) \quad u_t(r, 0) = g(r).$$

ÉTAPE 1. On résout (6.1) par séparation des variables (voir l'exemple 1.5).
On pose

$$u(r, t) = W(r)G(t)$$

dans (6.1) :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} = -k^2,$$

d'où

$$(6.5) \quad \ddot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad \lambda = ck,$$

et

$$(6.6) \quad W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + k^2 W(r) = 0.$$

ÉTAPE 2. On satisfait la condition au bord (6.2). On transforme la variable indépendante par la substitution :

$$s = kr, \quad \frac{1}{r} = \frac{k}{s}.$$

Alors

$$W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \frac{ds}{dr} = k \frac{dW}{ds}$$

et

$$W'' = k^2 \frac{d^2 W}{ds^2}.$$

Donc (6.6) devient

$$k^2 \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{k^2}{s} \frac{dW}{ds} + k^2 W = 0$$

et, en multipliant cette équation par s^2/k^2 , on a

$$s^2 \frac{d^2 W}{ds^2} + s \frac{dW}{ds} + s^2 W = 0.$$

C'est l'équation de BESSEL :

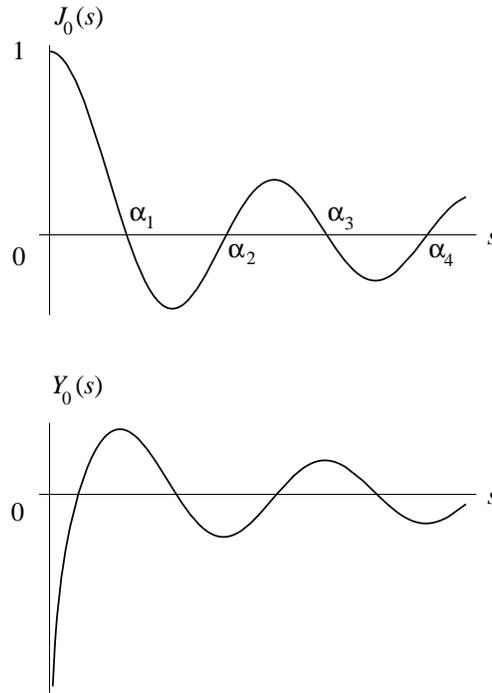
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

avec $\nu = 0$, dont la solution générale est (V. figure 6.2) :

$$W(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s),$$

où $J_0(s)$ et $Y_0(s)$ sont les fonctions de BESSEL d'ordre zéro respectivement de 1^{re} et de 2^e espèce. Par l'hypothèse physique, $u(r, t) = W(r)G(t)$ est bornée à l'origine, $r = 0$; donc $c_2 = 0$ et

$$(6.7) \quad W(r) = J_0(s) = J_0(kr) \quad (c_1 = 1).$$

FIG. 6.2. Les fonctions de BESSEL d'ordre zéro $J_0(s)$ et $Y_0(s)$.

La condition (6.2) implique :

$$W(R) = J_0(kR) = 0;$$

donc

$$k_m R = \alpha_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

où

$$\alpha_1 = 2.4048$$

$$\alpha_2 = 5.5201$$

$$\alpha_3 = 8.6537$$

$$\alpha_4 = 11.8$$

$$\alpha_5 = 14.9$$

etc., sont les zéros positifs de $J_0(x)$.

On obtient donc :

$$(6.8) \quad k_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$(6.9) \quad W_m(r) = J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right).$$

Comme

$$G_m(t) = a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t,$$

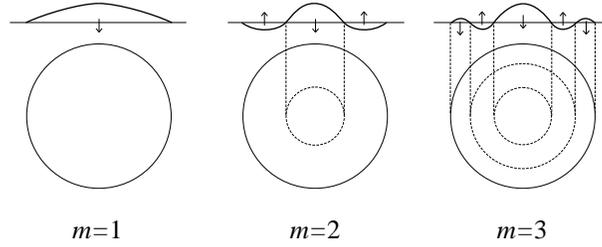


FIG. 6.3. Les lignes nodales des fonctions propres $u_m(r, t)$, $m = 1, 2, 3$.

on a les valeurs propres :

$$(6.10) \quad \lambda_m = ck_m = \frac{c\alpha_m}{R}$$

et les fonctions propres correspondantes :

$$(6.11) \quad u_m(r, t) = (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right).$$

Les zéros de $J_0(\alpha_m r/R)$ donnent lieu aux lignes nodales de la membrane vibrante circulaire (V. figure 6.3)

ÉTAPE 3. On superpose les fonctions propres pour satisfaire les conditions initiales (6.3) et (6.4) :

$$(6.12) \quad \begin{aligned} u(r, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right). \end{aligned}$$

On détermine les a_m en posant $t = 0$ dans (6.12) :

$$(6.13) \quad u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) = f(r).$$

On multiplie la dernière équation par

$$r J_0 \left(\frac{\alpha_{n_0}}{R} r \right)$$

et l'on intègre par rapport à r de 0 à R . Ainsi l'on obtient

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) J_0 \left(\frac{\alpha_{n_0}}{R} r \right) dr = \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_{n_0}}{R} r \right) dr.$$

Par les relations d'orthogonalité (V. le théorème 10.4) :

$$(6.14) \quad \int_0^R x J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} x \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} x \right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_n), & m = n, \end{cases}$$

le premier membre se réduit au seul terme

$$a_{n_0} \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_{n_0}).$$

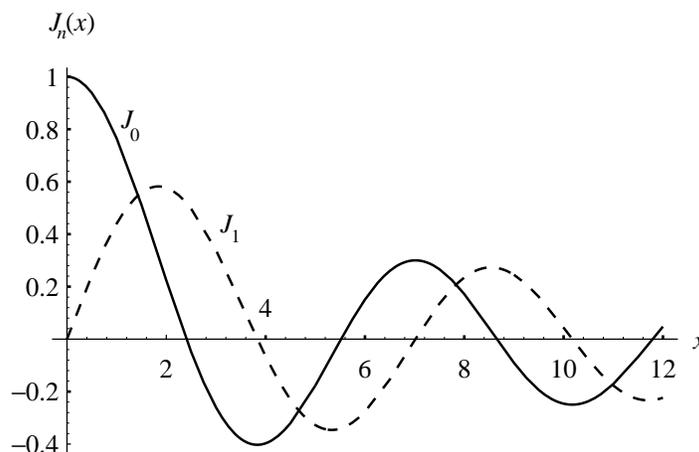


FIG. 6.4. Les fonctions de BESSEL $J_0(x)$ et $J_1(x)$ de première espèce d'ordre zéro et un (bornées à l'origine).

On a donc

$$(6.15) \quad a_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Enfin, on détermine les b_m . On dérive (6.12) par rapport à t :

$$u_t(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-\lambda_m a_m \sin \lambda_m t + \lambda_m b_m \cos \lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right),$$

et l'on évalue la dérivée en $t = 0$:

$$u_t(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m b_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) = g(r).$$

De nouveau par l'orthogonalité des $J_0(\alpha_m r/R)$,

$$b_m = \frac{2}{\lambda_m R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

et puisque

$$\lambda_m = \frac{c\alpha_m}{R},$$

on obtient

$$(6.16) \quad b_m = \frac{2}{c\alpha_m R J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r g(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right) dr. \quad \square$$

REMARQUE 6.1. Il est important de remarquer que

$$J_1(\alpha_m) \neq 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

(V. figure 6.4) puisque les zéros de $J_1(x)$ entrelacent ceux de $J_0(x)$. En effet, les solutions des problèmes de STURM-LIOUVILLE (voir le chapitre 11), donc en particulier les solutions de l'équation de BESSEL, admettent des zéros simples et ceux de la $(n+1)^{\text{e}}$ solution entrelacent ceux de la n^{e} solution.

EXEMPLE 6.1. Résoudre le problème de la membrane circulaire vibrante :

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0,$$

aux conditions au bord

$$u(R, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

et aux conditions initiales

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0.1 \times J_0 \left(\frac{\alpha_2}{R} r \right) = f(r), \\ u_t(r, 0) &= 0 = g(r). \end{aligned}$$

RÉSOLUTION. Puisque la condition initiale $f(r)$ est donnée sous forme de série de FOURIER-BESSEL, on a immédiatement

$$a_2 = 0.1$$

et

$$a_m = 0, \quad m = 1, 3, 4, 5, \dots$$

De plus, puisque $g(r) = 0$, il suit que

$$b_m = 0.$$

On a donc la solution :

$$u(r, t) = 0.1 \times \cos \left(\frac{c\alpha_2}{R} t \right) J_0 \left(\frac{\alpha_2}{R} r \right), \quad \alpha_2 = 5.5201. \quad \square$$

EXEMPLE 6.2. Considérons la membrane circulaire de rayon 5, fixée au bord, et de conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 25 - r^2, \quad 0 \leq r \leq 5, \\ u_t(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 5. \end{aligned}$$

Si $c = 3$, trouver $u(r, t)$.

RÉSOLUTION. Posons :

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \lambda_m t + b_m \sin \lambda_m t) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{5} r \right),$$

où

$$\lambda_m = \frac{c\alpha_m}{R} = \frac{3}{5}\alpha_m.$$

Comme $g(r) = 0$, les $b_m = 0$ par (6.16). On calcule maintenant les a_m . Par (6.15), on a :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{5^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^5 r (25 - r^2) J_0 \left(\frac{\alpha_m}{5} r \right) dr \\ &=: \frac{2}{5^2 J_1^2(\alpha_m)} I. \end{aligned}$$

Posons $s = \frac{\alpha_m}{5} r$; alors

$$r = \frac{5}{\alpha_m} s, \quad dr = \frac{5}{\alpha_m} ds,$$

et

$$\begin{aligned} r = 0 &\implies s = 0, \\ r = 5 &\implies s = \alpha_m. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 r (5^2 - r^2) J_0\left(\frac{\alpha_m}{5}r\right) dr \\ &= \int_0^{\alpha_m} \frac{5}{\alpha_m} s \left(5^2 - \frac{5^2}{\alpha_m^2} s^2\right) J_0(s) \frac{5}{\alpha_m} ds \\ &= \frac{5^4}{\alpha_m^4} \int_0^{\alpha_m} (\alpha_m^2 - s^2) s J_0(s) ds, \end{aligned}$$

qu'on intègre par parties, au moyen de l'identité (10.25) :

$$(6.17) \quad x^\nu J_{\nu-1}(x) = [x^\nu J_\nu(x)]'$$

avec $\nu = 1$. Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{5^4}{\alpha_m^4} \int_0^{\alpha_m} (\alpha_m^2 - s^2) [s J_1(s)]' ds \\ &= \frac{5^4}{\alpha_m^4} \left\{ [(\alpha_m^2 - s^2) s J_1(s)] \Big|_0^{\alpha_m} + 2 \int_0^{\alpha_m} s^2 J_1(s) ds \right\} \\ &= \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^4} \int_0^{\alpha_m} s^2 J_1(s) ds, \end{aligned}$$

et par (6.17) avec $\nu = 2$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^4} \int_0^{\alpha_m} [s^2 J_2(s)]' ds \\ &= \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^4} s^2 J_2(s) \Big|_0^{\alpha_m} \\ &= \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^4} \alpha_m^2 J_2(\alpha_m) = \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^2} J_2(\alpha_m). \end{aligned}$$

Maintenant, par l'identité (10.27) :

$$(6.18) \quad J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

avec $n = 1$, on a :

$$J_2(x) = \frac{2 \times 1}{x} J_1(x) - J_0(x).$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{5^4 \times 2}{\alpha_m^2} \left[\frac{2}{\alpha_m} J_1(\alpha_m) - J_0(\alpha_m) \right] \\ &= \frac{5^4 \times 4}{\alpha_m^3} J_1(\alpha_m), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{5^2 J_1^2(\alpha_m)} \frac{5^4 \times 4}{\alpha_m^3} J_1(\alpha_m) \\ &= \frac{5^2 \times 8}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)}. \end{aligned}$$

Donc la solution est

$$u(r, t) = 5^2 \times 8 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^3 J_1(\alpha_m)} \cos(\lambda_m t) J_0\left(\frac{\alpha_m r}{5}\right). \quad \square$$

6.1.2. Calculs simples sur les fonctions de Bessel.

EXEMPLE 6.3. Calculer la valeur de $J_3(7)$ au moyen de la table 2.

RÉSOLUTION. Par l'identité (6.18) avec $n = 2$:

$$J_3(x) = \frac{2 \times 2}{x} J_2(x) - J_1(x),$$

et de nouveau par (6.18) avec $n = 1$ pour J_2 :

$$\begin{aligned} J_3(x) &= \frac{2 \times 2}{x} \left[\frac{2 \times 1}{x} J_1(x) - J_0(x) \right] - J_1(x) \\ &= \left(\frac{8}{x^2} - 1 \right) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x), \end{aligned}$$

et, au moyen des tables (V. tableau 2)

$$\begin{aligned} J_3(7) &= \left(\frac{8}{49} - 1 \right) \times (-0.0047) - \frac{4}{7} \times 0.3001 \\ &= 0.1754. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 6.4. Évaluer :

$$I = \int_0^5 J_3(x) dx.$$

RÉSOLUTION. Par l'identité (10.28) :

$$(6.19) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$$

avec $\nu = 2$, on a

$$I = \int_0^5 [-2J'_2(x) + J_1(x)] dx = -2J_2(x)\Big|_0^5 + \int_0^5 J_1(x) dx.$$

Par l'identité (10.26) :

$$(6.20) \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

avec $\nu = 0$, on a

$$\int_0^5 J_1(x) dx = - \int_0^5 [x^{-0} J_0(x)]' dx = -J_0(x)\Big|_0^5.$$

Donc

$$I = -2[J_2(5) - J_2(0)] - [J_0(5) - J_0(0)],$$

et par (6.18) avec $n = 1$,

$$\begin{aligned} I &= -2 \left[\frac{2}{5} J_1(5) - J_0(5) \right] - J_0(5) + 1 \\ &= -\frac{4}{5} J_1(5) + J_0(5) + 1 \\ &= -\frac{4}{5}(-0.3276) - 0.1776 + 1 \\ &= 1.0845. \quad \square \end{aligned}$$

EXEMPLE 6.5. Évaluer :

$$I = \int_0^7 J_4(x) dx.$$

RÉSOLUTION. En utilisant la récurrence (6.19) pour $n = 3$, puis $n = 2$, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^7 [-2J_3'(x) + J_2(x)] dx \\ &= -2J_3(7) + \int_0^7 [J_0(x) - 2J_1'(x)] dx \\ &= -2J_3(7) - 2J_1'(7) + \int_0^7 J_0(x) dx. \end{aligned}$$

Par l'identité (6.18) avec $n = 2$, puis $n = 1$:

$$\begin{aligned} I &= -2 \times \frac{4}{7} \left[\frac{2}{7} J_1(7) - J_0(7) \right] + (2 - 2)J_1(7) + \int_0^7 J_0(x) dx \\ &= -\frac{16}{49} J_1(7) + \frac{8}{7} J_0(7) + \int_0^7 J_0(x) dx \\ &= -\frac{16}{49} \times (-0.0047) + \frac{8}{7} \times 0.3001 + 0.9546 \\ &= 1.2991, \end{aligned}$$

d'après les tables (V. tableau 2) et une intégration numérique de $J_0(x)$ (V. figure 13.3). \square

REMARQUE 6.2. On voit que si $m + n$ est pair, le calcul de l'intégrale définie

$$\int_a^b x^m J_n(x) dx$$

ne se réduit pas simplement aux valeurs de J_1 et J_0 en a et b ; on obtient aussi une intégrale de J_0 qu'il faut évaluer numériquement.

EXEMPLE 6.6. Développer

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

en série de FOURIER-BESSEL selon les $J_0(\alpha_n x)$, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ sont les zéros positifs de $J_0(x)$.

RÉSOLUTION. Posons

$$(6.21) \quad 1 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\alpha_m x).$$

On emploie la relation d'orthogonalité (6.14) (V. le théorème 10.4) :

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_n), & m = n. \end{cases}$$

Multiplions (6.21) par $x J_0(\alpha_n x)$ et intégrons de 0 à 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\alpha_n x) dx &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^1 x J_0(\alpha_m x) J_0(\alpha_n x) dx \\ &= \frac{a_n}{2} J_1^2(\alpha_n). \end{aligned}$$

Or, par la substitution $s = \alpha_n x$ et par (6.17) avec $\nu = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 x J_0(\alpha_n x) dx &= \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} s J_0(s) ds \\ &= \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} [s J_1(s)]' ds \\ &= \frac{1}{\alpha_n^2} s J_1(s) \Big|_0^{\alpha_n} \\ &= \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\alpha_n)} \frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{2}{\alpha_n J_1(\alpha_n)},$$

d'où

$$1 = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m J_1(\alpha_m)} J_0(\alpha_m x). \quad \square$$

EXEMPLE 6.7. Développer

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 1,$$

en série de FOURIER-BESSEL selon les $J_1(\beta_n x)$, où $\beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ sont les zéros strictement positifs de $J_1(x)$.

RÉSOLUTION. On remarque que $\beta_1 = 0$ et $J_1(0) = 0$ (V. figure 6.5). Posons :

$$x = \sum_{m=2}^{\infty} a_m J_1(\beta_m x).$$

Multiplions par $x J_1(\beta_n x)$ et intégrons de 0 à 1 :

$$\int_0^1 x^2 J_1(\beta_n x) dx = \sum_{m=2}^{\infty} a_m \int_0^1 x J_1(\beta_m x) J_1(\beta_n x) dx, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

De la relation d'orthogonalité (V. le théorème 10.4)

$$\int_0^R x J_1\left(\frac{\beta_m}{R} x\right) J_1\left(\frac{\beta_n}{R} x\right) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{R^2}{2} J_2^2(\beta_n), & m = n, \end{cases}$$

avec $R = 1$, on obtient

$$\frac{1^2}{2} J_2^2(\beta_n) a_n = \int_0^1 x^2 J_1(\beta_n x) dx;$$

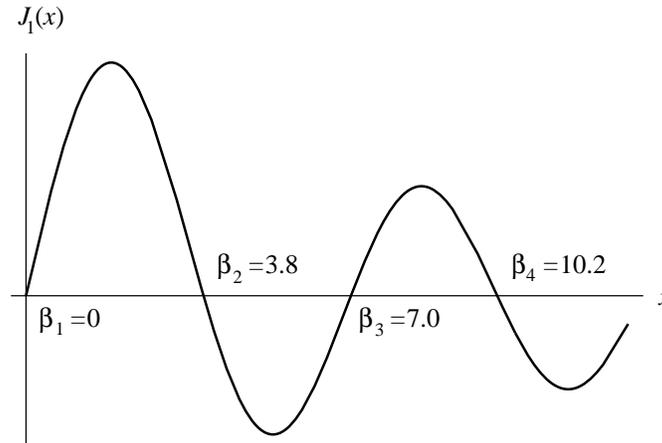


FIG. 6.5. Les zéros de la fonction de BESSEL $J_1(x)$ de première espèce d'ordre un (bornée à l'origine).

donc

$$a_n = \frac{2}{J_2^2(\beta_n)} \int_0^1 x^2 J_1(\beta_n x) dx.$$

Alors, avec $\beta_n x = s$ et $dx = ds/\beta_n$, on a

$$a_n = \frac{2}{\beta_n^3 J_2^2(\beta_n)} \int_0^{\beta_n} s^2 J_1(s) ds.$$

On remarque qu'on peut intégrer

$$\int s^p J_q(s) ds$$

si $p + q$ est impair, p et q des entiers. Donc, par (6.17) avec $\nu = 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta_n} s^2 J_1(s) ds &= \int_0^{\beta_n} [s^2 J_2(s)]' ds \\ &= s^2 J_2(s) \Big|_0^{\beta_n} \\ &= \beta_n^2 J_2(\beta_n) \end{aligned}$$

du fait que $J_2(0) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\beta_n^3 J_2^2(\beta_n)} \beta_n^2 J_2(\beta_n) \\ &= \frac{2}{\beta_n J_2(\beta_n)}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} x &= 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_n J_2(\beta_n)} J_1(\beta_n x) \\ &= -2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\beta_n J_0(\beta_n)} J_1(\beta_n x) \end{aligned}$$

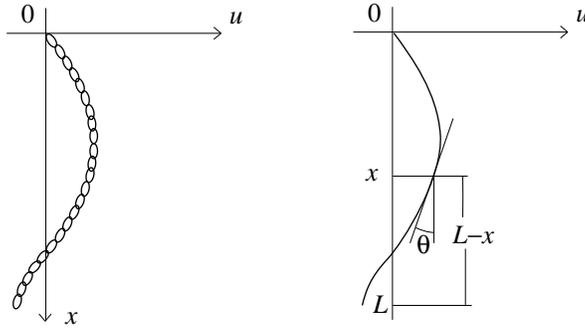


FIG. 6.6. Chaîne vibrante fixée au bout $x = 0$ et mobile au bout $x = L$.

du fait que

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x),$$

c'est-à-dire

$$J_2(\beta_n) = \frac{2}{\beta_n}J_1(\beta_n) - J_0(\beta_n) = -J_0(\beta_n)$$

et $J_0(\beta_n) \neq 0$ (V. tableau 1)

$$J_0(\beta_2) = -0.4028$$

$$J_0(\beta_3) = 0.3001$$

$$J_0(\beta_4) = -0.2497$$

$$J_0(\beta_5) = 0.2184$$

etc. □

6.1.3. Le problème de la chaîne vibrante. On considère un problème dont la solution fait intervenir les fonctions de BESSEL.

PROBLÈME 6.1. Soit une chaîne vibrante de longueur L , de masse m , de position et de vitesse initiales :

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = 0.$$

Trouver la position $u(x, t)$ pour $t > 0$.

RÉSOLUTION. (V. figure 6.6.) Soit $\rho = m/L$. On suppose que $|u|$ et $|u_x|$ sont petits. La position de la chaîne $u(x, t)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho g(L-x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Séparons les variables :

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \rho g \frac{d}{dx} \left[(L-x) \frac{dF}{dx} \right] G &= \rho F(x) \frac{d^2 G}{dt^2}, \\ \frac{1}{F(x)} \left[(L-x) F'(x) \right]' &= \frac{1}{g} \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = -k^2. \end{aligned}$$

Donc

$$G(t) = a \cos(k\sqrt{g}t) + b \sin(k\sqrt{g}t)$$

et

$$(L-x)F'' - F' + k^2F = 0.$$

Posons

$$L-x = z, \quad \frac{dz}{dx} = -1, \quad \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dx} = -\frac{dF}{dz}, \quad \frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2F}{dz^2}.$$

Alors

$$z \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} + k^2F = 0.$$

On transforme cette équation en l'équation de BESSEL. Posons

$$z = c w^\alpha, \quad \frac{dz}{dz} = c \alpha w^{\alpha-1} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{c\alpha} w^{1-\alpha},$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \frac{dF}{dw} \frac{dw}{dz} = \frac{1}{c\alpha} w^{1-\alpha} \frac{dF}{dw}, \\ \frac{d^2F}{dz^2} &= \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{c\alpha} w^{1-\alpha} \frac{dF}{dw} \right) \frac{dw}{dz} \\ &= \frac{1}{c\alpha} \left[(1-\alpha) w^{-\alpha} \frac{dF}{dw} + w^{1-\alpha} \frac{d^2F}{dw^2} \right] \frac{1}{c\alpha} w^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{c^2\alpha^2} \left[(1-\alpha) w^{1-2\alpha} \frac{dF}{dw} + w^{2-2\alpha} \frac{d^2F}{dw^2} \right]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{c w^\alpha}{c^2 \alpha^2} \left[w^{2-2\alpha} \frac{d^2F}{dw^2} + (1-\alpha) w^{1-2\alpha} \frac{dF}{dw} \right] + \frac{1}{c\alpha} w^{1-\alpha} \frac{dF}{dw} + k^2F &= 0, \\ \frac{w^{2-\alpha}}{c\alpha^2} \frac{d^2F}{dw^2} + \left[\frac{(1-\alpha)}{c\alpha^2} + \frac{\alpha}{c\alpha^2} \right] w^{1-\alpha} \frac{dF}{dw} + k^2F &= 0, \\ \frac{w^{2-\alpha}}{c\alpha^2} \frac{d^2F}{dw^2} + \frac{1}{c\alpha^2} w^{1-\alpha} \frac{dF}{dw} + k^2F &= 0. \end{aligned}$$

Prenons

$$\alpha = 2, \quad c\alpha^2 k^2 = 1,$$

et multiplions la dernière équation par $c\alpha^2$:

$$\frac{d^2F}{dw^2} + w^{-1} \frac{dF}{dw} + F = 0;$$

maintenant multiplions par w^2 :

$$w^2 \frac{d^2F}{dw^2} + w \frac{dF}{dw} + (w^2 - 0^2)F = 0.$$

C'est l'équation de BESSEL d'ordre zéro, dont la solution générale est

$$F(w) = cJ_0(w) + dY_0(w).$$

Puisque

$$w^2 = \frac{1}{\beta} z = 4k^2 z, \quad w = 2k\sqrt{z},$$

alors

$$\begin{aligned} F(z) &= cJ_0(2k\sqrt{z}) + dY_0(2k\sqrt{z}) \\ &= cJ_0(2k\sqrt{L-x}) + dY_0(2k\sqrt{L-x}). \end{aligned}$$

Enfin

$$u(x, t) = \{a \cos(k\sqrt{g}t) + b \sin(k\sqrt{g}t)\} \{cJ_0(2k\sqrt{L-x}) + dY_0(2k\sqrt{L-x})\}.$$

Puisque $u(L, t)$ est bornée, $d = 0$, et du fait que $u_t(x, 0) = 0$, il suit que $b = 0$.
Donc, avec

$$ac = A,$$

on a

$$u(x, t) = AJ_0(2k\sqrt{L-x}) \cos(k\sqrt{g}t).$$

Mais

$$u(0, t) = 0 \implies J_0(2k\sqrt{L}) = 0 \implies 2k_m\sqrt{L} = \alpha_m \implies k_m = \frac{\alpha_m}{2\sqrt{L}}.$$

Donc, les valeurs propres sont

$$\lambda_m = k_m\sqrt{g} = \frac{\alpha_m}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

et les fonctions propres sont

$$u_m(x, t) = A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{L}} \sqrt{L-x}\right) \cos(\lambda_m t).$$

La solution par superposition est donc

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{\sqrt{L}} \sqrt{L-x}\right) \cos(\lambda_m t).$$

De la condition initiale :

$$u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_m \sqrt{1 - \frac{x}{L}}\right) = f(x),$$

avec

$$s = \sqrt{1 - x/L}, \quad x = L(1 - s^2),$$

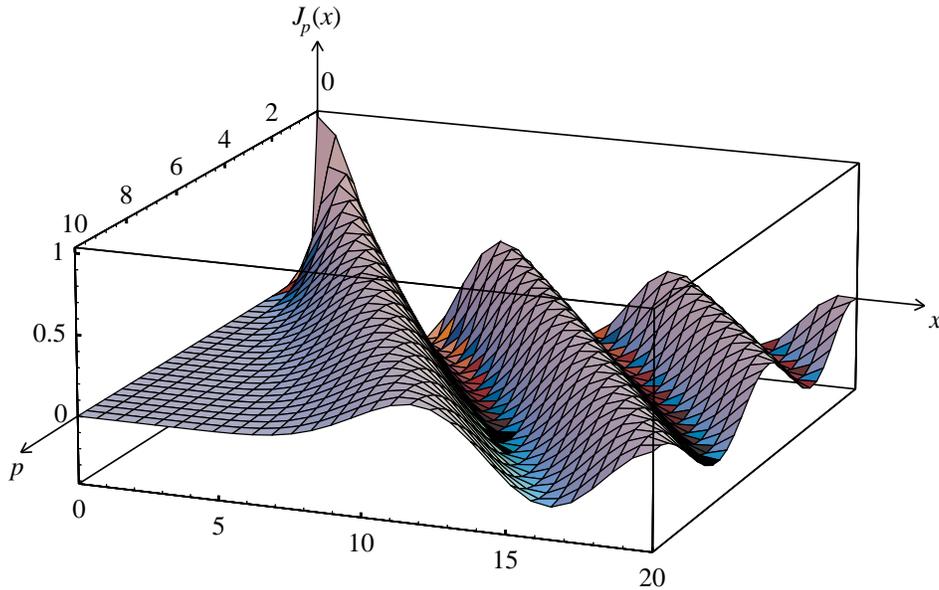
on obtient

$$u(x, 0) = f(L[1 - s^2]) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\alpha_m s),$$

où

$$A_m = \frac{2}{J_1^2(\alpha_m)} \int_0^1 s f(L[1 - s^2]) J_0(\alpha_m s) ds.$$

En terminant cette section, on illustre à la figure 6.7 le comportement de $J_p(x)$ comme fonction de (p, x) .

FIG. 6.7. Valeurs de $J_p(x)$ comme fonction de (p, x) .

6.2. Le problème de la chaleur

On considère un problème de la chaleur qui fait intervenir la fonction de BESSEL $J_0(x)$.

6.2.1. Solution par la séparation des variables.

PROBLÈME 6.2. Soit une plaque circulaire de rayon R , aux faces isolées et de température nulle au bord. Le modèle mathématique est l'équation aux dérivées partielles :

$$(6.22) \quad u_t = c^2 \nabla^2 u, \quad t > 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

avec la condition au bord :

$$(6.23) \quad u(R, \theta, t) = 0, \quad \text{pour } t > 0,$$

et la condition initiale :

$$(6.24) \quad u(r, \theta, 0) = f(r), \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R.$$

Trouver la température $u(r, \theta, t)$, pour $t > 0$ et $0 < r < R$.

RÉSOLUTION. Dans ce cas simple $u = u(r, t)$ est indépendante de θ , parce que tant la condition au bord homogène que la condition initiale f sont indépendantes de θ .

On a les trois étapes ordinaires.

ÉTAPE 1. Pour séparer les variables (V. l'exemple 1.5) on pose

$$u = W(r)G(t)$$

dans (6.22). Alors :

$$(6.25) \quad \dot{G}(t) + \lambda^2 G(t) = 0, \quad \lambda = ck,$$

et

$$(6.26) \quad W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) + k^2W(r) = 0.$$

Par la substitution $s = kr$, comme pour (6.6), on obtient l'équation de BESSEL d'ordre zéro dont la solution générale est

$$W(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr).$$

Si la solution $u(r, t)$ est bornée à l'origine, $B = 0$.

ÉTAPE 2. Pour satisfaire la condition au bord (6.23) on voit que k prend les valeurs

$$k = k_m = \frac{\alpha_m}{R}.$$

Alors

$$\begin{aligned} W_m(r) &= J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ G_m(t) &= A_m e^{-\lambda_m^2 t}, \quad \lambda_m = \frac{c\alpha_m}{R}. \end{aligned}$$

Les fonctions propres et les valeurs propres sont respectivement

$$(6.27) \quad u_m(r, t) = A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) e^{-\lambda_m^2 t}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

et

$$(6.28) \quad \lambda_m = \frac{c\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

Remarquer la différence d'avec le problème des ondes !

ÉTAPE 3. On superpose les fonctions propres pour satisfaire la condition initiale (6.24) :

$$(6.29) \quad u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) e^{-\lambda_m^2 t},$$

où

$$A_m = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_m)} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) dr, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

6.2.2. Le problème de la chaleur d'un cylindre de longueur finie.

PROBLÈME 6.3. Considérons un cylindre circulaire droit de rayon R et de hauteur H , isolé au bord. Soit $f(r)$ la température initiale. Trouver la solution u du problème de la chaleur.

RÉSOLUTION. On a le problème aux valeurs initiales et au bord :

$$(6.30) \quad u_t = c^2 \nabla^2 u,$$

avec les conditions initiales

$$(6.31) \quad u(r, \theta, z, 0) = f(r)$$

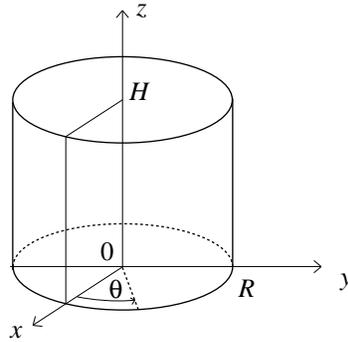


FIG. 6.8. Cylindre circulaire droit de rayon R et de hauteur H de coordonnées polaires cylindriques.

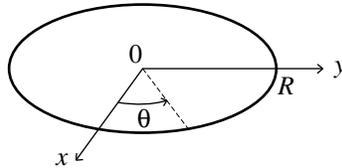


FIG. 6.9. Section d'un cylindre circulaire droit de rayon R en coordonnées polaires.

et au bord

$$(6.32) \quad u_r(R, \theta, z, t) = 0,$$

$$(6.33) \quad u_z(r, \theta, 0, t) = 0,$$

$$(6.34) \quad u_z(r, \theta, H, t) = 0.$$

(V. figure 6.8). On considère deux cas, selon qu'on néglige l'influence des bouts ou non.

CAS A. On néglige l'influence des bouts et l'on suppose que la condition initiale (6.31) ne dépend que de la distance radiale r :

$$u(r, \theta, z, 0) = f(r).$$

De plus, puisque les conditions aux limites (6.32)–(6.34) ne dépendent que de r , on peut supposer que la solution u est une fonction de r et t indépendante de θ et z . On a donc :

$$u = u(r, t).$$

Le problème se réduit donc à celui d'une plaque circulaire (V. figure 6.9) :

$$(6.35) \quad u_t = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right)$$

avec les conditions initiales et au bord :

$$(6.36) \quad u(r, 0) = f(r),$$

$$(6.37) \quad u_r(R, t) = 0.$$

Pour séparer les variables, on pose

$$u(r, t) = F(r)G(t)$$

dans (6.35) :

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(r)}{F(r)} + \frac{1}{r} \frac{F'(r)}{F(r)} = -k^2.$$

Alors on obtient deux équations différentielles :

$$G(t) = e^{-\lambda^2 t}, \quad \lambda = ck,$$

et

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) + k^2 F(r) = 0.$$

La substitution de la variable indépendante

$$s = kr$$

nous donne l'équation de BESSEL d'ordre zéro,

$$s^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + s \frac{dF}{ds} + (s^2 - 0^2) F = 0,$$

qui admet la solution générale :

$$F(s) = a_1 J_0(s) + a_2 Y_0(s),$$

ou, en retournant à la variable r ,

$$F(r) = a_1 J_0(kr) + a_2 Y_0(kr).$$

Puisque $u(r, t)$ est bornée sur $0 \leq r \leq R$ et que $Y_0(0) = -\infty$, on a $a_2 = 0$ et

$$F(r) = a_1 J_0(kr).$$

Alors

$$u(r, t) = a J_0(kr) e^{-\lambda^2 t}$$

et, par la condition au bord (6.37),

$$u_r(R, t) = ak J_0'(kR) e^{-\lambda^2 t} = 0, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Donc

$$J_0'(kR) = 0.$$

Comme

$$J_0^{(n)} = -J_1^{(n-1)},$$

nous avons, pour $n = 1$,

$$J_0'(kR) = -J_1(kR) = 0,$$

et donc

$$k_m R = \beta_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

où $\beta_1 = 0$ et β_2, β_3, \dots sont les zéros strictement positifs de $J_1(x)$. D'où

$$k_m = \frac{\beta_m}{R}$$

et

$$\lambda_m = ck_m = \frac{c\beta_m}{R}.$$

Enfin,

$$u_m(r, t) = J_0\left(\frac{\beta_m}{R} r\right) e^{-\lambda_m^2 t}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

sont les fonctions propres correspondant aux valeurs propres

$$\lambda_m = \frac{c\beta_m}{R}.$$

On exprime la solution par superposition :

$$u(r, t) = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) e^{-\lambda_m^2 t}.$$

Pour déterminer les a_m , on emploie la condition initiale (6.36) :

$$u(r, 0) = a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} a_m J_0\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) = f(r).$$

Puisque cette expression en r contient les zéros, β_m , de $J_1(x)$, on la dérive et l'on emploie la relation $J_0'(x) = -J_1(x)$. Alors on a

$$\begin{aligned} u_r(r, 0) &= \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m a_m}{R} J_0'\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) \\ &= - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m a_m}{R} J_1\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) = f'(r). \end{aligned}$$

Par la relation d'orthogonalité (V. le théorème 10.4) :

$$\int_0^R x J_1\left(\frac{\beta_m}{R}x\right) J_1\left(\frac{\beta_n}{R}x\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{R^2}{2} J_2^2(\beta_n) & \text{si } m = n, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^R r f'(r) J_1\left(\frac{\beta_n}{R}r\right) dr &= - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\beta_m a_m}{R} \int_0^R r J_1\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) J_1\left(\frac{\beta_n}{R}r\right) dr \\ &= - \frac{\beta_n a_n}{R} \frac{R^2}{2} J_2^2(\beta_n). \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = - \frac{2}{\beta_n R J_2^2(\beta_n)} \int_0^R r f'(r) J_1\left(\frac{\beta_n}{R}r\right) dr, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Comme

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x),$$

pour $\nu = 1$, on a

$$(6.38) \quad J_2(\beta_m) = \frac{2}{\beta_m} J_1(\beta_m) - J_0(\beta_m) = -J_0(\beta_m)$$

et

$$a_m = - \frac{2}{\beta_m R J_0^2(\beta_m)} \int_0^R r f'(r) J_1\left(\frac{\beta_m}{R}r\right) dr, \quad m = 2, 3, 4, \dots,$$

où, au moyen des tables (V. tableau 1),

$$J_0(\beta_2) = -0.40, \quad J_0(\beta_3) = -0.30, \quad J_0(\beta_4) = -0.25, \quad \dots$$

Pour déterminer a_1 , on emploie (6.36) avec $r = 0$; on obtient alors

$$u(0, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m = f(0),$$

d'où

$$a_1 = f(0) - \sum_{m=2}^{\infty} a_m. \quad \square$$

CAS B. On suppose que $u(r, z, t)$ est indépendante de θ puisque les conditions initiales (6.31) et au bord (6.32) le sont. Si l'on tient compte de l'influence des bords, on doit tenir compte des conditions (6.33) et (6.34) :

$$u_z(r, \theta, 0, t) = 0,$$

et

$$u_z(r, \theta, H, t) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles (6.30) devient

$$\begin{aligned} u_t &= c^2 \nabla_{r,\theta,z}^2 u \\ &= c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + u_{zz} \right). \end{aligned}$$

On pose

$$u(r, z, t) = W(r)F(z)G(t),$$

dans l'équation aux dérivées partielles et l'on divise par $c^2 WFG$. Alors :

$$\frac{WF\dot{G}}{c^2 WFG} = \frac{W''FG}{WFG} + \frac{1}{r} \frac{W'FG}{WFG} + \frac{WF''G}{WFG} = -k^2,$$

et, après simplification,

$$\frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} + \frac{F''(z)}{F(z)} = -k^2,$$

L'équation pour $G(t)$:

$$\dot{G}(t) = -k^2 c^2 G(t),$$

admet la solution générale :

$$G(t) = \alpha e^{-c^2 k^2 t}.$$

L'équation pour $W(r)$:

$$\frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} = -k^2 - \frac{F''(z)}{F(z)} = -\mu^2,$$

est l'équation de BESSEL d'ordre zéro,

$$r^2 W''(r) + r W'(r) + \mu^2 r^2 W(r) = 0,$$

et elle admet la solution générale :

$$W(r) = \beta J_0(\mu r) + \gamma Y_0(\mu r).$$

Puisque u est bornée, alors $\gamma = 0$. L'équation pour $F(z)$:

$$F''(z) + (k^2 - \mu^2)F(z) = 0,$$

admet la solution générale :

$$F(z) = \delta \cos \nu z + \epsilon \sin \nu z,$$

avec

$$\nu^2 = k^2 - \mu^2.$$

On a donc

$$u(r, z, t) = e^{-c^2 k^2 t} J_0(\mu r) (A \cos \nu z + A^* \sin \nu z)$$

et, par les conditions au bord et aux bouts, on a

$$\begin{aligned} u_r(R, z, t) &= \mu e^{-c^2 k^2 t} J_0'(\mu R) (A \cos \nu z + A^* \sin \nu z) = 0, \\ &\implies J_0'(\mu R) = -J_1(\mu R) = 0 \implies \mu_m = \frac{\beta_m}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ u_z(r, 0, t) &= e^{-c^2 k^2 t} J_0 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) (-A \nu \sin \nu 0 + \nu A^* \cos \nu 0) = 0 \\ &\implies A^* = 0, \\ u_z(r, H, t) &= e^{-c^2 k^2 t} J_0 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) (-A \nu \sin \nu H) = 0, \\ &\implies \nu_n = \frac{n\pi}{H}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

et

$$k = k_{mn} = \sqrt{\frac{\beta_m^2}{R^2} + \frac{n^2 \pi^2}{H^2}}.$$

Les valeurs propres et les fonctions propres sont respectivement

$$\lambda_{mn} = ck_{mn}$$

et

$$u_{mn}(r, z, t) = J_0 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}.$$

On obtient la solution par superposition :

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J_0 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) e^{-\lambda_{mn}^2 t}.$$

On détermine les A_{mn} par la condition initiale :

$$(6.39) \quad u(r, z, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} J_0 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) = f(r, z).$$

On dérive cette expression par rapport à r :

$$u_r(r, z, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\beta_m}{R} A_{mn} \right) J_1 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) = f_r(r, z).$$

Pour $m = 2, 3, 4, \dots$ et $n = 0, 1, 2, \dots$, on a

$$\begin{aligned} (6.40) \quad A_{mn} &= -\frac{2\varepsilon_n}{\beta_m R J_2^2(\beta_m) H} \int_0^H \int_0^R r f_r(r, z) J_1 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) dr dz \\ &= -\frac{2\varepsilon_n}{\beta_m R J_0^2(\beta_m) H} \int_0^H \int_0^R r f_r(r, z) J_1 \left(\frac{\beta_m}{R} r \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right) dr dz \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

et nous avons employé (6.38) dans la dernière équation.

Pour déterminer A_{1n} , on pose $r = 0$ dans (6.39). Alors

$$u(0, z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{H} z \right).$$

Il suit que

$$(6.41) \quad \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} = \frac{\varepsilon_n}{H} \int_0^H f(0, z) \cos\left(\frac{n\pi}{H}z\right) dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Puisqu'on connaît les sommes

$$\sum_{m=2}^{\infty} A_{mn}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

par (6.40), alors on peut calculer A_{1n} par (6.41). Ceci achève la résolution dans le cas B. \square

6.2.3. Densité des neutrons dans un réacteur nucléaire. On termine ce chapitre avec deux problèmes de diffusion avec source interne. En premier lieu, on considère le problème de la densité des neutrons dans un réacteur nucléaire cylindrique circulaire dont la solution s'exprime au moyen de la fonction de BESSEL $J_0(x)$. On considérera ensuite le même problème pour un réacteur sphérique dont la solution s'exprimera au moyen des fonctions de BESSEL $J_{\frac{1}{2}}(x)$ et $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, c'est-à-dire, respectivement, de sinus et de cosinus.

PROBLÈME 6.4. On considère un réacteur nucléaire cylindrique circulaire de rayon R et de hauteur H . Soit $N(x, y, z, t)$ la densité des neutrons dans le cylindre de la figure 6.8. La fission des neutrons donne lieu à un problème de diffusion qui se modélise d'après l'équation de la chaleur avec source interne :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\nabla^2 N + \gamma N,$$

où D est la constante de diffusivité des neutrons et γ est une constante. Le terme γN , proportionnel à la quantité de neutrons présents, représente la source de neutrons due à la fission. Si N est indépendante de θ , l'équation en coordonnées cylindriques devient :

$$(6.42) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right) + \gamma N.$$

On fait les hypothèses physiques suivantes :

$$(6.43) \quad N(r, z, t) \text{ est bornée,}$$

(pour une bombe, N n'est pas bornée),

$$(6.44) \quad N(r, z, t) \text{ ne décroît pas pour } t \text{ croissant,}$$

(pour le CANDU canadien, il faut maintenir la fission). De plus on a les conditions au bord :

$$(6.45) \quad N(R, z, t) = 0,$$

$$(6.46) \quad N(r, 0, t) = 0,$$

$$(6.47) \quad N(r, H, t) = 0,$$

et la condition initiale :

$$(6.48) \quad N(r, z, 0) = f(r, z).$$

RÉSOLUTION. On pose

$$N = W(r)F(z)G(t)$$

dans (6.42) :

$$WF\dot{G} = D \left(W''FG + \frac{1}{r}W'FG + WF''G \right) + \gamma WFG,$$

et l'on divise par $DWFG$:

$$\frac{\dot{G}(t)}{DG(t)} - \frac{\gamma}{D} = \frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} + \frac{F''(z)}{F(z)} = -k^2.$$

En séparant les équations, on a

$$\frac{\dot{G}(t)}{DG(t)} - \frac{\gamma}{D} = -k^2$$

et

$$\frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} = -\frac{F''(z)}{F(z)} - k^2 = -\mu^2.$$

Un autre séparation nous donne

$$\frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} = -\mu^2$$

et

$$\frac{F''(z)}{F(z)} = \mu^2 + k^2.$$

Posant $k^2 = \mu^2 + \nu^2$, on a

$$\begin{aligned} \dot{G} &= [\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]G \implies G = c_1 e^{[\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]t}, \\ W'' + \frac{1}{r}W' + \mu^2 W &= 0 \implies W = c_2 J_0(\mu r) + c_3 Y_0(\mu r), \\ F'' + \nu^2 F &= 0 \implies F = c_4 \cos \nu z + c_5 \sin \nu z. \end{aligned}$$

Par (6.43) on a

$$c_3 = 0$$

et par (6.46) on a

$$c_4 = 0.$$

Notons

$$c_1 c_2 c_5 = A;$$

alors

$$N(r, z, t) = A e^{[\gamma - D(\mu^2 + \nu^2)]t} J_0(\mu r) \sin \nu z.$$

Par (6.45) on a

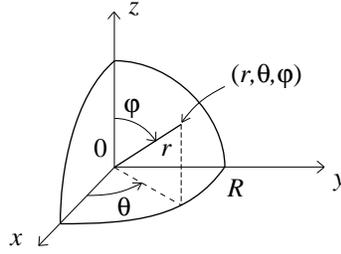
$$J_0(\mu R) = 0 \implies \mu_m = \frac{\alpha_m}{R}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

et, par (6.47),

$$\sin \nu H = 0 \implies \nu_n = \frac{n\pi}{H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

On a donc les fonctions propres :

$$N_{m,n}(r, z, t) = A_{mn} e^{[\gamma - D(\mu_m^2 + \nu_n^2)]t} J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) \sin \frac{n\pi}{H}z.$$

FIG. 6.10. Réacteur sphérique de rayon R .

On superpose les fonctions propres :

$$(6.49) \quad N(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} N_{m,n}(r, z, t),$$

où, par (6.48),

$$A_{mn} = \frac{\int_0^R \int_0^H r f(r, z) J_0(\alpha_m r/R) \sin(n\pi z/H) dz dr}{\int_0^R \int_0^H [J_0(\alpha_m r/R)]^2 \sin^2(n\pi z/H) dz dr}.$$

La solution (6.49) satisfait (6.44) si

$$\gamma - D \left(\frac{\alpha_1^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \right) \geq 0, \quad \alpha_1 = 2.405,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\alpha_1^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} \leq \frac{\gamma}{D}.$$

Notons

$$(6.50) \quad m = \pi \rho R^2 H,$$

la masse totale des neutrons et ρ la densité volumique de neutrons. Si R et H satisfont l'équation

$$\frac{\alpha_1^2}{R^2} + \frac{\pi^2}{H^2} = \frac{\gamma}{D},$$

alors (6.50) est la *masse critique* au-delà de laquelle la réaction à chaîne peut être violente.

PROBLÈME 6.5. On considère le problème de la densité des neutrons $N(r, t)$ dans un réacteur sphérique de rayon R et de densité de neutrons initiale $N(r, 0) = f(r)$ indépendante des angles θ et φ .

RÉSOLUTION. Pour la notation, voir l'exemple précédent. On a l'équation de la chaleur (V. figure 6.10) avec source interne :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \gamma N.$$

On pose

$$N = W(r)F(t)$$

dans l'édp :

$$\frac{\dot{F} - \gamma F}{DF} = \frac{W''}{W} + \frac{2}{r} \frac{W'}{W} = -k^2.$$

On sépare les équations

$$\dot{F} = (\gamma - Dk^2)F \implies F(t) = c_1 e^{(\gamma - Dk^2)t}$$

et

$$W'' + \frac{2}{r}W' + k^2W = 0,$$

d'où

$$r^2W'' + 2rW' + r^2k^2W = 0.$$

La substitution de la variable indépendante :

$$s = rk,$$

transforme la dernière équation :

$$s^2 \frac{d^2W}{ds^2} + 2s \frac{dW}{ds} + s^2W = 0.$$

Maintenant, la substitution de la variable dépendante :

$$W = s^{-1/2}U,$$

nous donne l'équation de BESSEL d'ordre une demie :

$$s^2 \frac{d^2U}{ds^2} + s \frac{dU}{ds} + \left(s^2 - \frac{1}{4}\right)U = 0,$$

dont la solution générale est

$$U(s) = c_2 J_{1/2}(s) + c_3 J_{-1/2}(s).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} W(s) &= c_2 s^{-1/2} J_{1/2}(s) + c_3 s^{-1/2} J_{-1/2}(s) \\ &= c_4 \frac{1}{s} \sin s + c_5 \frac{1}{s} \cos s, \end{aligned}$$

puisque

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

(V. le lemme 10.1). Si l'on revient aux variables originales, on a :

$$W(r) = c_4 \frac{1}{kr} \sin kr + c_5 \frac{1}{kr} \cos kr.$$

Puisque la solution est bornée en $r = 0$, alors $c_5 = 0$. De plus $W(R) = 0$ implique que

$$k_n = \frac{n\pi}{R}, \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{D}n\pi}{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solution générale est donc

$$\begin{aligned} N(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right) e^{(\gamma - \lambda_n^2)t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right) e^{(\gamma - \lambda_n^2)t}. \end{aligned}$$

On obtient les B_n en développant la condition initiale :

$$N(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{R}r\right) = f(r)$$

en série de FOURIER de sinus sur $[0, R]$.

Si $\gamma - \lambda_1^2 = 0$, on a la masse critique :

$$m = \frac{4}{3}\rho\pi^4 \left(\frac{D}{\gamma}\right)^{3/2}. \quad \square$$

6.3. Le problème du potentiel pour un cercle

Soit $u(R, \theta) = f(\theta)$ la distribution du potentiel électrique sur un cercle C de rayon R . On veut déterminer le potentiel u à l'intérieur de C et le potentiel u^* à l'extérieur de C . On fait l'hypothèse suivante sur le modèle physique : le potentiel est borné à l'intérieur de C et nul à l'infini.

6.3.1. Le modèle mathématique. Le potentiel $u(r, \theta)$ satisfait l'équation de LAPLACE à l'intérieur et à l'extérieur du cercle,

$$(6.51) \quad \nabla^2 u = 0,$$

c'est-à-dire pour $r < R$ et $r > R$, et satisfait sur le cercle la condition aux limites (C.L.)

$$(6.52) \quad u(R, \theta) = f(\theta).$$

De plus

$$(6.53) \quad u \text{ est bornée à l'origine } (r = 0)$$

et

$$(6.54) \quad u^* = 0 \text{ à l'infini } \left(\lim_{r \rightarrow \infty} u^*(r, \theta) = 0 \right).$$

Le problème consiste à trouver le potentiel $u(r, \theta)$, $r < R$, à l'intérieur de C et le potentiel $u^*(r, \theta)$, $r > R$, à l'extérieur de C .

6.3.2. Solution par la séparation des variables. Il est naturel d'exprimer le laplacien ∇^2 en coordonnées polaire (V. section 13.8) :

$$\nabla^2 u = \partial_r^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 u,$$

où

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Pour séparer les variables, posons

$$u(r, \theta) = F(r)G(\theta)$$

dans l'équation de LAPLACE, divisons par FG , multiplions par r^2 et simplifions :

$$r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} + \frac{G''}{G} = 0,$$

$$r^2 \frac{F''}{F} + r \frac{F'}{F} - \frac{G''}{G} = k.$$

On obtient donc l'équation de EULER-CAUCHY :

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - kF(r) = 0$$

et l'équation harmonique :

$$G''(\theta) + kG(\theta) = 0.$$

Puisque la fonction au bord $f(\theta)$ est 2π -périodique, on a les valeurs propres

$$k_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On a donc

$$G_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

Pour trouver la solution de l'équation d'EULER-CAUCHY :

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - kF(r) = 0,$$

on pose

$$F(r) = r^\alpha$$

dans cette équation. On obtient alors

$$\alpha^2 = n^2 \implies \alpha = \pm n.$$

Donc

$$F_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}.$$

Les fonctions propres sont

$$u_n(r, \theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Par superposition, la solution dans le disque, bornée à l'origine, est

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \sin n\theta). \end{aligned}$$

Par la condition aux limites :

$$\begin{aligned} u(R, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n R^n \cos n\theta + b_n R^n \sin n\theta) \\ &= f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Les coefficients $a_n R^n$ sont donc les coefficients de FOURIER de $f(\theta)$ avec $L = \pi$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \\ a_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n R^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

La solution à l'extérieur du disque, nulle à l'infini, est

$$\begin{aligned} u^*(r, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^* r^{-n} \cos n\theta + b_n^* r^{-n} \sin n\theta). \end{aligned}$$

De nouveau, les coefficients $a_n^* R^{-n}$ et $b_n^* R^{-n}$ sont les coefficients de FOURIER de $f(\theta)$.

On peut aussi considérer deux cercles concentriques de rayons $R_1 < R_2$ et les potentiels respectivement dans le petit disque, à l'extérieur du grand disque et dans l'anneau entre les deux disques.

Exercices pour la section 6.1

6.1. Résoudre le problème :

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0,$$

aux valeurs initiales et aux limites

$$u(r, 0) = -0.2J_0\left(\frac{\alpha_1}{R}r\right) + 0.3J_0\left(\frac{\alpha_2}{R}r\right),$$

$$u_t(r, 0) = 0.5J_0\left(\frac{\alpha_3}{R}r\right),$$

$$u(R, t) = 0.$$

6.2. Résoudre le problème de la membrane circulaire vibrante de rayon 3, fixée au bord et régie par l'équation aux dérivées partielles

$$u_{tt} = 49 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right),$$

La position et la vitesse initiales sont respectivement

$$u(r, 0) = 9 - r^2, \quad 0 \leq r \leq 3,$$

$$u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

6.3. Évaluer $\int_0^6 J_5(x) dx$.

6.4. Évaluer : $\int_0^4 x^3 J_0(x) dx$.

6.5. Calculer $J_5(4)$.

6.6. Représenter $f(x) = x^2$ sur $0 \leq x \leq R$ selon les fonctions de BESSEL $J_0(\alpha_m x/R)$:

$$x^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} x\right).$$

6.7. Résoudre l'équation de HELMHOLTZ en coordonnées polaires cylindriques :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0,$$

par séparation de variables.

Remarque : On obtient l'équation de HELMHOLTZ à partir de l'équation des ondes avec une solution de la forme

$$u(r, \varphi, z, t) = u(r, \varphi, z) e^{ikt}.$$

Exercices pour la section 6.2

6.8. Résoudre le problème de la chaleur d'une plaque circulaire mince de rayon R aux faces isolées :

$$u_t = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq R, \quad t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(r, 0) = -0.3J_0 \left(\frac{\alpha_1}{R} r \right) - 0.2J_0 \left(\frac{\alpha_2}{R} r \right) = f(r),$$

et la condition aux limites

$$u(R, t) = 0.$$

6.9. Résoudre le problème de la chaleur d'une plaque circulaire mince de rayon 3 aux faces isolée :

$$u_t = 49 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right), \quad 0 \leq r \leq 3, \quad t > 0,$$

avec la condition aux limites

$$u_r(3, t) = 0$$

et la condition initiale

$$u(r, 0) = 1 - r^2, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

6.10. Montrer que les dimensions optimales du réacteur cylindrique de rayon R et de hauteur H sont

$$R = 2.405 \sqrt{\frac{3D}{\gamma}}, \quad H = \pi \sqrt{\frac{3D}{\gamma}},$$

où D est la constante de diffusivité des neutrons et γ est la constante de fission.

6.11. Résoudre le problème du réacteur nucléaire en forme de parallélépipède de côtés a , b et c . Montrer que la masse critique est

$$m = \rho abc,$$

où ρ est la densité des neutrons et

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{\gamma}{\pi^2 D}.$$

Enfin, montrer que la forme optimale est le cube.

Exercices pour la section 6.3

6.12. Trouver les potentiels $u(r, \theta)$ et $u^*(r, \theta)$ à l'intérieur et à l'extérieur d'un disque de rayon 5 m avec la condition aux limites

$$u(5, \theta) = 40 \cos^3 \theta.$$

6.13. Soit deux cercles concentriques C_1 et C_2 de rayon $R_1 = 3$ m et $R_2 = 7$ m. Trouver les potentiels $u(r, \theta)$ à l'intérieur du petit disque, $u^*(r, \theta)$ à l'extérieur du grand disque et $v(r, \theta)$ dans l'anneau borné par les deux cercles, avec les conditions aux limites

$$f(\theta) = \cos \theta \quad \text{sur } C_1$$

et

$$g(\theta) = \sin^2 \theta \quad \text{sur } C_2.$$

CHAPITRE 7

Solutions $u(r)$ de $\nabla^2 u = 0$

7.1. Introduction

Dans ce court chapitre, on résout l'équation de LAPLACE

$$(7.1) \quad \nabla^2 u = 0$$

en dimensions 2 et 3 quand la solution $u(r)$ dépend uniquement de la distance du point courant à l'origine. On présente aussi la solution en dimension $n \geq 3$.

7.2. Solution en dimension 2

L'équation de LAPLACE, en coordonnées polaires, se simplifie :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0, \end{aligned}$$

puisque

$$u_{\theta\theta} = 0.$$

La fonction u étant absente de l'équation différentielle, la substitution

$$\frac{du}{dr} = u' = v$$

réduit l'ordre de cette dernière qui est séparable :

$$v' + \frac{1}{r} v = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1}{r}.$$

On peut donc l'intégrer :

$$\int \frac{v'}{v} dr = - \int \frac{1}{r} dr + c_1,$$

$$\ln v = -\ln r + c_1,$$

$$v = c \frac{1}{r},$$

$$u' = c \frac{1}{r}.$$

On sépare cette dernière équation et on l'intègre :

$$\int u' dr = c \int \frac{1}{r} dr + k.$$

On a donc la solution générale :

$$(7.2) \quad u(r) = c \ln r + k,$$

où c et k sont deux constantes arbitraires à déterminer par les conditions au bord.

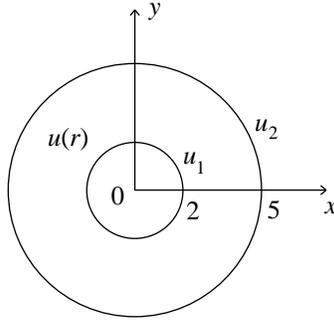


FIG. 7.1. Le potentiel électrostatique entre deux cylindres coaxiaux de rayon, respectivement, 2 m et 5 m.

EXEMPLE 7.1. Trouver le potentiel électrostatique $u(r)$ (en volts) entre deux cylindres coaxiaux de rayon, respectivement

$$R_1 = 2 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 5 \text{ m},$$

(V. figure 7.1) et de potentiel, respectivement

$$u(2) = 10 \text{ V} \quad \text{et} \quad u(5) = 110 \text{ V}.$$

RÉSOLUTION. En dimension 2, (7.2) est la solution générale :

$$u(r) = c \ln r + k.$$

On détermine les constantes c et k par les conditions aux limites :

$$u(2) = c \ln 2 + k = 10,$$

$$u(5) = c \ln 5 + k = 110.$$

Alors

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 110 & 1 \\ \ln 2 & 1 \\ \ln 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln 2 & 1 \\ \ln 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 110}{\ln 2 - \ln 5} = -\frac{100}{\ln 2/5} \approx 109.14$$

et

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \ln 2 & 10 \\ \ln 5 & 110 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln 2 & 1 \\ \ln 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{110 \ln 2 - 10 \ln 5}{\ln 2/5} \approx -65.65. \quad \square$$

7.3. Solution en dimension 3

L'équation de LAPLACE, en coordonnées sphériques, se simplifie :

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cot \varphi}{r^2} u_\varphi + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} u_{\theta\theta} \\ &= \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \end{aligned}$$

parce que

$$u_{\varphi\varphi} = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_{\theta\theta} = 0$$

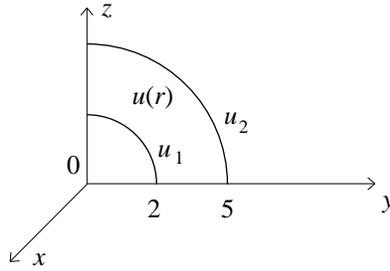


FIG. 7.2. La température stationnaire $u(r)$ entre deux sphères concentriques de rayon, respectivement, 2 m et 5 m.

puisque $u(r)$ est indépendante de φ et de θ .

La fonction u étant absente de l'équation différentielle, la substitution

$$\frac{du}{dr} = u' = v$$

réduit l'ordre de cette dernière qui est séparable :

$$v' + \frac{2}{r}v = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{2}{r} dr.$$

On peut donc l'intégrer :

$$\int \frac{v'}{v} dr = - \int \frac{2}{r} dr + c_1,$$

$$\ln v = -2 \ln r + c_1,$$

$$v = -c \frac{1}{r^2},$$

$$u' = -c \frac{1}{r^2}.$$

On sépare cette dernière équation et on l'intègre :

$$\int u' dr = - \int \frac{c}{r^2} dr + k.$$

La solution générale est donc

$$(7.3) \quad u(r) = \frac{c}{r} + k.$$

EXEMPLE 7.2. Trouver la température stationnaire $u(r)$ entre deux sphères concentriques de rayon, respectivement

$$R_1 = 2 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 5 \text{ m}$$

(V. figure 7.2) et de température, respectivement

$$u(2) = 10^\circ \quad \text{et} \quad u(5) = 110^\circ.$$

RÉSOLUTION. En dimension 3, (7.3) est la solution générale :

$$u(r) = \frac{c}{r} + k.$$

On détermine les constantes c et k par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} u(2) &= \frac{1}{2}c + k = 10, \\ u(5) &= \frac{1}{5}c + k = 110. \end{aligned}$$

Alors,

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 110 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/5 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{100}{1/2 - 1/5} = -\frac{1000}{3}$$

et

$$k = \frac{\begin{vmatrix} 1/2 & 10 \\ 1/5 & 110 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{110/2 - 10/5}{1/2 - 1/5} = \frac{530}{3}. \quad \square$$

7.4. Solution en dimension n

En dimension $n \geq 3$, le laplacien agissant sur une fonction $u(r)$ se réduit à

$$\nabla^2 u = u'' + \frac{n-1}{r} u'$$

et la solution générale $u(r)$ de l'équation de LAPLACE est

$$(7.4) \quad u(r) = cr^{2-n} + k.$$

Exercices pour le chapitre 7

7.1. Trouver la température stationnaire $u(r)$ entre deux cylindres coaxiaux de rayon, respectivement

$$R_1 = 1 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 3 \text{ m}$$

et de température, respectivement

$$u(1) = 110^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad u(3) = 0^\circ\text{C},$$

7.2. Trouver le potentiel électrostatique $u(r)$ (en volts) entre deux sphères concentriques de rayon, respectivement

$$R_1 = 3 \text{ m} \quad \text{et} \quad R_2 = 7 \text{ m},$$

et de potentiel, respectivement

$$u(3) = 1250 \text{ V} \quad \text{et} \quad u(7) = 550 \text{ V}.$$

7.3. Vérifier que (7.4) est solution de l'équation de LAPLACE dans \mathbb{R}^n .

7.4. Soit une sphère de rayon R sous une source calorifique intérieure uniforme de densité Q . Trouver la température stationnaire de la sphère si l'échange frontalier de la température satisfait la loi newtonienne du refroidissement, c'est-à-dire résoudre le problème aux limites

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{Q}{k}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} + hT \Big|_{r=R} = 0.$$

7.5. Soit un cylindre de rayon R sous une source calorifique intérieure uniforme de densité $Q_1 r + Q_2$. La température au bord est nulle. Résoudre le problème aux limites

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{Q_1 r + Q_2}{k}, \quad T|_{r=R} = 0.$$

7.6. Résoudre l'équation de POISSON

$$\nabla^2 u = -Q$$

à l'intérieur d'une sphère de rayon R avec la condition au bord

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = C,$$

et déterminer la valeur de la constante C pour laquelle le problème admet une solution.

7.7. Résoudre l'équation de POISSON

$$\nabla^2 u = A = \text{const}$$

dans la région annulaire entre deux cylindres infiniment longs de rayon respectif R_1 et R_2 , avec les conditions aux limites

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_1} = B, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_2} = C,$$

et déterminer les valeurs des constantes B et C pour lesquelles le problème admet des solutions.

Solutions analytiques

Dans ce chapitre on emploie les rudiments de la théorie des fonctions analytiques pour obtenir les solutions en série de puissances (entières) de l'équation de LEGENDRE. À la section 8.4, on expose quelques résultats de la théorie des fonctions holomorphes.

8.1. Remarque sur les fonctions analytiques

Il sera avantageux de considérer les séries entières dans le plan complexe. On rappelle qu'un point z du plan complexe \mathbb{C} admet les représentations suivantes :

– *cartésienne* ou *algébrique* :

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1,$$

– *trigonométrique* :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

– *polaire* ou *eulérienne* :

$$z = r e^{i\theta},$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x}.$$

On note $\bar{z} = x - iy$ le conjugué complexe de z et

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = r$$

le module de z (V. figure 8.1).

EXEMPLE 8.1. Développer la fonction rationnelle $1/(1-z)$ à un seul pôle en $z = 1$ en séries de puissance de centres respectivement $a = 0, -1$ et i et déterminer le rayon de convergence dans chacun des cas.

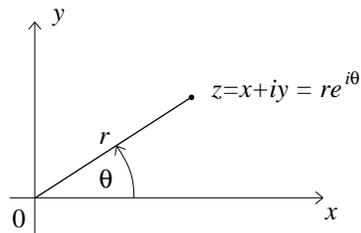


FIG. 8.1. Un point $z = x + iy = r e^{i\theta}$ du plan complexe \mathbb{C} .

RÉSOLUTION. Prolongeons la fonction d'une variable réelle

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

au plan complexe

$$f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z = x + iy.$$

On dit que $z = 1$ est un pôle de $f(z)$ puisque $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $z \rightarrow 1$ (V. la définition de pôle à la section 8.4). De plus, il s'agit d'un pôle simple puisque $1 - z$ apparaît au dénominateur à la première puissance.

On développe $f(z)$ en série de TAYLOR de centre $a = 0$:

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)z + \frac{1}{2!}f''(0)z^2 + \dots$$

Puisque

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)} \implies f(0) = 1,$$

$$f'(z) = \frac{1!}{(1-z)^2} \implies f'(0) = 1!,$$

$$f''(z) = \frac{2!}{(1-z)^3} \implies f''(0) = 2!,$$

\vdots

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \implies f^{(n)}(0) = n!,$$

il suit que

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

La série converge **absolument** pour $|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2} < 1$, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n < \infty,$$

et **uniformément** pour $|z| \leq \rho < 1$, c'est-à-dire

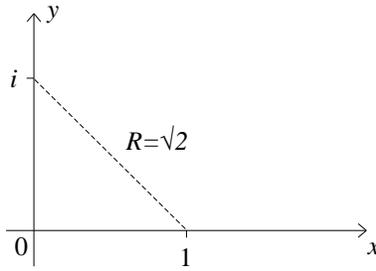
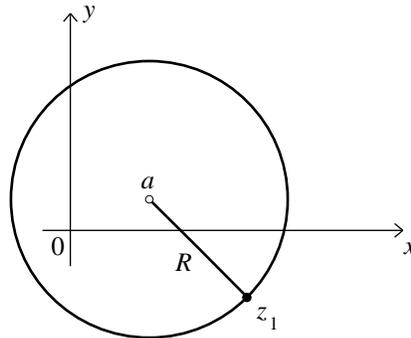
$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} z^n \right| < \epsilon, \quad \text{pour tout } N > N_\epsilon \text{ et pour tout } |z| \leq \rho < 1.$$

D'après le théorème 8.2, le rayon de convergence de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

est égal à 1.

Maintenant, on développe f au voisinage du centre $a = -1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z+1-1)} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\left(\frac{z+1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{z+1}{2} + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{2}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{2}\right)^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

FIG. 8.2. Distance du centre $a = i$ au pôle $z = 1$.FIG. 8.3. Distance R du centre a à la singularité z_1 la plus proche.

La série converge absolument pour

$$\left| \frac{z+1}{2} \right| < 1, \quad \text{c'est-à-dire } |z - (-1)| < 2.$$

Le centre du disque de convergence est $z = -1$ et le rayon de convergence est $R = 2$.

Enfin, on développe f au voisinage du centre $a = i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-i+i)} \\ &= \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i} \frac{1}{1-\left(\frac{z-i}{1-i}\right)} \\ &= \frac{1}{1-i} \left\{ 1 + \frac{z-i}{1-i} + \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

On voit que le centre du disque de convergence est bien $z = i$ et le rayon de convergence est $R = \sqrt{2} = |1-i|$ (V. figure 8.2). \square

Cet exemple montre que le développement de TAYLOR d'une fonction $f(z)$, de centre $z = a$ et de rayon de convergence R , n'est plus convergent dès que $|z-a| \geq R$, c'est-à-dire dès que $|z-a|$ est plus grand que la distance de a à la singularité z_1 la plus proche (V. figure 8.3).

DÉFINITION 8.1. Le *rayon de convergence* de la série de puissance

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-a)^m,$$

est le plus grand nombre positif R tel que la série converge pour tout z dans le disque $|z-a| < R$.

On démontre deux critères de convergence pour les séries de puissances.

THÉORÈME 8.1 (Critères de convergence). *L'inverse du rayon de convergence R d'une série entière de centre a ,*

$$(8.1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-a)^m,$$

est égal à la limite supérieure :

$$(8.2) \quad \frac{1}{R} = \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m}.$$

On a aussi le critère :

$$(8.3) \quad \frac{1}{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|,$$

si cette limite existe.

DÉMONSTRATION. Le critère de convergence de CAUCHY affirme que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

converge si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |c_m|^{1/m} < 1.$$

Alors la série entière converge si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |a_m(z-a)^m|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} |z-a| < 1.$$

Soit R le maximum de $|z-a|$ tel que l'égalité

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} R = 1$$

soit satisfaite. S'il y a plusieurs limites, il faut prendre la limite supérieure. Ceci démontre le critère (8.2). Le second critère découle du critère de D'ALEMBERT qui affirme que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

converge si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|c_{m+1}|}{|c_m|} < 1.$$

Donc, la série de puissance converge si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|a_{m+1}(z-a)^{m+1}|}{|a_m(z-a)^m|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} |z-a| < 1.$$

Soit R le maximum de $|z - a|$ tel que l'égalité

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} R = 1$$

soit satisfaite. Ceci démontre le critère (8.3). \square

EXEMPLE 8.2. Trouver le rayon de convergence de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k^m} z^{3m}.$$

RÉSOLUTION. Par le critère de CAUCHY,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{m \rightarrow \infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k^m} \right|^{1/3m} = \frac{1}{|k|^{1/3}}.$$

Donc le rayon de convergence de la série est

$$R = |k|^{1/3}.$$

Pour employer le critère de D'ALEMBERT, on pose

$$w = z^3$$

dans la série qui devient

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k^m} w^m.$$

Alors le rayon de convergence de la nouvelle série est

$$\frac{1}{R_1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k^m}}{k^{m+1}} \right| = \left| \frac{1}{k} \right|.$$

Donc les séries convergent pour

$$|z^3| = |w| < |k|, \quad \text{c'est-à-dire } |z| < |k|^{1/3}. \quad \square$$

DÉFINITION 8.2. On dit que la fonction f est *analytique* dans le disque $D(a, R)$, de centre a et de rayon $R > 0$, si elle admet un développement de centre a ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

uniformément convergent dans tout disque fermé strictement contenu dans $D(a, R)$.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition précédente.

THÉORÈME 8.2. *Une fonction f analytique dans $D(a, R)$ admet la représentation*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

uniformément et absolument convergente dans $D(a, R)$. De plus $f(z)$ est indéfiniment dérivable :

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!} (z - a)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

dans $D(a, R)$.

DÉMONSTRATION. Puisque le rayon de convergence de la série dérivée terme à terme est R , le résultat découle du fait que la série dérivée converge uniformément dans tout disque fermé strictement contenu dans $D(a, R)$ et que $f(z)$ est différentiable sur $D(a, R)$. \square

EXEMPLE 8.3. Soit

$$y'' + 25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 13.$$

Trouver la solution en série de puissances :

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

RÉSOLUTION. Dans ce cas simple, on connaît déjà la solution générale :

$$y(x) = a \cos 5x + b \sin 5x.$$

Les constantes a et b sont déterminées par les conditions initiales :

$$y(0) = a = 3 \implies a = 3,$$

$$y'(0) = 5b = 13 \implies b = \frac{13}{5}.$$

On sait aussi que

$$\cos 5x = 1 - \frac{(5x)^2}{2!} + \frac{(5x)^4}{4!} - \frac{(5x)^6}{6!} + \dots$$

et

$$\sin 5x = 5x - \frac{(5x)^3}{3!} + \frac{(5x)^5}{5!} - \frac{(5x)^7}{7!} + \dots$$

Pour obtenir la solution en série, on pose

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

dans

$$y'' + 25y = 0;$$

alors

$$y''(x) = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + 5 \times 4a_5x^3 + 6 \times 5a_6x^4 + \dots$$

$$25y(x) = 25a_0 + 25a_1x + 25a_2x^2 + 25a_3x^3 + 25a_4x^4 + \dots$$

et l'on somme :

$$0 = (2a_2 + 25a_0) + (3 \times 2a_3 + 25a_1)x + (4 \times 3a_4 + 25a_2)x^2 + \dots, \quad \text{pour tout } x.$$

Puisque nous avons une identité en

$$1, x, x^2, x^3, \dots,$$

il suit que tous les coefficients sont nuls. Donc avec a_0 et a_1 indéterminés, on a

$$2a_2 + 25a_0 = 0 \implies a_2 = -\frac{5^2}{2!}a_0,$$

$$3 \times 2a_3 + 25a_1 = 0 \implies a_3 = -\frac{5^2}{3!}a_1,$$

$$4 \times 3a_4 + 25a_2 = 0 \implies a_4 = \frac{5^4}{4!}a_0,$$

$$5 \times 4a_5 + 25a_3 = 0 \implies a_5 = \frac{5^4}{5!}a_1,$$

etc., d'où l'on obtient le développement

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 \left[1 - \frac{1}{2!}(5x)^2 + \frac{1}{4!}(5x)^4 - \frac{1}{6!}(5x)^6 + \dots \right] \\ &\quad + \frac{a_1}{5} \left[5x - \frac{1}{3!}(5x)^3 + \frac{1}{5!}(5x)^5 - \dots \right] \\ &= a_0 \cos 5x + \frac{a_1}{5} \sin 5x. \end{aligned}$$

La condition initiale $y(0) = 3$ détermine a_0 :

$$a_0 = 3,$$

et la condition initiale $y'(0)$ détermine a_1 :

$$\frac{a_1}{5} = \frac{13}{5}, \quad a_1 = 13. \quad \square$$

On a le théorème général suivant pour les équations différentielles linéaires à coefficients analytiques.

THÉORÈME 8.3 (Existence de solutions en série). *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = r(x),$$

où f , g et r sont des fonctions analytiques au voisinage de a . Si R est le minimum des rayons de convergence des développements en série entière, de centre a , de f , g et r , alors l'équation différentielle admet une solution analytique de centre a et de rayon de convergence R .

DÉMONSTRATION. La démonstration se fait par la méthode des majorantes dans le plan complexe \mathbb{C} , qui consiste à trouver une série (à coefficients positifs)

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n,$$

absolument convergente dans $D(a, R)$ et dont les coefficients bornent en module ceux de la solution

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

c'est-à-dire

$$|a_n| \leq b_n. \quad \square$$

On emploiera les théorèmes 8.2 et 8.3 pour obtenir les solutions en série de puissances d'équations différentielles.

EXEMPLE 8.4. Résoudre

$$y' - xy - 1 = 0, \quad y(0) = 1$$

en série de puissances.

RÉSOLUTION. Posons

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

dans l'équation différentielle :

$$\left. \begin{array}{l} y' \\ -xy \\ -1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots \\ -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - \dots \\ -1 \end{array} \right.$$

La somme du 1er membre est nulle parce qu'on suppose que $y(x)$ est une solution de l'équation différentielle. Alors la somme du second membre est

$$0 = (a_1 - 1) + (2a_2 - a_0)x + (3a_3 - a_1)x^2 + (4a_4 - a_2)x^3 + \dots$$

Puisque nous avons une identité en x , le coefficient de chaque terme en x^s est nul pour $s = 0, 1, 2, \dots$. De plus, puisque l'équation différentielle est du 1er ordre, un des coefficients sera indéterminé. Donc,

$$\begin{aligned} a_1 - 1 = 0 &\implies a_1 = 1, \\ 2a_2 - a_0 = 0 &\implies a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_0 \text{ arbitraire,} \\ 3a_3 - a_1 = 0 &\implies a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}, \\ 4a_4 - a_2 = 0 &\implies a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{8}, \\ 5a_5 - a_3 = 0 &\implies a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{15}, \end{aligned}$$

ainsi de suite. La condition initiale $y(0) = 1$ implique que $a_0 = 1$. Donc la solution est

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \dots \quad \square$$

Dans les deux sections suivantes, on obtiendra la solution analytique de l'équation de LEGENDRE et on démontrera les relations d'orthogonalité des polynômes de LEGENDRE $P_n(x)$. À la dernière section, on présentera un résumé succinct de la théorie des fonctions holomorphes de CAUCHY. On peut passer directement de la première à la dernière section si on le désire.

8.2. L'équation de Legendre

On cherche la solution générale de l'équation de LEGENDRE :

$$(8.4) \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad -1 < x < 1,$$

sous forme de série de puissances de centre $a = 0$. On récrit l'équation sous forme standard :

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{n(n + 1)}{1 - x^2}y = 0.$$

Puisque

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{2x}{(1 - x)(1 + x)} = -2x[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots], \\ g(x) &= \frac{n(n + 1)}{(1 - x)(1 + x)} = n(n + 1)[1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots], \\ r(x) &= 0, \end{aligned}$$

on voit que f et g sont analytiques sur $-1 < x < 1$ et r est analytique partout.

Par le théorème 8.3, on sait que (8.4) admet deux solutions indépendantes et analytiques sur $-1 < x < 1$.

Posons

$$(8.5) \quad y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

dans (8.4), avec $k = n(n+1)$:

$$\left. \begin{array}{l} y'' \\ -x^2 y'' \\ -2xy' \\ ky \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 1a_2 + 3 \times 2a_3x + 4 \times 3a_4x^2 + 5 \times 4a_5x^3 + \dots \\ \qquad \qquad \qquad -2 \times 1a_2x^2 - 3 \times 2a_3x^3 - \dots \\ \qquad \qquad \qquad - \quad 2a_1x - 2 \times 2a_2x^2 - 2 \times 3a_3x^3 - \dots \\ ka_0 + \quad ka_1x + \quad ka_2x^2 + \quad ka_3x^3 + \dots \end{array} \right.$$

La somme de chacun des membres est nulle puisqu'on suppose que (8.5) est une solution :

$$\begin{aligned} 0 &= (2 \times 1a_2 + ka_0) + (3 \times 2a_3 - 2a_1 + ka_1)x \\ &\quad + (4 \times 3a_4 - 2 \times 1a_2 - 2 \times 2a_2 + ka_2)x^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + [(s+2)(s+1)a_{s+2} - s(s-1)a_s - 2sa_s + ka_s]x^s \\ &\quad + \dots, \quad \text{pour tout } x. \end{aligned}$$

Puisque nous avons une identité en x , chacun des coefficients de x^s , $s = 0, 1, 2, \dots$, est nul, et puisque l'équation (8.4) est du second ordre, deux des a_m seront indéterminés. On a donc

$$2!a_2 + ka_0 = 0 \implies a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0, \quad a_0 \text{ indéterminé,}$$

$$(3 \times 2)a_3 + (-2 + k)a_1 = 0 \implies a_3 = \frac{2 - n(n+1)}{3!}a_1, \quad a_1 \text{ indéterminé,}$$

$$\begin{aligned} (s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s &= 0 \\ \implies a_{s+2} &= -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

d'où

$$(8.6) \quad a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0, \quad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1,$$

$$(8.7) \quad a_4 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0, \quad a_5 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

etc. On peut donc écrire la solution de la forme :

$$(8.8) \quad y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

où

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \dots, \\ y_2(x) &= x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \dots \end{aligned}$$

Ces séries convergent pour $|x| < R = 1$. Puisque y_1 est paire et y_2 est impaire, il suit que

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{constante.}$$

Donc y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes et (8.8) est la solution générale.

COROLLAIRE 8.1. *Pour n pair, $y_1(x)$ est un polynôme pair*

$$y_1(x) = k_n P_n(x),$$

et de même, pour n impair, on a le polynôme impair

$$y_2(x) = k_n P_n(x),$$

où $P_n(x)$ est le polynôme de LEGENDRE de degré n , tel que $P_n(1) = 1$.

REMARQUE 8.1. On peut montrer que les séries donnant y_1 , resp. y_2 , divergent à $x = \pm 1$ si $n \neq 0, 2, 4, \dots$, resp. $n \neq 1, 3, 4, \dots$.

8.3. Les relations d'orthogonalité pour les $P_n(x)$

THÉORÈME 8.4. *Les polynômes de LEGENDRE $P_n(x)$ satisfont la relation d'orthogonalité suivante :*

$$(8.9) \quad \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On donnera deux démonstrations de la 2^e partie. La 1^{re} partie (c'est-à-dire pour $m \neq n$) découle de l'équation de LEGENDRE :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

réécrite sous forme de divergence :

$$L_n y := [(1 - x^2)y']' + n(n+1)y = 0.$$

Puisque P_m et P_n sont solutions respectivement de $L_m y = 0$ et $L_n y = 0$, on a

$$P_n(x)L_m(P_m) = 0, \quad P_m(x)L_n(P_n) = 0.$$

On intègre ces deux expressions de -1 à 1 :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x)[(1 - x^2)P_m'(x)]' dx + m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx &= 0, \\ \int_{-1}^1 P_m(x)[(1 - x^2)P_n'(x)]' dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

et l'on intègre le 1^{er} terme de chacune de ces expressions par parties :

$$\begin{aligned} P_n(x)(1 - x^2)P_m'(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n'(x)(1 - x^2)P_m'(x) dx \\ + m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0, \\ P_m(x)(1 - x^2)P_n'(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_m'(x)(1 - x^2)P_n'(x) dx \\ + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Les deux termes intégrés sont nuls et le terme suivant de chacune des équations est identique. Donc, par soustraction on obtient l'orthogonalité des P_n :

$$\begin{aligned} [m(m+1) - n(n+1)] \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx &= 0 \\ \implies \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx &= 0 \quad \text{pour } m \neq n. \end{aligned}$$

La 2^e partie, $m = n$, suit de la **formule de RODRIGUES** :

$$(8.10) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right] \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right] dx \\ &\quad \{\text{et intégrant par parties } n \text{ fois :}\} \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1) \right]_{-1}^1 \\ &\quad + (-1)^1 \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n dx \\ &\quad + \dots \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n dx \\ &\quad \{\text{et dérivant } 2n \text{ fois :}\} \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} \times \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!} (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 1 \times (x^2 - 1)^n dx \\ &\quad \{\text{et intégrant de nouveau par parties } n \text{ fois :}\} \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n! 2^n n!} \left[\frac{x}{1} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 + \frac{(-1)^1}{1!} 2n \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx \\ &\quad + \dots \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n! 2^n n!} (-1)^n \frac{2n 2(n-1) 2(n-2) \dots 2(n-(n-1))}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \int_{-1}^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{(-1)^n (-1)^n (2n)!}{2^n n! 2^n n!} \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{2n+1}. \quad \square \end{aligned}$$

REMARQUE 8.2. La formule de RODRIGUES se démontre par un calcul direct avec $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ou autrement.

On présente une 2^e démonstration de la formule :

$$\|P_n\|^2 := \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

au moyen de la **fonction génératrice** de $P_n(x)$:

$$(8.11) \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)t^k = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}.$$

DÉMONSTRATION. Élevons au carré chacun des deux membres :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^2(x)t^{2k} + \sum_{j \neq k} P_j(x)P_k(x)t^{j+k} = \frac{1}{1-2xt+t^2},$$

et intégrons par rapport à x de -1 à 1 :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{-1}^1 P_k^2(x) dx \right] t^{2k} + \sum_{j \neq k} \left[\int_{-1}^1 P_j(x)P_k(x) dx \right] t^{j+k} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2}.$$

Comme P_j et P_k sont orthogonaux pour $j \neq k$, le 2^e terme du 1^{er} membre est nul et nous obtenons après intégration du 2^e membre :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|P_k\|^2 t^{2k} &= -\frac{1}{2t} \ln(1-2xt+t^2) \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{t} [\ln(1-t) - \ln(1+t)]. \end{aligned}$$

On multiplie par t :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k\|^2 t^{2k+1} = -\ln(1-t) + \ln(1+t)$$

et l'on dérive par rapport à t :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \|P_k\|^2 t^{2k} &= \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{2}{1-t^2} \\ &= 2(1+t^2+t^4+t^6+\dots), \quad \text{pour tout } t, |t| < 1. \end{aligned}$$

Puisque nous avons une identité en t , on peut donc identifier les coefficients de t^{2k} :

$$(2k+1) \|P_k\|^2 = 2 \implies \|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \quad \square$$

REMARQUE 8.3. On peut obtenir la fonction génératrice (8.11) en développant le 2^e membre en une série de TAYLOR en puissances de x .

EXEMPLE 8.5. Calculer les trois premiers termes du développement de FOURIER-LEGENDRE de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

RÉSOLUTION. Posons

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x), \quad -1 < x < 1.$$

Alors,

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx.$$

Donc,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}, \\ a_1 &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2}, \\ a_2 &= \frac{5}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 x \frac{1}{2} (3x^2 - 1) dx = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

On a donc l'approximation

$$f(x) \approx \frac{1}{4} P_0(x) + \frac{1}{2} P_1(x) + \frac{5}{16} P_2(x). \quad \square$$

À l'exemple suivant, on trouve le développement de FOURIER–LEGENDE d'une fonction définie sur un intervalle fini quelconque.

EXEMPLE 8.6. Calculer les trois premiers termes du développement de FOURIER–LEGENDE de la fonction

$$f(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

RÉSOLUTION. Pour utiliser l'orthogonalité des polynômes de LEGENDE on transforme le domaine de $f(x)$ de $[0, 1]$ à $[-1, 1]$ au moyen de la substitution

$$s = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{s}{2} + \frac{1}{2}.$$

Alors,

$$f(x) = e^x = e^{(1+s)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(s), \quad -1 \leq s \leq 1,$$

où

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 e^{(1+s)/2} P_m(s) dx.$$

On calcule d'abord trois intégrales par récurrence :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-1}^1 e^{s/2} ds = 2 \left(e^{1/2} - e^{-1/2} \right), \\ I_1 &= \int_{-1}^1 s e^{s/2} ds = 2s e^{s/2} \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 e^{s/2} ds \\ &= 2 \left(e^{1/2} + e^{-1/2} \right) - 2I_0 \\ &= -2 e^{1/2} + 6 e^{-1/2}, \\ I_2 &= \int_{-1}^1 s^2 e^{s/2} ds = 2s^2 e^{s/2} \Big|_{-1}^1 - 4 \int_{-1}^1 s e^{s/2} ds \\ &= 2 \left(e^{1/2} + e^{-1/2} \right) - 4I_1 \\ &= 10 e^{1/2} - 26 e^{-1/2}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} e^{1/2} I_0 = e - 1 \approx 1.7183, \\ a_1 &= \frac{3}{2} e^{1/2} I_1 = -3e + 9 \approx 0.8452, \\ a_2 &= \frac{5}{2} e^{1/2} \frac{1}{2} (3I_2 - I_0) = 35e - 95 \approx 0.1399. \end{aligned}$$

On a donc l'approximation

$$f(x) \approx 1.7183P_0(2x-1) + 0.8452P_1(2x-1) + 0.1399P_2(2x-1). \quad \square$$

8.4. Remarques sur les fonctions holomorphes

Dans cette section, on fait le point entre la théorie des fonctions analytiques exposée à la section 8.1 et la théorie des fonctions holomorphes.

8.4.1. Les fonctions holomorphes.

NOTATION 8.1. Soit f une fonction à valeur complexe de la variable complexe $z = x + iy$. On écrit

$$(8.12) \quad \begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

où

$$(8.13) \quad u(x, y) = \Re f(x + iy), \quad v(x, y) = \Im f(x + iy)$$

sont respectivement les parties réelle et imaginaire de f .

DÉFINITION 8.3. Soit f une fonction complexe de la variable complexe définie dans un ouvert Ω du plan complexe \mathbb{C} . On dit que f est *holomorphe* dans Ω si elle est dérivable par rapport à la variable z en tout point z_0 de Ω , c'est-à-dire la limite suivante existe :

$$(8.14) \quad f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{\substack{h \in \mathbb{C} \\ h \rightarrow 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

REMARQUE 8.4. L'existence de la dérivée d'une fonction de la variable complexe est une notion beaucoup plus forte que dans le cas de la variable réelle car dans le cas complexe h peut approcher 0 dans toutes les directions du plan, alors que dans le cas réel, il n'y a que deux directions possibles.

REMARQUE 8.5. Il n'est pas nécessaire d'exiger la continuité de f' dans la définition 8.3; en effet elle découle de la simple existence de f' par un théorème de GOURSAT.

THÉORÈME 8.5. Une fonction $f = u + iv$ est holomorphe dans un ouvert Ω si et seulement si u et v satisfont les équations de CAUCHY-RIEMANN :

$$(8.15) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Par le théorème 8.2, une fonction analytique dans un disque $D(a, R)$:

$$(8.16) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n,$$

est holomorphe puisque z est holomorphe, et par conséquent z^n est holomorphe. On verra que la réciproque est également vraie.

8.4.2. Intégration dans \mathbb{C} . Soit γ un *chemin* continûment différentiable par morceaux dans \mathbb{C} , c'est-à-dire une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{C} et dérivable excepté en un nombre fini de points dans $]a, b[$. Lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ est un *lacet* ou chemin fermé.

DÉFINITION 8.4. Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , γ_1 et γ_2 deux chemins contenus dans Ω et définis sur $[0, 1]$. On dit que γ_1 est *homotope* à γ_2 dans Ω s'il existe une fonction continue $\varphi(t, s)$ pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, telle que :

$$(8.17) \quad \begin{aligned} \varphi(t, s) &\in \Omega, \quad \text{pour tout } (t, s), \\ \varphi(t, 0) &= \gamma_1(t), \quad \varphi(t, 1) = \gamma_2(t), \quad \text{pour tout } t, \\ \varphi(0, s) &= \gamma_1(0) = \gamma_2(0), \quad \varphi(1, s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1), \quad \text{pour tout } s. \end{aligned}$$

Deux lacets γ_1 et γ_2 sont *homotopes* dans Ω *en tant que lacets* si, outre les conditions (8.17), on a

$$\varphi(0, s) = \varphi(1, s), \quad \text{pour tout } s \in [0, 1].$$

En particulier si un lacet γ est homotope dans Ω à un lacet constant (c'est-à-dire dont l'image est réduite à un point constant $a \in \Omega$), on dit que γ est *homotope à un point* a de Ω .

DÉFINITION 8.5. Un ouvert connexe de Ω est dit *simplement connexe* si tout lacet dans Ω est homotope à un point dans Ω .

Deux chemins γ_1 et γ_2 sont donc homotopes si l'on peut déformer continûment γ_1 en γ_2 tout en restant dans Ω .

Passons à l'intégration d'une fonction continue sur un chemin.

DÉFINITION 8.6. Soient f une fonction complexe continue dans un ouvert Ω de \mathbb{C} et γ un chemin continûment différentiable à image incluse dans Ω . On définit l'*intégrale* de f le long de γ par l'intégrale de RIEMANN :

$$(8.18) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Lorsque γ est seulement continûment différentiable par morceaux, l'intégrale est définie par la somme

$$\sum_1^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

où les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ sont ceux où γ est continûment différentiable.

De cette définition, on déduit la majoration suivante :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} \{|f(z)|\} V(\gamma)$$

où $V(\gamma)$ désigne la longueur, ou *variation totale*, de γ :

$$V(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \right\}$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions t_0, \dots, t_n de $[a, b]$.

On énonce le résultat suivant sur l'existence de primitive d'une fonction holomorphe.

THÉORÈME 8.6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit f une fonction holomorphe dans Ω . Pour que f admette une primitive dans Ω il faut et il suffit que pour tout lacet γ à image incluse dans Ω on ait :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Si cette condition est vérifiée, toute primitive F de f dans Ω s'exprime par

$$F(z) = \int_{\gamma_0(z)} f(w) dw + c$$

où $\gamma_0(z)$ est un chemin tracé dans Ω , d'origine arbitraire $z_0 \in \Omega$ et d'extrémité z , et c une constante complexe arbitraire.

On définit l'indice d'un lacet au moyen d'une intégrale particulière. Soit un lacet $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et soit z_0 un point de \mathbb{C} n'appartenant pas à $\gamma([a, b])$. Alors l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

est bien définie et est égale à un entier relatif.

DÉFINITION 8.7. L'indice d'un point z_0 par rapport au lacet γ , pour $z_0 \notin \gamma$, est l'entier relatif

$$(8.19) \quad \text{Ind}(z_0; \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Intuitivement l'indice correspond au nombre de fois que le chemin tourne autour de z_0 . On a le théorème important suivant.

THÉORÈME 8.7 (Théorème de CAUCHY). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Si f est holomorphe dans Ω et si γ_1 et γ_2 sont deux lacets contenus dans Ω et homotopes comme lacets dans Ω on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

On a alors le corollaire suivant.

COROLLAIRE 8.2. Si Ω est un ouvert simplement connexe et si f est holomorphe dans Ω , alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad \text{pour tout lacet } \gamma \text{ dans } \Omega.$$

THÉORÈME 8.8 (Formule de CAUCHY). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Si f est holomorphe dans Ω et si z_0 est un point de $\Omega - \{\gamma\}$, $\{\gamma\}$ étant l'image d'un lacet γ contenu dans Ω , on a :

$$(8.20) \quad \text{Ind}(z_0; \gamma) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

THÉORÈME 8.9. Soit f holomorphe dans un ouvert Ω de \mathbb{C} , alors f est analytique dans Ω ; en particulier, par le théorème 8.2, $f(z)$ est indéfiniment dérivable dans Ω .

Par conséquent, une fonction est holomorphe si et seulement si elle est analytique.

COROLLAIRE 8.3. *Les parties réelle et imaginaire d'une fonction $f = u + iv$ holomorphe dans Ω sont harmoniques :*

$$(8.21) \quad \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

8.4.3. Théorie des résidus. Pour parler du calcul des résidus qui est très utile dans les applications, il convient d'introduire les séries de LAURENT.

Supposons que f est holomorphe dans une couronne circulaire

$$\Omega_{r,R}(z_0) = \{z; z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$$

de centre z_0 (r peut être nul et R peut être infini). Alors il existe des nombres complexes c_n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tels que la *série de LAURENT*

$$(8.22) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

converge uniformément et absolument dans la couronne. Les coefficients c_n sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

où γ est un cercle de centre z_0 contenu dans la couronne.

DÉFINITION 8.8. Un point z_0 est une *singularité isolée* f si

- (1) il existe un disque D de centre z_0 tel que f soit analytique dans $D - \{z_0\}$;
- (2) dans le développement en série de LAURENT autour de z_0 , il existe un $n < 0$ tel que $c_n \neq 0$.

Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction analytique f ; deux cas se présentent :

- (a) Il existe un $n \leq -1$ tel que $c_n \neq 0$ et tel que $p < n \implies c_p = 0$. Dans ce cas on dit que z_0 est un *pôle d'ordre $-n$* pour la fonction f .
- (b) Il existe une infinité de coefficients c_n (avec $n < 0$) non nuls. Dans ce cas, on dit que z_0 est un *singularité isolée essentielle*.

EXEMPLE 8.7. Les fractions rationnelles

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

où p et q sont des polynômes, n'admettent que des pôles. Les fonctions trigonométriques

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

n'admettent que des pôles d'ordre 1 (pôles simples) qui sont les zéros du dénominateur. La fonction

$$e^{1/z}$$

admet $z = 0$ comme singularité essentielle isolée.

Un *domaine* est une partie ouverte et connexe de \mathbb{C} .

DÉFINITION 8.9. Soit Ω un domaine de \mathbb{C} , $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans $\Omega - \{z_0\}$. Le *résidu* au point z_0 est défini par le coefficient c_{-1} du développement en série de LAURENT autour de z_0 . Donc :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

γ étant un cercle de rayon assez petit et de centre z_0 .

THÉORÈME 8.10 (Théorème des résidus). *Soient Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} , z_0, z_1, \dots, z_n des points distincts de Ω , f une fonction analytique dans $\Omega' = \Omega - \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$. Si γ est un lacet contenu dans Ω' , on a :*

$$(8.23) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=0}^n \text{Ind}(z_j, \gamma) \text{Res}(f, z_j).$$

Dans le calcul pratique des résidus, on a deux cas remarquables.

Cas d'un pôle simple: Supposons que $f = p/q$ où p et q sont analytiques au point z_0 avec $p(z_0) \neq 0$. Alors :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Cas d'un pôle multiple d'ordre k :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \frac{d^k}{dz^k} [(z-z_0)^k f(z)] \right\} \Big|_{z=z_0}.$$

8.4.4. Calcul d'intégrales de fonctions réelles par les résidus. On donne deux exemples pour illustrer la méthode.

Dans le premier exemple, on considère des intégrales portant sur des fonctions trigonométriques et étendues à une période. En utilisant la formule d'EULER :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

et la variable

$$z = e^{ix}$$

qui décrit le cercle unité dans le sens direct, on a

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x) dx = \int_{\gamma} f\left(\frac{z+1/z}{2}, \frac{z-1/z}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Le théorème des résidus s'applique ensuite à l'intégrale du second membre.

Le second exemple porte sur les intégrales de fonctions rationnelles. Soient p et q des polynômes, q sans racine réelle et degré $q > \text{degré } p + 1$. Pour calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

on applique le théorème des résidus à

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

et au contour γ (V. figure 8.4) :

$$\gamma = \{x; -R \leq x \leq R\} + \{z; |z| = R, \Im z \geq 0\}$$

en faisant tendre R vers l'infini et en montrant que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0. On obtient alors la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum \text{Res}\left(\frac{p}{q}, z_i\right)$$

où la somme est prise sur les zéros de q dans le demi-plan supérieur : $q(z_i) = 0$, $\Im z_i > 0$.

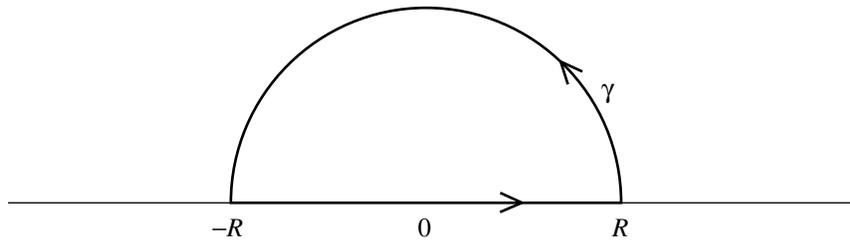


FIG. 8.4. Contour d'intégration γ de sens direct sur le bord du demi-cercle.

Exercices pour la section 8.1

Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes.

$$8.1. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{4^n} x^n.$$

$$8.2. \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k^m} x^{2m}.$$

$$8.3. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m)!}{(m!)^4} x^m.$$

$$8.4. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m m^2} x^m.$$

$$8.5. \sum_{m=1}^{\infty} m^{2m} x^m.$$

$$8.6. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} (x-1)^m.$$

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes en série de puissances entières.

$$8.7. y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$8.8. (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

$$8.9. y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0.$$

$$8.10. y'' - xy' + y = 0.$$

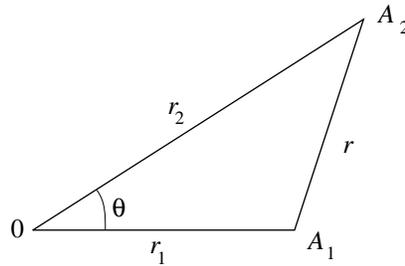


FIG. 8.5. La distance r du point A_1 au point A_2 pour l'exercice 13 de la section 8.3.

Exercices pour la section 8.3

8.11. Démontrer la formule de RODRIGUES (8.10).

8.12. Obtenir la fonction génératrice (8.11).

8.13. Soient A_1 et A_2 deux points dans l'espace (V. figure 8.5). Obtenir au moyen de (8.11) la formule

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \theta}} = \frac{1}{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m,$$

importante en théorie du potentiel.

8.14. Obtenir la récurrence de BONNET :

$$(8.24) \quad (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

(Indication : dériver la fonction génératrice (8.11) par rapport à t , substituer (8.11) dans la formule obtenue et comparer les coefficients de t^n .)

8.15. Calculer $P_4(0.7)$ au moyen de (8.24) et comparer avec la valeur obtenue en évaluant le polynôme $P_4(x)$.

Trouver les quatre premiers termes du développement de la fonction $f(x)$ au moyen des polynômes de LEGENDRE et tracer les trois premières sommes partielles.

$$8.16. \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$8.17. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$8.18. \quad f(x) = |x| \quad \text{si } 0 < x < 1.$$

$$8.19. \quad f(x) = e^x \quad \text{si } 0 < x < 2.$$

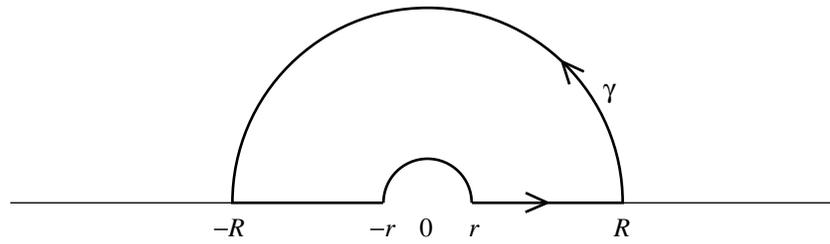


FIG. 8.6. Contour d'intégration γ de sens direct pour l'exercice 24 de la section 8.4.

Exercices pour la section 8.4

8.20. Intégrer la fonction $|z|$ de 0 à i le long des deux chemins :

$$\gamma_1 = [0, 1] \cup [1, i] \quad \text{et} \quad \gamma_2 = [0, i].$$

Déduire que la fonction $|z|$ n'est pas holomorphe.

8.21. Montrer que la partie réelle et la partie imaginaire de $\sin z$, c'est-à-dire

$$\sin x \cos y \quad \text{et} \quad \cos x \sin y,$$

satisfont les équation de CAUCHY-RIEMANN et sont par conséquent harmoniques.

8.22. Soit f une fonction holomorphe dans le disque $D(a, R)$ de centre en a et de rayon R . Soit

$$\gamma(t) = a + r e^{it}, \quad r < R, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

un lacet dans $D(a, R)$. Montrer :

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

De plus, si $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in D(a, R)$, déduire l'inégalité de CAUCHY :

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

8.23. Montrer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

8.24. Montrer :

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Indication : employer le contour γ dans la figure 8.6 et prendre les limites $R \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow 0$.)

8.25. Montrer :

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

La Méthode de Frobenius

9.1. Solutions en série de Frobenius

On énonce sans preuve le théorème suivant.

THÉORÈME 9.1. *Soit l'équation différentielle du type de FUCHS :*

$$(9.1) \quad y'' + \frac{a(x)}{x}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0,$$

où les fonctions

$$a(x) = a_0 + a_1x + \dots$$

et

$$b(x) = b_0 + b_1x + \dots$$

sont analytiques sur $-R < x < R$. Si r_1 et r_2 ($r_1 \geq r_2$) sont les racines de l'équation déterminante appelée aussi équation indicelle

$$(9.2) \quad r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0,$$

alors (9.1) admet **toujours** une solution de la forme :

$$(9.3) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\ &= x^{r_1} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots), \quad c_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence de (9.3) est au moins égal à R .

La forme de la 2^e solution dépend de la différence $r_1 - r_2$. On distingue 3 cas.

Cas 1: Si $0 < r_1 - r_2 \neq$ entier, alors

$$(9.4) \quad y_2(x) = x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^m, \quad c_0^* \neq 0;$$

Cas 2: Si $r_1 = r_2$, alors

$$(9.5) \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m, \quad x > 0, \quad A_1 \neq 0;$$

Cas 3: Si $0 < r_1 - r_2 = p$, un entier positif, alors

$$(9.6) \quad y_2(x) = ky_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad x > 0, \quad C_0 \neq 0.$$

La solution dans le 1^{er} cas et dans le 3^e cas, si le terme logarithmique est absent ($k = 0$), s'obtient par la méthode de FROBENIUS proprement dite. La solution dans les cas 2 et 3, où apparaît le logarithme, s'obtient par la méthode des séries généralisées.

DÉFINITION 9.1. On dit que l'équation (9.1), aux coefficients $a(x)$ et $b(x)$ analytiques au voisinage de $x = 0$, admet le point singulier régulier $x = 0$.

9.2. La détermination des coefficients de la solution par récurrence

Posons

$$y(x) = c_0x^r + c_1x^{r+1} + c_2x^{r+2} + \dots$$

dans

$$(9.7) \quad x^2y'' + xa(x)y' + b(x)y = 0;$$

alors

$$\left. \begin{array}{l} x^2y'' \\ xa(x)y' \\ b(x)y \end{array} \right\} = \begin{cases} r(r-1)c_0x^r + (r+1)rc_1x^{r+1} + (r+2)(r+1)c_2x^{r+2} + \dots \\ [a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots][rc_0x^r + (r+1)c_1x^{r+1} + \dots] \\ [b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots][c_0x^r + c_1x^{r+1} + \dots] \end{cases}$$

$$0 = 0, \quad \text{pour tout } x.$$

Le coefficient de x^r :

$$r(r-1)c_0 + a_0rc_0 + b_0c_0 = 0,$$

ou, avec c_0 en évidence,

$$[r(r-1) + a_0r + b_0]c_0 = 0.$$

Si $c_0 \neq 0$, r est solution de l'équation indicelle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0;$$

alors c_0 est indéterminé.

Le coefficient de x^{r+1} : on a l'équation

$$(r+1)rc_1 + a_1rc_0 + a_0(r+1)c_1 + b_1c_0 + b_0c_1 = 0,$$

qu'on peut résoudre pour c_1 en fonction de c_0 :

$$[(r+1)r + a_0(r+1) + b_0]c_1 = -(a_1r + b_1)c_0.$$

Le coefficient de x^{r+2} : on a l'équation

$$(r+2)(r+1)c_2 + a_0(r+2)c_2 + a_1(r+1)c_1 + a_2rc_0 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0,$$

qu'on peut résoudre pour c_2 en fonction de c_0 et c_1 :

$$[(r+2)(r+1) + a_0(r+2) + b_0]c_2 = -[a_1(r+1) + b_1]c_1 - [a_2r + b_2]c_0.$$

On trouve ainsi par récurrence le coefficient c_s de x^{s+r} en fonction de c_0, \dots, c_{s-1} .

REMARQUE 9.1. Si r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation indicelle (9.2), alors les coefficients c_0 et c_0^* , A_1 et C_0 des solutions non nulles $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont non nuls.

9.3. Exemples

EXEMPLE 9.1. Trouver les solutions en série de l'équation

$$(9.8) \quad x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{5}{36}\right) y = 0.$$

RÉSOLUTION. On récrit (9.8) sous forme standard pour déterminer $a(x)$ et $b(x)$:

$$y'' + \frac{1}{x^2} \left(x^2 + \frac{5}{36}\right) y = 0;$$

alors

$$\begin{aligned} a(x) = 0 &\implies a_0 = 0, \\ b(x) = x^2 + \frac{5}{36} &\implies b_0 = \frac{5}{36}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire l'équation indiciale

$$\begin{aligned} r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0 &\implies r^2 - r + \frac{5}{36} = 0 \\ &\implies r_1 = \frac{5}{6}, \quad r_2 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Nous sommes dans le 1^{er} cas puisque

$$r_1 - r_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \neq \text{entier}.$$

La 1^{re} solution. Posons

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r_1}$$

dans (9.8); alors

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r_1)(m+r_1-1)c_m x^{m+r_1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r_1+2} + \frac{5}{36} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r_1} = 0.$$

Le coefficient de x^{r_1} : on obtient l'équation indiciale

$$r_1(r_1-1)c_0 + \frac{5}{36}c_0 = \left[r_1(r_1-1) + \frac{5}{36}\right]c_0 = 0.$$

Puisque $r_1 = 5/6$ est un zéro du facteur de c_0 , il suit que c_0 est indéterminé.

Le coefficient de x^{r_1+1} :

$$(1+r_1)(1+r_1-1)c_1 + \frac{5}{36}c_1 = 0,$$

$$\left(\frac{11}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{36}\right)c_1 = 0 \implies c_1 = 0.$$

Le coefficient de x^{s+r_1} :

$$\left(s + \frac{5}{6}\right) \left(s - \frac{1}{6}\right) c_s + c_{s-2} + \frac{5}{36}c_s = 0,$$

$$s \left(s + \frac{2}{3}\right) c_s + c_{s-2} = 0, \quad s = 2, 3, 4, \dots$$

Pour s impair :

$$c_1 = 0 \implies c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0.$$

Pour s pair ($s = 2p$) :

$$c_{2p} = -\frac{3}{4} \times \frac{c_{2p-2}}{p(3p+1)}$$

Donc

$$c_2 = -\frac{3}{4} \times \frac{c_0}{4}$$

$$c_4 = -\frac{3}{4} \times \frac{c_2}{2 \times 7} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{c_0}{2!4 \times 7}$$

$$c_6 = -\frac{3}{4} \times \frac{c_4}{3 \times 10} = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{c_0}{3!4 \times 7 \times 10},$$

etc. Donc

$$y_1(x) = c_0 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+5/6}}{p!1 \times 4 \times 7 \times \dots \times (3p+1)}.$$

La 2^e solution. Posons

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m+r_2}.$$

Le coefficient de x^{r_2} : on obtient l'équation indicelle

$$r_2(r_2 - 1)c_0^* + \frac{5}{36}c_0^* = \left[r_2(r_2 - 1) + \frac{5}{36}\right]c_0^* = 0.$$

Puisque $r_2 = 1/6$ est un zéro du facteur de c_0^* , il suit que c_0^* est indéterminé.

Le coefficient de x^{r_2+1} :

$$(1 + r_2)(1 + r_2 - 1)c_1^* + \frac{5}{36}c_1^* = 0,$$

$$\left(\frac{7}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{36}\right)c_1^* = 0 \implies c_1^* = 0.$$

Le coefficient de x^{s+r_2} :

$$\left(s + \frac{1}{6}\right)\left(s - \frac{5}{6}\right)c_s^* + c_{s-2}^* + \frac{5}{36}c_s^* = 0,$$

$$s\left(s - \frac{2}{3}\right)c_s^* + c_{s-2}^* = 0, \quad s = 2, 3, 4, \dots$$

Donc, pour s impair :

$$c_s^* = 0,$$

et pour s pair ($s=2p$) :

$$c_{2p}^* = -\frac{3}{4} \times \frac{c_{2p-2}^*}{p(3p-1)}.$$

La solution est donc

$$y_2(x) = c_0^* x^{1/6} + c_0^* \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{x^{2p+1/6}}{p!2 \times 5 \times \dots \times (3p-1)}. \quad \square$$

EXEMPLE 9.2. Trouver les solutions en série de l'équation

$$(9.9) \quad x(1-x)y'' + 2(1-2x)y' - 2y = 0.$$

RÉSOLUTION. On récrit (9.9) sous forme standard près de $x = 0$:

$$y'' + \frac{1}{x} \frac{2(1-2x)}{1-x} y' + \frac{1}{x^2} \left(\frac{-2x}{1-x} \right) y = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{2(1-2x)}{1-x} \\ &= 2(1-2x)(1+x+x^2+\dots) \quad (\text{analytique pour } |x| < 1) \\ &= 2 - 2x + \dots \quad (= a_0 + a_1x + \dots), \\ b(x) &= -\frac{2x}{1-x} \\ &= -2x - 2x^2 - \dots \quad (= b_0 + b_1x + \dots). \end{aligned}$$

Donc l'équation indicielle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0$$

est

$$r^2 + (2-1)r + 0 = 0, \quad \text{c'est-à-dire } r(r+1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$r_1 = 0 \quad \text{et} \quad r_2 = -1.$$

Donc,

$$r_1 - r_2 = 1, \quad \text{un entier} \implies \text{cas 3.}$$

La 1^{re} solution. Posons

$$y_1(x) = x^0 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

dans (9.9) :

$$xy'' - x^2y'' + 2y' - 4xy' - 2y = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^{m-1} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2mc_m x^{m-1} \\ - \sum_{m=1}^{\infty} 4mc_m x^m - \sum_{m=0}^{\infty} 2c_m x^m = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^0 :

$$2c_1 - 2c_0 = 0 \implies c_1 = c_0, \quad c_0 \text{ indéterminé.}$$

Le coefficient de x^1 :

$$\begin{aligned} 2 \times 1c_2 + 2 \times 2c_2 - 4 \times 1c_1 - 2c_1 &= 0, \\ 6c_2 - 6c_1 = 0 &\implies c_2 = c_1 = c_0. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^s :

$$\begin{aligned} (s+1)sc_{s+1} - s(s-1)c_s + 2(s+1)c_{s+1} - 4sc_s - 2c_s &= 0, \\ (s+1)(s+2)c_{s+1} - (s+1)(s+2)c_s = 0 &\implies c_{s+1} = c_s = c_0. \end{aligned}$$

Donc

$$y_1(x) = c_0 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{c_0}{1-x}.$$

La 2^e solution. Posons

$$y_2(x) = ky_1(x) \ln x + \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m-1}, \quad x > 0,$$

$$y_2'(x) = ky_1'(x) \ln x + ky_1(x) \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-2},$$

$$y_2''(x) = ky_1''(x) \ln x + 2ky_1'(x) \frac{1}{x} - ky_1(x) \frac{1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-3},$$

dans (9.9). Le facteur de $\ln x$ entre crochets :

$$k \ln x [x(1-x)y_1'' + 2(1-2x)y_1' - 2y_1],$$

est nul puisque $y_1(x)$ est solution de (9.9). Alors :

$$\begin{aligned} x(1-x) \left[2ky_1'(x) \frac{1}{x} - ky_1(x) \frac{1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-3} \right] \\ + 2(1-2x) \left[ky_1(x) \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-2} \right] - 2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Posons $c_0 = 1$; alors

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad y_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{x(1-x)2k}{x(1-x)^2} - \frac{x(1-x)k}{x^2(1-x)} + \frac{2(1-2x)k}{x(1-x)} + x(1-x) \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-3} \\ + 2(1-2x) \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-2} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m-1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-2} - \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)(m-2)c_m^* x^{m-1} \\ + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-2} - 4 \sum_{m=0}^{\infty} (m-1)c_m^* x^{m-1} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m^* x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^{-2} :

$$(-1)(-2)c_0^* + 2(-1)c_0^* = 0 \implies c_0^* \text{ indéterminé.}$$

Le coefficient de x^{-1} :

$$k - (-1)(-2)c_0^* - 4(-1)c_0^* - 2c_0^* = 0,$$

$$k + (-2 + 4 - 2)c_0^* = 0 \implies k = 0.$$

Le coefficient de x^0 :

$$2 \times 1c_2^* - 2c_1^* = 0 \implies c_2^* = c_1^*.$$

Le coefficient de x^1 :

$$\begin{aligned} 2 \times 1c_3^* + 2 \times 2c_3^* - 4 \times 1c_2^* - 2c_2^* &= 0, \\ 6c_3^* - 6c_2^* &= 0 \implies c_3^* = c_2^* = c_1^*. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^s :

$$\begin{aligned} (s+1)sc_{s+2}^* + 2(s+1)c_{s+2}^* - s(s-1)c_{s+1}^* - 4sc_{s+1}^* - 2c_{s+1}^* &= 0, \\ (s+1)(s+2)c_{s+2}^* - (s+1)(s+2)c_{s+1}^* &= 0 \implies c_{s+2}^* = c_{s+1}^* = c_1^*. \end{aligned}$$

Donc la 2^e solution est

$$y_2(x) = \frac{c_0^*}{x} + c_1^*(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{c_0^*}{x} + \frac{c_1^*}{1-x}.$$

Puisque la 2^e partie de cette solution :

$$\frac{c_1^*}{1-x},$$

est déjà contenue dans la 1^{re} solution

$$y_1(x) = \frac{c_0}{1-x},$$

on peut prendre

$$y_2(x) = \frac{c_0^*}{x}$$

avec c_0^* indéterminé. □

9.4. La solution générale dans le cas 3 avec $k = 0$

Si dans le cas 3 le terme logarithmique est absent ($k = 0$), on obtient la solution générale d'un seul coup avec $r = r_2 < r_1$ en posant

$$(9.10) \quad y(x) = x^{r_2}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_px^p + \dots)$$

si c_0 et c_p sont indéterminés où $p = r_1 - r_2 > 0$. Si, d'autre part, $k \neq 0$, alors (9.10) conduit à une contradiction. En pratique, on substitue (9.10) dans l'équation différentielle donnée. Si l'on trouve que c_0 et c_p sont indéterminés, alors k doit être nul et l'on peut déterminer, par récurrence, c_1, c_2, \dots, c_{p-1} au moyen de c_0 et c_{p+1}, c_{p+2}, \dots , au moyen de c_0 et c_p .

EXEMPLE 9.3. À titre d'exemple simple, considérons :

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

RÉSOLUTION. On voit que $r_1 = 0$ et $r_2 = -1$. Alors $p = 0 - (-1) = 1$ et avec $r = r_2$,

$$y(x) = x^{-1}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots).$$

En substituant $y(x)$ dans l'équation différentielle, on obtient que c_0 et c_1 sont indéterminés et

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{c_0}{1 \times 2} = \frac{c_0}{2!}, & c_3 &= \frac{c_1}{2 \times 3} = \frac{c_1}{3!}, \\ c_4 &= \frac{c_2}{3 \times 4} = \frac{c_0}{4!}, & c_5 &= \frac{c_3}{4 \times 5} = \frac{c_1}{5!}, \end{aligned}$$

etc., d'où

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{c_0}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \right) + \frac{c_1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) \\ &= \frac{c_0 \cosh x + c_1 \sinh x}{x}. \quad \square \end{aligned}$$

Pour un exemple où $k \neq 0$, voir $Y_n(x)$ à la section 10.2.

9.5. La méthode de la variation des paramètres

Dans les cas 2 et 3, si l'on a une expression fermée pour $y_1(x)$, on peut alors trouver $y_2(x)$ par la méthode de la variation des paramètres en posant

$$y_2(x) = y_1(x)u(x).$$

Alors $u(x)$ s'obtient par intégration.

À l'exemple 9.2,

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x};$$

posons alors

$$y_2(x) = \frac{u(x)}{1-x}$$

dans (9.9) :

$$[x(1-x)y_1'' + 2(1-2x)y_1' - 2y_1]u + x(1-x)[2y_1'u' + y_1u''] + 2(1-2x)y_1u' = 0.$$

Le premier crochet est nul parce que $y_1(x)$ est solution de (9.9). De

$$y_1(x) = \frac{1}{1-x}, \quad y_1'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

on obtient

$$xu'' + 2u' = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{2}{x};$$

alors

$$\int^x \frac{u''}{u'} dx = -\int^x \frac{2}{x} dx \implies \ln u' = \ln \frac{1}{x^2} + k_1,$$

$$u' = \frac{k_2}{x^2} \implies u = -\frac{k_2}{x} + k_3.$$

Donc

$$\begin{aligned} y_2(x) &= -\frac{1}{1-x} \frac{k_2}{x} + \frac{k_3}{1-x} \\ &= \frac{k_4}{x} + \frac{k_5}{1-x}, \end{aligned}$$

où l'on a employé un développement en fractions simples. Donc

$$y_2(x) = \frac{c_0^*}{x}$$

puisque

$$\frac{k_5}{1-x}$$

est déjà contenu dans $y_1(x)$.

Exercices pour le chapitre 9

Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de FROBENIUS.

9.1. $x^2y'' - y = 0$.

9.2. $xy'' - (3 + x)y' + 2y = 0$.

9.3. $xy'' + 2y' + xy = 0$.

9.4. $y'' + xy' + (1 - 2x^{-2})y = 0$.

9.5. $x^2y'' + 6xy' + (6 - 4x^2)y = 0$.

9.6. $xy' = (x + 1)y$.

L'Équation de Bessel

10.1. La solution $J_\nu(x)$ de première espèce

On résout l'équation de BESSEL

$$(10.1) \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

par la méthode de FROBENIUS. Si l'on réécrit cette équation sous forme standard

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{-\nu^2 + x^2}{x^2}y = 0,$$

on voit que

$$\begin{aligned} a(x) = 1 &\implies a_0 = 1, \\ b(x) = -\nu^2 + x^2 &\implies b_0 = -\nu^2, \end{aligned}$$

et que $a(x)$ et $b(x)$ sont analytiques partout. Dans ce cas, l'équation indicelle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0,$$

devient

$$r^2 - \nu^2 = 0.$$

Pour fixer les idées, prenons

$$\nu \geq 0.$$

Alors $r_1 = \nu$, $r_2 = -\nu$.

Pour obtenir la 1^{re} solution, posons

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\nu}$$

dans (10.1) :

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (m+\nu)(m+\nu-1)c_m x^{m+\nu} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+\nu)c_m x^{m+\nu} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\nu+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\nu} = 0. \end{aligned}$$

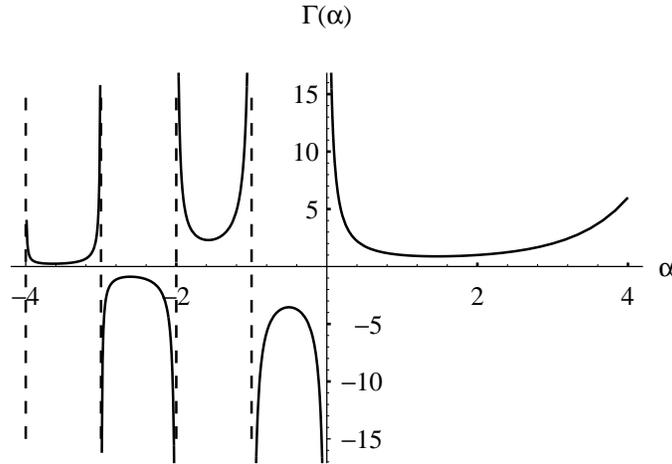
Le coefficient de chacune des puissances de x est nul parce que le second membre est identiquement nul.

Le coefficient de x^ν : on obtient l'équation indicelle :

$$[\nu(\nu-1) + \nu - \nu^2] c_0 = 0.$$

Donc

$$0 \times c_0 = 0 \implies c_0 \text{ est indéterminé.}$$

FIG. 10.1. La fonction $\Gamma(\alpha)$.

Le coefficient de $x^{\nu+1}$:

$$(\nu + 1)\nu c_1 + (\nu + 1)c_1 - \nu^2 c_1 = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(\nu^2 + 2\nu + 1 - \nu^2)c_1 = [(\nu + 1)^2 - \nu^2]c_1 = 0 \implies c_1 = 0.$$

Le coefficient de $x^{\nu+s}$:

$$(s + \nu)(s + \nu - 1)c_s + (s + \nu)c_s + c_{s-2} - \nu^2 c_s = 0, \quad s = 2, 3, \dots,$$

qui devient

$$(s + 2\nu)sc_s + c_{s-2} = 0;$$

donc

$$c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$$

et

$$(10.2) \quad c_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(\nu + m)} c_{2m-2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Pour normaliser les coefficients c_s , introduisons la fonction gamma :

$$\Gamma(\alpha), \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots,$$

(V. figure 10.1) qui est très utile en mathématiques et dans les applications.

DÉFINITION 10.1. La *fonction gamma* est définie par l'intégrale

$$(10.3) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

si $\alpha > 0$, et par la relation

$$(10.4) \quad \Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\alpha}$$

si $\alpha < 0$ et $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$

Cette fonction prolonge aux nombres réels, et même complexes, la factorielle $n!$ qui n'est définie que pour $n = 0, 1, 2, \dots$

THÉORÈME 10.1. *La fonction gamma satisfait la relation de récurrence :*

$$(10.5) \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas $\alpha > 0$. On substitue $\alpha + 1$ pour α dans (10.3) et l'on intègre par partie :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt \\ &= -e^{-t} t^\alpha \Big|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \\ &= \alpha \Gamma(\alpha). \quad \square \end{aligned}$$

Lorsque α est un entier positif n , $\Gamma(n + 1)$ se réduit à la factorielle $(n + 1)!$ comme on peut voir par récurrence :

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1 = 0!, \\ \Gamma(2) &= \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1!, \\ \Gamma(3) &= \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2!, \\ &\vdots \\ \Gamma(k + 1) &= k\Gamma(k) = k!. \end{aligned}$$

REMARQUE 10.1. $\Gamma(\alpha)$ possède des pôles simples en $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$, c'est-à-dire, près de ces points, disons $-n$,

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha - (-n)} + \text{fonction bornée.}$$

Maintenant, on normalise les coefficients (10.2). Puisque c_0 est indéterminé, posons

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{2^2(\nu + 1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu} 1! \Gamma(\nu + 2)}, \\ c_4 &= -\frac{c_2}{2^2 2(\nu + 2)} = \frac{1}{2^{4+\nu} 2! \Gamma(\nu + 3)}, \end{aligned}$$

et, en général,

$$(10.6) \quad c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

Donc

$$(10.7) \quad J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

C'est la fonction de BESSEL de 1^{re} espèce d'ordre ν . La série converge pour tout x puisqu'on a supposé que $\nu \geq 0$.

Pour $\nu = n$ un entier ≥ 0 , la série (10.7) devient

$$(10.8) \quad J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m! (n + m)!}.$$

Pour $r_2 = -\nu < 0$ pas un entier, la série (10.7) devient

$$(10.9) \quad J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)}.$$

THÉORÈME 10.2. *La solution générale de (10.1), pour $\nu \neq$ entier, est :*

$$(10.10) \quad y(x) = k_1 J_{\nu}(x) + k_2 J_{-\nu}(x).$$

DÉMONSTRATION. Puisque ν apparaît au carré dans l'équation différentielle (10.1), alors $J_{-\nu}$ est aussi une solution de (10.1). Si $\nu \neq$ entier,

$$\frac{J_{\nu}(x)}{J_{-\nu}(x)} \neq \text{constante};$$

donc dans ce cas J_{ν} et $J_{-\nu}$ sont linéairement indépendantes. \square

THÉORÈME 10.3. *Si $\nu = n$ est un entier, alors*

$$(10.11) \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

c'est-à-dire J_n et J_{-n} sont linéairement dépendantes.

DÉMONSTRATION. Par la représentation de J_{-n} en série on a

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! \Gamma(m-n+1)} \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m! (m-n)!} \end{aligned}$$

puisque

$$\frac{1}{\Gamma(0)} = 0, \quad \frac{1}{\Gamma(-1)} = 0, \quad \dots, \quad \frac{1}{\Gamma(-n+1)} = 0.$$

Par la substitution

$$s = m - n, \quad m = s + n,$$

dans la dernière série, on a

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n+s)! s!} \\ &= (-1)^n J_n(x). \quad \square \end{aligned}$$

10.2. La solution $Y_n(x)$ de seconde espèce

On note

$$Y_n(x) = y_2(x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

la fonction de BESSEL de 2^e espèce d'ordre n , où y_2 est la 2^e solution de (10.1). Son développement en série de FROBENIUS est

$$(10.12) \quad Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \left[\ln \left(\frac{x}{2} \right) + \gamma \right] + \frac{x^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (h_m + h_{m+n})}{2^{2m+n} m! (m+n)!} x^{2m} \\ - \frac{x^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n} m!} x^{2m},$$

où

$$x > 0, \quad h_0 = 0, \quad h_s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}, \quad s = 1, 2, 3, \dots,$$

et γ est la constante d'EULER :

$$\begin{aligned} \gamma &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s} - \ln s \right) \\ &= 0.577\,215\,664\,90\dots \end{aligned}$$

Cette constante est un nombre irrationnel. On remarque que

$$Y_n(x) \rightarrow -\infty \quad \text{avec } x \rightarrow 0+,$$

à cause de la présence du logarithme dans le premier terme de (10.12).

10.3. Les fonctions $J_{1/2}(x)$ et $J_{-1/2}(x)$

LEMME 10.1.

$$(10.13) \quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

et

$$(10.14) \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

DÉMONSTRATION. On sait que l'équation différentielle $y'' + y = 0$ admet les deux solutions indépendantes :

$$(10.15) \quad y_1(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$(10.16) \quad y_2(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

D'autre part, en posant

$$y = kx^{1/2}u(x)$$

dans $y'' + y = 0$, on obtient :

$$y'' + y = k \left(x^{1/2}u'' + x^{-1/2}u' - \frac{1}{4}x^{-3/2}u + x^{1/2}u \right) = 0,$$

et en multipliant le 2^e membre par

$$\frac{1}{k}x^{3/2}$$

on obtient :

$$x^2u'' + xu' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) u = 0.$$

C'est l'équation de BESSEL d'ordre $1/2$. Celle-ci admet les 2 solutions indépendantes :

$$\begin{aligned} u_1(x) = J_{1/2}(x) &= \frac{1}{2^{1/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right)} x^{1/2} - \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} x^{1/2} - \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} - \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_2(x) = J_{-1/2}(x) &= \frac{1}{2^{-1/2}} \frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)} x^{-1/2} - \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} x^{-1/2} - \dots, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

qui découle du lemme 10.2 qui suit. Donc

$$(10.17) \quad y_1(x) = kx^{1/2}J_{1/2}(x) = k\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x + a_2x^3 + a_3x^5 + \dots\right)$$

et

$$(10.18) \quad y_2(x) = kx^{1/2}J_{-1/2}(x) = k\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}1 + a_2^*x^2 + a_4^*x^4 + \dots\right).$$

Puisque dans (10.15) et (10.17) on a les mêmes puissances impaires de x , il suffit d'identifier les coefficients de x^1 de chacune des séries :

$$1 = k\sqrt{\frac{2}{\pi}};$$

on a donc

$$k = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ceci démontre (10.13).

On démontre (10.14) de la même façon en remarquant que les mêmes puissances paires de x apparaissent dans (10.16) et (10.18). \square

LEMME 10.2. *Montrer :*

$$(10.19) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

DÉMONSTRATION. Par la définition 10.1, on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2} dt.$$

Posons

$$t = x^2, \quad dt = 2x dx, \quad t^{-1/2} = x^{-1};$$

alors

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left[\int_0^\infty e^{-x^2} 2dx\right] \left[\int_0^\infty e^{-y^2} 2dy\right] \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Maintenant posons

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta;$$

alors

$$dxdy = r drd\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r \, d\theta \, dr \\ &= 4 \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r \, dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right] \Big|_0^\infty \\ &= \pi. \end{aligned}$$

donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

10.4. La relation d'orthogonalité pour les $J_\nu(x)$

Dans cette section, on dérive les relations d'orthogonalité pour les fonctions de BESSEL $J_n(x)$ de la première espèce d'ordre entier n .

THÉORÈME 10.4. *Les fonctions de BESSEL de 1^{re} espèce $J_n(x)$ satisfont les relations d'orthogonalité suivantes :*

$$(10.20) \quad \begin{aligned} (J_n(\lambda_{mn}x), J_n(\lambda_{kn}x)) &:= \int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) \, dx \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{kn}R), & m = k, \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

et α_{mn} est le m^e zéro positif de J_n .

DÉMONSTRATION. On commence par la 1^{re} partie ($m \neq k$) :

$$\int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) \, dx = 0, \quad m \neq k.$$

On sait que $J_n(x)$ satisfait l'équation de BESSEL

$$(10.21) \quad s^2 \ddot{J}_n(s) + s \dot{J}_n(s) + (s^2 - n^2) J_n(s) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad ' := \frac{d}{ds}.$$

Par la substitution

$$s = \lambda x, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda},$$

on a

$$\dot{J}_n = \frac{dJ_n}{ds} = \frac{dJ_n}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\lambda} J_n', \quad ' := \frac{d}{dx},$$

et

$$\ddot{J}_n = \frac{1}{\lambda^2} J_n''.$$

Alors (10.21) devient :

$$\begin{aligned} x^2 J_n''(\lambda x) + x J_n'(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - n^2) J_n(\lambda x) &= 0, \\ x J_n''(\lambda x) + J_n'(\lambda x) + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x \right) J_n(\lambda x) &= 0. \end{aligned}$$

On récrit cette dernière équation sous forme de divergence :

$$(10.22) \quad [xJ'_n(\lambda x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) J_n(\lambda x) = 0.$$

ce qui permet l'intégration par parties.

Posons $\lambda = \lambda_{mn}$ (resp. λ_{kn}) dans (10.22) et multiplions par $J_n(\lambda_{kn}x)$ (resp. $-J_n(\lambda_{mn}x)$) :

$$\begin{aligned} J_n(\lambda_{kn}x) \left\{ [xJ'_n(\lambda_{mn}x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda_{mn}^2 x\right) J_n(\lambda_{mn}x) \right\} &= 0, \\ -J_n(\lambda_{mn}x) \left\{ [xJ'_n(\lambda_{kn}x)]' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda_{kn}^2 x\right) J_n(\lambda_{kn}x) \right\} &= 0; \end{aligned}$$

additionnons :

$$\begin{aligned} (\lambda_{mn}^2 - \lambda_{kn}^2) x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) + J_n(\lambda_{kn}x) [xJ'_n(\lambda_{mn}x)]' \\ - J_n(\lambda_{mn}x) [xJ'_n(\lambda_{kn}x)]' = 0, \end{aligned}$$

et intégrons :

$$\begin{aligned} (\lambda_{mn}^2 - \lambda_{kn}^2) \int_0^R x J_n(\lambda_{mn}x) J_n(\lambda_{kn}x) dx \\ = - \int_0^R J_n(\lambda_{kn}x) [xJ'_n(\lambda_{mn}x)]' dx + \int_0^R J_n(\lambda_{mn}x) [xJ'_n(\lambda_{kn}x)]' dx \\ = -J_n(\lambda_{kn}x) x J'_n(\lambda_{mn}x) \Big|_0^R + \int_0^R J'_n(\lambda_{kn}x) x J'_n(\lambda_{mn}x) dx \\ + J_n(\lambda_{mn}x) x J'_n(\lambda_{kn}x) \Big|_0^R - \int_0^R J'_n(\lambda_{mn}x) x J'_n(\lambda_{kn}x) dx \\ = 0. \end{aligned}$$

Ceci complète la 1^{re} partie de (10.20).

On montre maintenant la 2^e partie ($m = k$). Multiplions (10.22) par $2xJ'_n(\lambda x)$:

$$\begin{aligned} 2xJ'_n(\lambda x) [xJ'_n(\lambda x)]' + 2xJ'_n(\lambda x) \left(\lambda^2 x - \frac{n^2}{x}\right) J_n(\lambda x) &= 0, \\ \left\{ [xJ'_n(\lambda x)]^2 \right\}' + (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n^2(\lambda x)\}' &= 0. \end{aligned}$$

On intègre par rapport à x de 0 à R :

$$(10.23) \quad [xJ'_n(\lambda x)]^2 \Big|_0^R = - \int_0^R (\lambda^2 x^2 - n^2) \{J_n^2(\lambda x)\}' dx.$$

Posons

$$\lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R}$$

et intégrons le 2^e membre de (10.23) par parties :

$$\begin{aligned} 2^e M &= - (\lambda_{mn}^2 x^2 - n^2) J_n^2(\lambda_{mn}x) \Big|_0^R + 2\lambda_{mn}^2 \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x) dx \\ &= 2\lambda_{mn}^2 \int_0^R x J_n^2(\lambda_{mn}x) dx \\ &=: 2\lambda_{mn}^2 \|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2. \end{aligned}$$

Pour calculer le 1^{er} membre de (10.23), on emploie l'identité

$$\frac{d}{ds}[s^{-n}J_n(s)] = -s^{-n}J_{n+1}(s),$$

c'est-à-dire

$$-ns^{-n-1}J_n(s) + s^{-n}\dot{J}_n(s) = -s^{-n}J_{n+1}(s),$$

que l'on multiplie par s^{n+1} :

$$-nJ_n(s) + s\dot{J}_n(s) = -sJ_{n+1}(s).$$

Posons

$$s = \lambda_{mn}x, \quad \cdot = \frac{d}{ds} = \frac{1}{\lambda_{mn}} \frac{d}{dx} =: \left(\frac{1}{\lambda_{mn}}\right)';$$

alors

$$xJ'_n(\lambda_{mn}x) = nJ_n(\lambda_{mn}x) - \lambda_{mn}xJ_{n+1}(\lambda_{mn}x).$$

Donc

$$\begin{aligned} 1^{\text{er}}M &= [xJ'_n(\lambda_{mn}x)]^2 \Big|_0^R \\ &= [nJ_n(\lambda_{mn}x) - \lambda_{mn}xJ_{n+1}(\lambda_{mn}x)]^2 \Big|_0^R \\ &= \lambda_{mn}^2 R^2 J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R). \end{aligned}$$

Alors

$$\|J_n(\lambda_{mn}x)\|^2 = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\lambda_{mn}R). \quad \square$$

10.5. Réduction d'une équation à l'équation de Bessel

On peut parfois trouver la solution générale d'une équation différentielle du second ordre par réduction à l'équation de BESSEL :

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

dont la solution est

$$y(x) = k_1J_\nu(x) + k_2J_{-\nu}(x)$$

si ν n'est pas un entier, et

$$y(x) = k_1J_n(x) + k_2Y_n(x)$$

si $\nu = n$ est un entier. On rappelle que $Y_n(x)$ admet une singularité à l'origine :

$$|Y_n(x)| \rightarrow \infty \quad \text{avec } x \rightarrow 0+.$$

Par exemple, si $\nu = 2$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 4)y = 0$$

admet la solution générale

$$y(x) = k_1J_2(x) + k_2Y_2(x).$$

Voici un exemple simple de réduction à l'équation de BESSEL. Si l'on multiplie l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0$$

par x , on obtient l'équation de BESSEL

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 0^2)y = 0$$

d'ordre 0, dont la solution est

$$y(x) = k_1 J_0(x) + k_2 Y_0(x).$$

On présente des exemples où l'on transforme soit la variable dépendante (ce qui est facile), soit la variable indépendante, soit les deux. Dans chaque cas, on indique entre parenthèses les substitutions à utiliser.

EXEMPLE 10.1. Trouver la solution générale de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad (z = \sqrt{x}),$$

en la réduisant à l'équation de BESSEL au moyen de la substitution indiquée.

RÉSOLUTION. On transforme la variable indépendante et, par abus de notation, on utilise y pour désigner $y(x)$ et $y(z) = y(x(z))$. Alors par la règle de la dérivée des fonctions composées :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dz} \left[\frac{dy}{dx} \right] \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2z} \frac{dy}{dz} \right] \frac{1}{2z} \\ &= \left[-\frac{1}{2z^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{2z} \frac{d^2y}{dz^2} \right] \frac{1}{2z} \\ &= -\frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2}. \end{aligned}$$

On substitue ces expressions dans l'équation différentielle et l'on simplifie :

$$\begin{aligned} z^2 \left[-\frac{1}{4z^3} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4z^2} \frac{d^2y}{dz^2} \right] + \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}y &= 0, \\ \frac{1}{4} \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{4z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{2z} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{4}y &= 0, \\ z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + z^2y &= 0. \end{aligned}$$

On obtient l'équation de BESSEL d'ordre 0 qui admet la solution générale :

$$y(z) = k_1 J_0(z) + k_2 Y_0(z).$$

Enfin, revenant à la variable indépendante x , on a :

$$y(x) = k_1 J_0(\sqrt{x}) + k_2 Y_0(\sqrt{x}). \quad \square$$

EXEMPLE 10.2. Résoudre :

$$xy'' - y' + xy = 0, \quad (y(x) = xu(x)).$$

RÉSOLUTION. On transforme la variable dépendante :

$$\begin{aligned} y' &= u + xu', \\ y'' &= 2u' + xu''; \end{aligned}$$

alors

$$x(2u' + xu'') - (u + xu') + x^2u = 0,$$

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - 1)u = 0,$$

$$u(x) = k_1 J_1(x) + k_2 Y_1(x).$$

La solution générale est donc

$$y(x) = k_1 x J_1(x) + k_2 x Y_1(x). \quad \square$$

EXEMPLE 10.3. Résoudre :

$$y'' + xy = 0, \quad \left(y = u\sqrt{x}, \quad \frac{2}{3}x^{3/2} = z \right).$$

RÉSOLUTION. On transforme d'abord la variable dépendante :

$$y = x^{1/2}u,$$

$$y' = x^{1/2}u' + \frac{1}{2}x^{-1/2}u,$$

$$y'' = x^{1/2}u'' + x^{-1/2}u' - \frac{1}{4}x^{-3/2}u;$$

donc

$$(10.24) \quad x^{1/2}u'' + x^{-1/2}u' - \frac{1}{4}x^{-3/2}u + x^{3/2}u = 0.$$

On transforme maintenant la variable indépendante par la substitution :

$$z = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad \frac{dz}{dx} = x^{1/2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{du}{dz} \frac{dz}{dx} \\ &= x^{1/2} \frac{du}{dz}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[x^{1/2} \frac{du}{dz} \right] \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \frac{du}{dz} + x^{1/2} \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz}{dx} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2} \frac{du}{dz} + x \frac{d^2u}{dz^2}. \end{aligned}$$

On substitue ces expressions dans l'équation différentielle (10.24) :

$$x^{3/2} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{dz} + \frac{du}{dz} - \frac{1}{4}x^{-3/2}u + x^{3/2}u = 0,$$

$$\frac{2}{3}x^{3/2} \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^{-3/2} \right) u = 0,$$

$$z \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \left(z - \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}z^{-1} \right) u = 0,$$

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9} \right) u = 0.$$

On a obtenu l'équation de BESSEL d'ordre $1/3$ qui admet la solution générale :

$$\begin{aligned} u(z) &= k_1 J_{1/3}(z) + k_2 J_{-1/3}(z), \\ u(x) &= k_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + k_2 J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Finalement, on revient à la variable dépendante y :

$$y(x) = k_1 \sqrt{x} J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + k_2 \sqrt{x} J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad \square$$

Exercices pour le chapitre 10

10.1. Montrer les relations de récurrence (V. (6.17) et (6.20)) :

$$(10.25) \quad [x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

et

$$(10.26) \quad [x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

à partir de (10.5) et (10.7).

10.2. Dédurre de (10.25) et (10.26) les relations de récurrence (V. (6.18) et (6.19)) :

$$(10.27) \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

et

$$(10.28) \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

10.3. À partir de (10.25), montrer :

$$(10.29) \quad \int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx = x^\nu J_\nu(x) + c.$$

10.4. À partir de (10.28), montrer :

$$(10.30) \quad \int J_{\nu+1}(x) dx = \int J_{\nu-1}(x) dx - 2J_\nu(x).$$

10.5. À partir de (10.26), montrer :

$$(10.31) \quad \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + c.$$

Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes par réduction aux équations de BESSEL.

$$10.6. \quad 4x^2 y'' + 4xy' + (x - \nu^2)y = 0, \quad (z(x) = \sqrt{x}).$$

$$10.7. \quad xy'' + (1 + 2n)y' + xy = 0, \quad (y(x) = x^{-n}u(x)).$$

$$10.8. \quad x^2 y'' + (x^2 + 1/4)y = 0, \quad (y(x) = \sqrt{x}(u(x))).$$

10.9. Montrer :

$$x^n = \frac{2J_n(\alpha_{n,1}x)}{\alpha_{n,1}J_{n+1}(\alpha_{n,1})} + \frac{2J_n(\alpha_{n,2}x)}{\alpha_{n,2}J_{n+1}(\alpha_{n,2})} + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

sur $0 \leq x \leq 1 = R$, où α_{nk} est le k^{e} zéro positif de $J_n(x)$. On remarque que $\alpha_{0,k} = \alpha_k$ et $\alpha_{1,k} = \beta_k$ sont les zéros respectifs de $J_0(x)$ et de $J_1(x)$.

Le Problème de Sturm–Liouville

11.1. La forme de divergence d’une équation différentielle

Toute équation différentielle du second ordre :

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad a_0(x) \neq 0,$$

peut s’écrire sous la forme de divergence :

$$[r(x)y']' + q(x)y = 0.$$

De fait,

$$r(x) = e^{\int [a_1(s)/a_0(s)] ds}$$

est un facteur d’intégration de

$$a_0(x)w' + a_1(x)w;$$

donc

$$\left[r(x)y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}r(x)y' \right] + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}r(x)y = 0$$

devient

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int (a_1/a_0) ds} y' \right] + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}r(x)y = 0,$$

c’est-à-dire

$$[r(x)y']' + q(x)y = 0.$$

11.2. Le problème de Sturm–Liouville

DÉFINITION 11.1. Le problème qui consiste à trouver les solutions non nulles sur $[a, b]$ de l’équation différentielle du 2^e ordre :

$$(11.1) \quad [r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$(11.2) \quad k_1y(a) + k_2y'(a) = 0, \quad (k_1, k_2) \neq (0, 0),$$

$$(11.3) \quad l_1y(b) + l_2y'(b) = 0, \quad (l_1, l_2) \neq (0, 0),$$

est un problème de STURM–LIOUVILLE. Les valeurs de λ qui donnent des solutions non nulles sont les *valeurs propres*, et les solutions non nulles correspondantes sont les *fonctions propres*. La fonction $p(x)$ s’appelle la *fonction poids*.

EXEMPLE 11.1. Soit

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{sur } [0, L],$$

avec les conditions aux limites

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Dans cet exemple, la fonction poids est

$$p(x) = 1$$

et les fonctions propres et valeurs propres sont

$$y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

EXEMPLE 11.2. Soit

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{sur } [0, L],$$

avec les conditions aux limites

$$y'(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Dans cet exemple $p(x) = 1$ et les fonctions propres et valeurs propres sont

$$y_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L}x, \quad \lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \square$$

Dans les deux sections suivantes, on modifiera les conditions aux limites (11.2) et (11.3) selon que $r(x)$ s'annule à l'un ou l'autre des points $x = a$ et $x = b$.

11.3. Les relations d'orthogonalité

Si les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ et $r'(x)$ en (11.1) sont réelles et continues sur $[a, b]$, alors les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes satisfont des relations d'orthogonalité.

En effet, soient y_m et y_n deux fonctions propres de

$$[r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0$$

associées à des valeurs propres distinctes, $\lambda_m \neq \lambda_n$. Alors

$$[r(x)y'_m]' + [q(x) + \lambda_m p(x)]y_m = 0$$

et

$$[r(x)y'_n]' + [q(x) + \lambda_n p(x)]y_n = 0.$$

On multiplie la 1^{re} équation par y_n :

$$y_n[r(x)y'_m]' + y_n[q(x) + \lambda_m p(x)]y_m = 0,$$

et la 2^e par $-y_m$:

$$-y_m[r(x)y'_n]' - y_m[q(x) + \lambda_n p(x)]y_n = 0,$$

et l'on additionne :

$$y_n[r(x)y'_m]' - y_m[r(x)y'_n]' + (\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n &= y_m[r(x)y'_n]' - y_n[r(x)y'_m]' \\ &= \frac{d}{dx}[r(x)(y_m y'_n - y_n y'_m)]. \end{aligned}$$

Maintenant on intègre sur $[a, b]$:

$$(11.4) \quad (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b p(x)y_m y_n dx = r(b)[y_m(b)y'_n(b) - y_n(b)y'_m(b)] \\ - r(a)[y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)y'_m(a)].$$

Si le 2^e membre est nul, alors on a les relations d'orthogonalité :

$$(11.5) \quad \int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|y_n\|^2, & m = n, \end{cases}$$

où la norme $\|y_n\|$ est définie par le 1^{er} membre. On considère cette question à la section suivante.

Si $p(x) > 0$ et $r(x) > 0$ sur $a < x < b$, le problème de STURM-LIOUVILLE admet une infinité de valeurs propres. Si, d'autre part, $p(x) > 0$ sur $a \leq x \leq b$, les valeurs propres sont réelles.

11.4. Problèmes réguliers et problèmes singuliers

On considère quatre problèmes dits singuliers ou réguliers selon que $r(a)$ ou $r(b)$ sont nuls ou non.

Cas 1: Problème régulier : $r(a) \neq 0$, $r(b) \neq 0$. Les conditions aux limites (11.2) et (11.3) satisfaites par les fonctions propres $y_m(x)$ et $y_n(x)$ correspondent aux deux systèmes linéaires homogènes :

$$\begin{bmatrix} y_m(a) & y'_m(a) \\ y_n(a) & y'_n(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} y_m(b) & y'_m(b) \\ y_n(b) & y'_n(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puisque, par hypothèse, chaque système admet une solution non nulle, il suit que le déterminant de la matrice des coefficients de chacun des systèmes est nul. Donc, les deux termes du second membre de (11.4), qui contiennent ces déterminants, sont nuls. Ceci démontre l'orthogonalité des fonctions propres $y_m(x)$ et $y_n(x)$ pour $m \neq n$.

Cas 2: Problème à un point singulier : $r(a) = 0$. Dans ce cas, une seule condition aux limites, en $x = b$, suffit :

$$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0.$$

On exige alors que y et y' soient bornées en $x = a$. On a une situation semblable quand $r(b) = 0$.

Cas 3: Problème à deux points singuliers : $r(a) = r(b) = 0$. (Voir l'exemple 11.4 où, pour l'équation de LEGENDRE, $r(x) = 1 - x^2$.) Dans ce cas, on n'a besoin d'aucune condition aux limites.

Cas 4: Problème périodique : $r(a) = r(b) \neq 0$. Dans ce cas on remplace (11.2) et (11.3) par les conditions aux limites périodiques :

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b), \\ y'(a) &= y'(b). \end{aligned}$$

EXEMPLE 11.3. Appliquer la théorie précédente à l'équation de BESSEL sur $[0, R]$:

$$[xy']' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda^2 x\right) y = 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$y(0) \text{ et } y'(0) \text{ bornées, } y(R) = 0.$$

RÉSOLUTION. On passe de l'équation de BESSEL d'ordre n :

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = 0,$$

à l'équation donnée par la substitution $z = \sqrt{\lambda}x$. La solution générale est donc :

$$y(x) = c_1 J_n(\sqrt{\lambda}x) + c_2 Y_n(\sqrt{\lambda}x).$$

Puisque Y_n n'est pas bornée en l'origine, $c_2 = 0$. Pour cette équation, le poids est

$$p(x) = x,$$

la fonction

$$q(x) = -\frac{n^2}{x}$$

n'est pas continue en $x = 0$ et

$$r(x) = x.$$

Comme

$$r(0) = 0,$$

les conditions données en $x = 0$ suffisent. Pour satisfaire la condition en $x = R$, il faut que $\sqrt{\lambda}R = \alpha_{mn}$, c'est-à-dire

$$\sqrt{\lambda_{mn}} = \frac{\alpha_{mn}}{R},$$

où les α_{mn} sont les zéros positifs de J_n . Puisque $r(0) = 0$, il suit de (11.4) que les solutions $J_n(\sqrt{\lambda_{mn}}x)$ sont orthogonales sur $[0, R]$. \square

EXEMPLE 11.4. Soit le problème de STURM-LIOUVILLE :

$$[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad \text{sur } [-1, 1],$$

avec les conditions aux limites :

$$y(-1), y(1), y'(-1) \text{ et } y'(1) \text{ bornées.}$$

Dans cet exemple $p(x) = 1$ et

$$y_n(x) = P_n(x), \quad \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Puisque

$$r(x) = 1 - x^2,$$

il suit que

$$r(a) = r(b) = 0.$$

Par conséquent aucune condition aux limites n'est requise et le problème de STURM-LIOUVILLE est singulier. \square

11.5. Polynômes orthogonaux

On a déjà vu, à l'exemple 1.6 et aux sections 8.2 et 8.3, que les polynômes de LEGENDRE $P_n(x)$ sont orthogonaux de poids $p(x) = 1$ sur $[-1, 1]$. On mentionne ici trois autres familles de polynômes orthogonaux, soit ceux de CHEBYSHEV, de LAGUERRE et d'HERMITE.

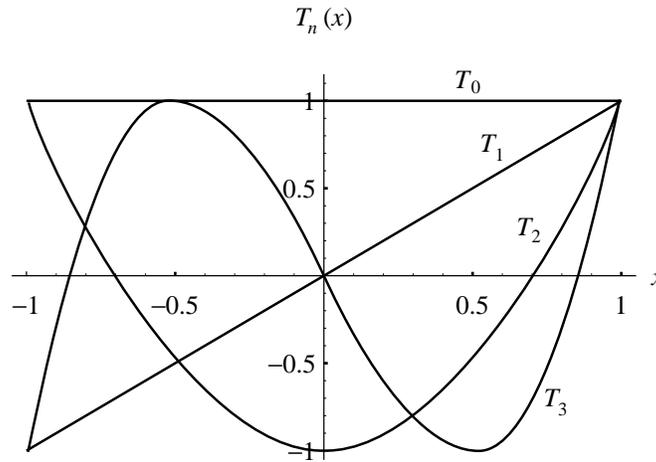


FIG. 11.1. Les 4 premiers polynômes de CHEBYSHEV.

11.5.1. Les polynômes de Chebyshev sur $-1 \leq x \leq 1$. On définit les polynômes de CHEBYSHEV sur $-1 \leq x \leq 1$ par l'expression :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Les 6 premiers sont (V. figure 11.1) :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

On peut obtenir les $T_n(x)$ par la récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Les $T_n(x)$ sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

et sont orthogonaux avec le poids

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} :$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Il est clair que

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

11.5.2. Les polynômes de Laguerre sur $0 \leq x < \infty$. On définit les polynômes de LAGUERRE sur $0 \leq x < \infty$ par l'expression :

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

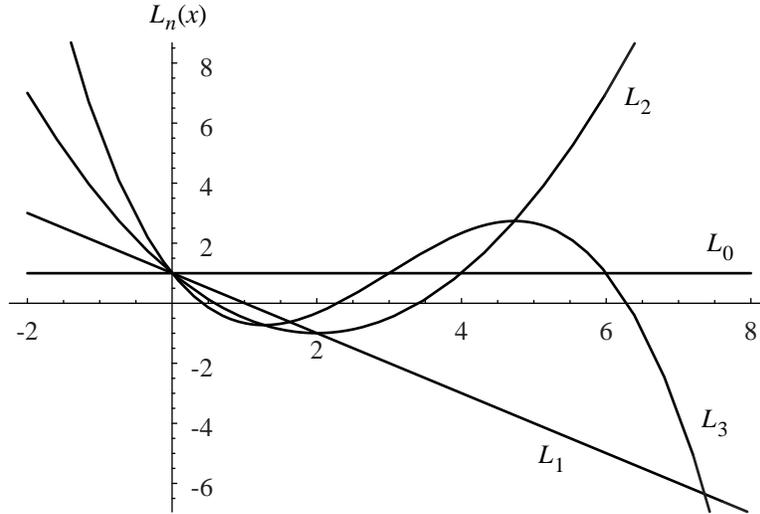


FIG. 11.2. Les 4 premiers polynômes de LAGUERRE.

Les 4 premiers sont (V. figure 11.2) :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= 1 - x, \\ L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2, & L_3(x) &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3. \end{aligned}$$

On peut obtenir les $L_n(x)$ par la récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Les $L_n(x)$ sont solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

et satisfont les relations d'orthogonalité avec le poids $p(x) = e^{-x}$:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

11.5.3. Les polynômes d'Hermite sur $-\infty < x < \infty$. On définit les polynômes d'HERMITE sur $-\infty < x < \infty$ par les expressions :

$$He_0(x) = 1, \quad He_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2/2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Les 5 premiers sont (V. figure 11.3) :

$$\begin{aligned} He_0(x) &= 1, & He_1(x) &= x, \\ He_2(x) &= x^2 - 1, & He_3(x) &= x^3 - 3x, \\ He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

On peut voir que

$$He_n(x) = n! a_n(x),$$

où $a_n(x)$ est le coefficient du développement de MACLAURIN :

$$(11.6) \quad e^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)t_n;$$

le 1^{er} M est la fonction génératrice des $He_n(x)$. On a relation :

$$(11.7) \quad He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - He'_n(x).$$

Si l'on dérive (11.6) par rapport à x , on obtient

$$He'_n(x) = nHe_{n-1}(x),$$

et par (11.7), $He_n(x)$ satisfait l'équation différentielle :

$$y'' - xy' + ny = 0,$$

d'où l'on voit que les $He_n(x)$ sont orthogonaux sur $-\infty < x < \infty$ avec la fonction poids :

$$p(x) = e^{-x^2/2},$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} He_m(x)He_n(x)e^{-x^2/2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{2\pi}, & m = n. \end{cases}$$

REMARQUE 11.1. On a aussi la définition des polynômes d'HERMITE, moins fréquente dans les applications :

$$H_0(x) = 1, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dans ce cas, les 6 premiers polynômes sont :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, & H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned}$$

On a relation :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Les $H_n(x)$ satisfont l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

et la relation d'orthogonalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

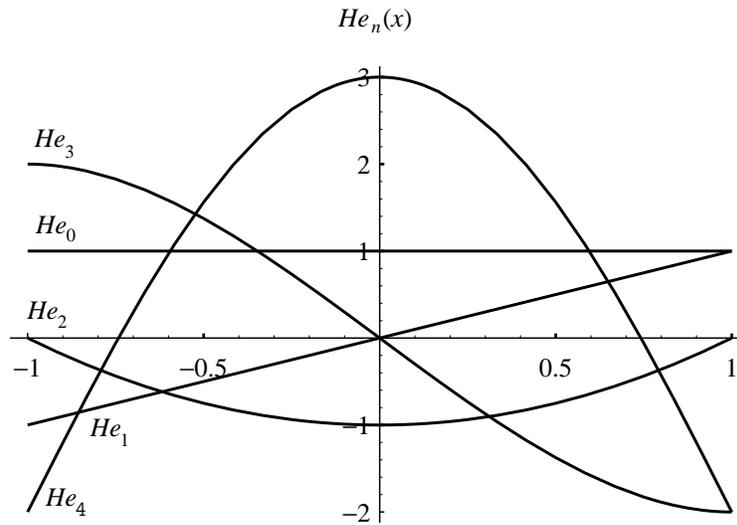


FIG. 11.3. Les 5 premiers polynômes d'HERMITE.

Exercices pour le chapitre 11

11.1. Montrer que les fonctions :

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots,$$

utilisées dans les développements de FOURIER, sont les fonctions propres du problème de STURM-LIOUVILLE :

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(\pi) = y(-\pi), \quad y'(\pi) = y'(-\pi).$$

Conclure que ces fonctions sont orthogonales sur $-\pi \leq x \leq \pi$.

11.2. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres des problèmes de STURM-LIOUVILLE

$$(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0.$$

(Indication : poser $x = e^t$.)

11.3. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres des problèmes de STURM-LIOUVILLE

$$(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

11.4. Écrire l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

sous forme de divergence.

11.5. Montrer que les polynômes de CHEBYSHEV satisfont l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

11.6. Montrer que les polynômes de LAGUERRE satisfont l'équation différentielle

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0.$$

11.7. Obtenir le polynôme d'HERMITE $He_5(x)$ par la récurrence :

$$He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - He'_n(x), \quad He_0 = 1, \quad He_1 = x.$$

Exemple d'examen final avec solutions

QUESTION 12.1. Trouver la série de FOURIER de

$$f(x) = x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

RÉSOLUTION. On présente trois solutions : (i) en série de sinus, (ii) en série de cosinus et (iii) en considérant f comme fonction 1-périodique sur $[-1/2, 1/2]$.

(i) Série de FOURIER de sinus avec $L = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

où

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= 2 \int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x \, dx \\ &= 2 \left\{ -\frac{1}{n\pi} x(1-x) \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 (1-2x) \cos n\pi x \, dx \right\} \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{1}{n\pi} (1-2x) \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x \, dx \right] \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} \left[-\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 \right] = -\frac{1}{n^3 \pi^3} [\cos n\pi - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ pair,} \\ \frac{8}{n^3 \pi^3}, & n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

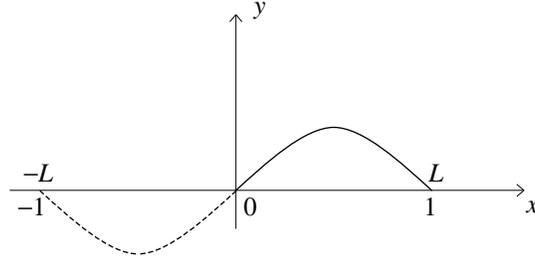
On a donc la solution :

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \sin n\pi x.$$

On remarque que les b_n sont de l'ordre $O(n^{-3})$ puisque la fonction f prolongée en fonction périodique impaire est continue de même que sa 1^{re} dérivée (V. figure 12.1).

(ii) Série de FOURIER de cosinus avec $L = 1$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x.$$

FIG. 12.1. Fonction $f(x)$ prolongée en fonction impaire.

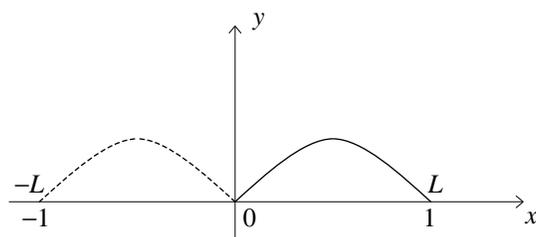
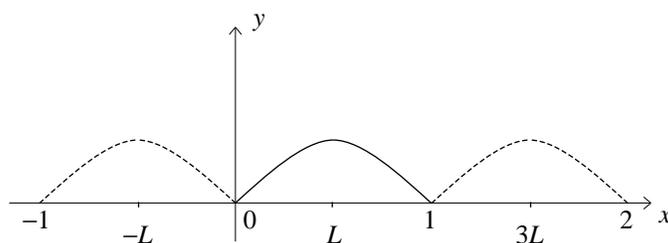
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{1}{1} \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}; \\
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (x - x^2) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \\
 &= 2 \int_0^1 (x - x^2) \cos n\pi x dx \\
 &= 2 \frac{1}{n\pi} \left[(x - x^2) \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 (1 - 2x) \sin n\pi x dx \right] \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi^2} \left[(1 - 2x) \cos n\pi x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \cos n\pi x dx \right] \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(1 - 2) \cos n\pi - 1 \cos 0] + \frac{4}{n^3 \pi^3} \sin n\pi x \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)(-1)^n - 1] \\
 &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^{n+1} - 1] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ impair,} \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n \text{ pair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

On a la solution

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{1}{n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cos 2m\pi x,$$

où la seconde série vient de la première en posant $m = n/2$. On remarque que les a_n sont de l'ordre $O(n^{-2})$ puisque la fonction f prolongée en fonction périodique paire est continue, mais sa 1^{re} dérivée ne l'est pas en $x = 0$ ni en $x = 1$ (V. figure 12.2).

- (iii) On prolonge f , définie sur $[0, 1]$, en fonction 1-périodique (V. figure 12.3) :

FIG. 12.2. Fonction $f(x)$ prolongée en fonction paire.FIG. 12.3. Fonction $f(x)$ sur $[0, 1]$ prolongée en fonction 1-périodique.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ f(x+1) &= f(x), \quad \text{pour tout } x. \end{aligned}$$

Alors $T = 2L = 1$ et $L = 1/2$. Le développement de FOURIER de f sur la période $[-1/2, 1/2]$ est

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right).$$

Puisque le prolongement périodique de f est une fonction paire, alors $b_n = 0$. On calcule a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{2}{2L} \int_0^{1/2} (x-x^2) dx \\ &= 2 \int_0^{1/2} (x-x^2) dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{1/2} \\ &= 2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = 2 \left(\frac{3}{24} - \frac{1}{24} \right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On calcule les a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-1/2}^{1/2} f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{1/2}x \right) dx \\ &= 2 \times 2 \int_0^{1/2} x(1-x) \cos 2n\pi x dx \\ &= \frac{4}{2n\pi} \left[x(1-x) \sin 2n\pi x \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} (1-2x) \sin 2n\pi x dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{(2n\pi)^2} \left[(1-2x) \cos 2n\pi x \Big|_0^{1/2} + 2 \int_0^{1/2} \cos 2n\pi x \, dx \right] \\
&= \frac{4}{(2n\pi)^2} \left[0 - \cos 0 \right] + \frac{8}{(2n\pi)^3} \sin 2n\pi x \Big|_0^{1/2} \\
&= -\frac{4}{(2n\pi)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;
\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x.$$

On obtient la même série qu'en (ii) puisqu'on utilise le même prolongement pair de f quoique sur des périodes différentes.

□

QUESTION 12.2. Développer

$$f(x) = 4x^4 + 2x^2 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en série de FOURIER-LEGENBRE.

RÉSOLUTION. D'abord on exprime x^0 , x^2 et x^4 selon les polynômes de LEGENDRE :

$$P_0(x) = 1 \implies x^0 = P_0(x);$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \implies 2P_2 = 3x^2 - 1 \implies 3x^2 = 2P_2 + P_0$$

$$\implies x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \implies 8P_4 = 35x^4 - 30x^2 + 3,$$

$$\implies 35x^4 = 8P_4 + 30x^2 - 3 = 8P_4 + 20P_2 + 10P_0 - 3P_0$$

$$\implies x^4 = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{4}{7}P_2(x) + \frac{1}{5}P_0(x).$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{32}{35}P_4(x) + \frac{16}{7}P_2(x) + \frac{4}{5}P_0(x) \\
&\quad + \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) \\
&\quad + P_0(x) \\
&= \frac{32}{35}P_4(x) + \frac{76}{21}P_2(x) + \frac{37}{15}P_0(x).
\end{aligned}$$

On remarque que dans le cas de polynômes, on obtient le développement sans intégration; en effet l'intégration a déjà été faite pour obtenir les polynômes de LEGENDRE. □

QUESTION 12.3. Résoudre le problème de la corde vibrante de longueur 6, fixée aux bouts :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 5u_{xx}, \\ u(0, t) &= u(6, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \begin{cases} 0.13x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0.13(6-x), & 3 \leq x \leq 6, \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0.02 \sin \frac{\pi}{2}x + 0.007 \sin \pi x. \end{aligned}$$

RÉSOLUTION. Posons :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\sqrt{5}n\pi}{6}t + b_n \sin \frac{\sqrt{5}n\pi}{6}t \right) \sin \frac{n\pi}{6}x.$$

Alors, de la condition initiale sur u il s'ensuit :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{6}x = \begin{cases} 0.13x, & 0 \leq x \leq 3, \\ 0.13(6-x), & 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

On évalue les coefficients de FOURIER :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{6} \left[\int_0^3 0.13x \sin \frac{n\pi}{6}x \, dx + \int_3^6 0.13(6-x) \sin \frac{n\pi}{6}x \, dx \right] \\ &= \frac{0.13}{3} \left[-\frac{6}{n\pi}x \cos \frac{n\pi}{6}x \Big|_0^3 + \frac{6}{n\pi} \int_0^3 \cos \frac{n\pi}{6}x \, dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{6}{n\pi}(6-x) \cos \frac{n\pi}{6}x \Big|_3^6 - \frac{6}{n\pi} \int_3^6 \cos \frac{n\pi}{6}x \, dx \right] \\ &= \frac{0.13}{3} \times \frac{6}{n\pi} \left[-3 \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{6}x \Big|_0^3 + 3 \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{6}x \Big|_3^6 \right] \\ &= \frac{0.13}{3} \times \frac{36}{n^2\pi^2} \left[\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \right] \\ &= \frac{0.13 \times 24}{n^2\pi^2} \times \begin{cases} +1, & n = 1, 5, 9, 13, \dots, \\ -1, & n = 3, 7, 11, 15, \dots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient la condition initiale sur u_t en dérivant la série terme à terme :

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}n\pi}{6} b_n \sin \frac{n\pi}{6}x \\ &= 0.02 \sin \frac{3\pi}{6}x + 0.007 \sin \frac{6\pi}{6}x. \end{aligned}$$

On obtient alors les b_n en identifiant les coefficients terme à terme :

$$b_3 = \frac{0.02 \times 6}{\sqrt{5} \times 3\pi}, \quad b_6 = \frac{0.007 \times 6}{\sqrt{5} \times 6\pi}, \quad b_n = 0, \quad n \neq 3, 6.$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{0.13 \times 24}{\pi^2} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{5}\pi}{6} t \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} x \right) - \frac{1}{9} \cos \left(\frac{\sqrt{5}(3\pi)}{6} t \right) \sin \left(\frac{3\pi}{6} x \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{25} \cos \left(\frac{\sqrt{5}(5\pi)}{6} t \right) \sin \left(\frac{5\pi}{6} x \right) - \dots \right] \\
 & + \frac{0.04}{\sqrt{5}\pi} \sin \left(\frac{\sqrt{5}(3\pi)}{6} t \right) \sin \left(\frac{3\pi}{6} x \right) + \frac{0.007}{\sqrt{5}\pi} \sin \left(\frac{\sqrt{5}(6\pi)}{6} t \right) \sin \left(\frac{6\pi}{6} x \right). \quad \square
 \end{aligned}$$

QUESTION 12.4. Soient deux sphères concentriques S_1 et S_2 de rayon respectivement $R_1 = 2$ et $R_2 = 5$, et de température ou potentiel :

$$u(2, \varphi) = 1 + \cos \varphi \quad \text{et} \quad u^*(5, \varphi) = \cos^2 \varphi.$$

Trouver la température :

- (a) $u(r, \varphi)$ dans S_1 ,
- (b) $u^*(r, \varphi)$ à l'extérieur de S_2 et
- (c) $v(r, \varphi)$ entre S_1 et S_2 .

RÉSOLUTION. (a) Le potentiel à l'intérieur de la petite sphère :

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \varphi), \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Par la condition au bord :

$$\begin{aligned}
 u(2, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n A_n P_n(\cos \varphi) \\
 &= 1 + \cos \varphi = P_0 + P_1(\cos \varphi).
 \end{aligned}$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Alors

$$u(r, \varphi) = 1 + \frac{r}{2} \cos \varphi.$$

(b) Le potentiel à l'extérieur de la grande sphère :

$$u^*(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \varphi), \quad r > 5.$$

Par la condition au bord :

$$\begin{aligned}
 u^*(5, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{5^{n+1}} P_n(\cos \varphi) \\
 &= \cos^2 \varphi = \frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} P_2(\cos \varphi).
 \end{aligned}$$

$$P_2(s) = \frac{1}{2} (3s^2 - 1) \implies s^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2(s).$$

Donc

$$B_0 = \frac{5}{3}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{2}{3} \times 5^3, \quad B_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

Alors :

$$\begin{aligned} u^*(r, \varphi) &= \frac{1}{3} \left(\frac{5}{r}\right) P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} \left(\frac{5}{r}\right)^3 P_2(\cos \varphi) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{5}{r}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{5}{r}\right)^3 (3 \cos^2 \varphi - 1). \end{aligned}$$

(c) Le potentiel entre les deux sphères :

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n \frac{1}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi),$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} v(2, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n a_n + \frac{1}{2^{n+1}} b_n \right) P_n(\cos \varphi) = P_0(\cos \varphi) + P_1(\cos \varphi), \\ v(5, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(5^n a_n + \frac{1}{5^{n+1}} b_n \right) P_n(\cos \varphi) = \frac{1}{3} P_0(\cos \varphi) + \frac{2}{3} P_2(\cos \varphi). \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on a les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{2} b_0 &= 1, & 2a_1 + \frac{1}{4} b_1 &= 1, & 4a_2 + \frac{1}{8} b_2 &= 0, \\ a_0 + \frac{1}{5} b_0 &= \frac{1}{3}, & 5a_1 + \frac{1}{25} b_1 &= 0, & 25a_2 + \frac{1}{125} b_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{9}, & a_1 &= -\frac{4}{117}, & a_2 &= \frac{2}{3} \times \frac{5^3}{5^5 - 2^5}, \\ b_0 &= \frac{20}{9}, & b_1 &= \frac{500}{117}, & b_2 &= -\frac{8}{3} \times \frac{10^3}{5^5 - 2^5}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{1}{9} \left(-1 + \frac{20}{r} \right) P_0(\cos \varphi) + \frac{1}{117} \left(-4r + \frac{500}{r^2} \right) P_1(\cos \varphi) \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{5^3}{5^5 - 2^5} \left(r^2 - \frac{32}{r^3} \right) P_2(\cos \varphi). \quad \square \end{aligned}$$

QUESTION 12.5. Résoudre le problème de la membrane circulaire vibrante fixée au bord :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \nabla^2 u, \quad 0 \leq r \leq 3, \quad t > 0, \\ u(3, t) &= 0, \\ u(r, 0) &= 0.1 (9 - r^2), \\ u_t(r, 0) &= 0.2 J_0 \left(\frac{\alpha_2}{3} r \right). \end{aligned}$$

où α_2 est le 2^e zéro positif de $J_0(x)$.

RÉSOLUTION. Posons :

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right).$$

De la condition initiale :

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) = 0.1 (9 - r^2) = f(r),$$

on obtient les B_n en développant $f(r)$ en série de FOURIER-BESSEL selon les $J_0(\alpha_n r/R)$:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) dr \\ &= \frac{0.2}{3^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^3 r (9 - r^2) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{3} r \right) dr \\ &= \frac{0.2}{3^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} s \frac{3^2}{\alpha_n^2} 9 \left(1 - \frac{s^2}{\alpha_n^2} \right) J_0(s) ds \\ &= \frac{0.2 \times 9}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} s \left(1 - \frac{s^2}{\alpha_n^2} \right) J_0(s) ds \\ &\quad \text{(on emploie : } x^\nu J_{\nu-1}(x) = [x^\nu J_\nu(x)]', \nu = 1) \\ &= \frac{0.2 \times 9}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} \left(1 - \frac{s^2}{\alpha_n^2} \right) [s J_1(s)]' ds \\ &= \frac{0.2 \times 9}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \left[\left(1 - \frac{s^2}{\alpha_n^2} \right) s J_1(s) \Big|_0^{\alpha_n} + \frac{2}{\alpha_n^2} \int_0^{\alpha_n} s^2 J_1(s) ds \right] \\ &= \frac{0.2 \times 9 \times 2}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} [s^2 J_2(s)]' ds \\ &= \frac{0.2 \times 9 \times 2}{\alpha_n^4 J_1^2(\alpha_n)} \left[s^2 J_2(s) \Big|_0^{\alpha_n} \right] \\ &= \frac{0.2 \times 9 \times 2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} J_2(\alpha_n) \\ &\quad \left(\text{on emploie : } J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \nu = 1 \right) \\ &= \frac{0.2 \times 9 \times 2}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \left[\frac{2}{\alpha_n} J_1(\alpha_n) - J_0(\alpha_n) \right] \\ &= \frac{0.2 \times 9 \times 2^2}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \\ &= \frac{0.8 \times 9}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}. \end{aligned}$$

On dérive la série terme à terme par rapport à t :

$$u_t(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda_n B_n \sin \lambda_n t + \lambda_n B_n^* \cos \lambda_n t) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right).$$

Alors on obtient les B_n^* de la condition initiale

$$\begin{aligned} u_t(r, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n^* J_0 \left(\frac{\alpha_n}{3} r \right) \\ &= 0.2 J_0 \left(\frac{\alpha_2}{3} r \right), \end{aligned}$$

et, en identifiant les coefficients,

$$\lambda_2 B_2^* = 0.2,$$

c'est-à-dire,

$$B_2^* = \frac{0.2}{\lambda_2} = \frac{3 \times 0.2}{\alpha_2} = \frac{0.6}{\alpha_2}, \quad B_n^* = 0, \quad n \neq 2.$$

On a enfin la solution :

$$u(r, t) = 0.8 \times 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)} \cos\left(\frac{\alpha_n}{3}t\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{3}r\right) + \frac{0.6}{\alpha_2} \sin\left(\frac{\alpha_2}{3}t\right) J_0\left(\frac{\alpha_2}{3}r\right). \quad \square$$

QUESTION 12.6. Évaluer $J_4(3)$.

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} J_4(3) &= \frac{2 \times 3}{3} J_3(3) - J_2(3) = 2J_3(3) - J_2(3) \\ &= 2 \left[\frac{2 \times 2}{3} J_2(3) - J_1(3) \right] - J_2(3) \\ &= \left(\frac{8}{3} - 1 \right) J_2(3) - 2J_1(3) \\ &= \frac{5}{3} \left[\frac{2 \times 1}{3} J_1(3) - J_0(3) \right] - 2J_1(3) \\ &= \left(\frac{10}{9} - 2 \right) J_1(3) - \frac{5}{3} J_0(3) \\ &= -\frac{8}{9} J_1(3) - \frac{5}{3} J_0(3) \\ &= -\frac{8}{9} \times 0.3391 - \frac{5}{3} (-0.2601) \\ &= -0.3014 + 0.4335 = 0.1321. \quad \square \end{aligned}$$

QUESTION 12.7. Intégrer $\int_0^3 x J_2(x) dx$.

RÉSOLUTION. 1^{re} solution : par $J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x J_2(x) dx &= \int_0^3 x J_0(x) dx - 2 \int_0^3 x J_1'(x) dx \\ &= \int_0^3 [x J_1(x)]' dx - 2x J_1(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 J_1(x) dx \\ &= x J_1(x) \Big|_0^3 - 2x J_1(x) \Big|_0^3 - 2J_0(x) \Big|_0^3 \\ &= 3J_1(3) - 6J_1(3) - 2[J_0(3) - J_0(0)] \\ &= -3J_1(3) - 2J_0(3) + 2 \\ &= -3 \times 0.3391 - 2(-0.2601) + 2 \\ &= -1.0173 + 0.5202 + 2 \\ &= 1.5029. \end{aligned}$$

2^e solution : par $J_{n-1}(x) - J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x J_2(x) dx &= \int_0^3 x \left(\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x) \right) dx \\ &= 2 \int_0^3 J_1(x) dx - \int_0^3 x J_0(x) dx \\ &= 2 \int_0^3 [-J_0(x)]' dx - \int_0^3 [x J_1(x)]' dx \\ &= -2 J_0(x) \Big|_0^3 - x J_1(x) \Big|_0^3 \\ &= -2 J_0(3) + 2 - 3 J_1(3) \\ &= -2(-0.2601) - 3 \times 0.3391 + 2 \\ &= 1.5029. \quad \square \end{aligned}$$

QUESTION 12.8. Trouver la solution générale de

$$2x^2 y'' + 5xy' - 2y = 0$$

par la méthode de FROBENIUS.

RÉSOLUTION. On récrit l'équation sous forme standard :

$$y'' + \frac{1}{x} \left(\frac{5}{2} \right) y' + \frac{1}{x^2} (-1) y = 0,$$

qu'on compare avec l'équation standard générale :

$$y'' + \frac{1}{x} a(x) y' + \frac{1}{x^2} b(x) y = 0;$$

ce qui nous donne

$$a_0 = \frac{5}{2}, \quad b_0 = -1.$$

Donc l'équation indiciale :

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0,$$

devient

$$r^2 + \left(\frac{5}{2} - 1 \right) r - 1 = 0,$$

d'où

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -2, \quad r_1 - r_2 = \frac{5}{2} \neq \text{entier}.$$

Nous sommes alors dans le 1^{er} cas.

Pour la 1^{re} solution $y_1(x)$, on considère r_1 :

$$\begin{aligned} y &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1/2}, \\ y' &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2} \right) a_m x^{m-1/2}, \\ y'' &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right) a_m x^{m-3/2}. \end{aligned}$$

Alors :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[2 \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right) + 5 \left(m + \frac{1}{2} \right) - 2 \right] a_m x^{m+1/2} = 0.$$

Les coefficients des $x^{m+1/2}$ sont tous nuls :

coeff. de $x^{1/2}$:

$$0 \times a_0 = 0 \implies a_0 \text{ indéterminé,}$$

coeff. de $x^{s+1/2}$:

$$s(2s + 5)a_s = 0 \implies a_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots$$

Donc :

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}.$$

Pour la 2^e solution $y_2(x)$, on considère r_2 :

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{m-2},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} [2(m-2)(m-3) + 5(m-2) - 2] b_m x^{m-2} = 0,$$

coeff. de x^{-2} :

$$0 \times b_0 = 0 \implies b_0 \text{ indéterminé,}$$

coeff. de x^{s-2} :

$$s(2s - 5)b_s = 0 \implies b_s = 0, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Donc :

$$y_2(x) = b_0 x^{-2}.$$

On a enfin la solution générale :

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-2}. \quad \square$$

REMARQUE 12.1. L'équation est une équation d'EULER-CAUCHY homogène ; elle peut donc être résolue directement par la substitution $x = r^\lambda$.

QUESTION 12.9. Trouver le potentiel entre deux cylindres coaxiaux, respectivement de rayon 3 et 5 et de potentiel $u(3) = 31$ et $u(5) = 47$.

RÉSOLUTION. Il s'agit d'un problème en deux dimensions pour $\nabla^2 u = 0$ avec solution $u(r)$ indépendante de θ . Donc :

$$u(r) = c \ln r + k.$$

Alors, les conditions au bord donnent :

$$u(3) = c \ln 3 + k = 31,$$

$$u(5) = c \ln 5 + k = 47.$$

On résout le système linéaire par la règle de CRAMER :

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 1 \\ 47 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln 3 & 1 \\ \ln 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{31 - 47}{\ln 3 - \ln 5} = -\frac{16}{\ln 3/5} = \frac{16}{\ln 5/3} = 31.32,$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} \ln 3 & 31 \\ \ln 5 & 47 \end{vmatrix}}{\ln 3/5} = \frac{47 \ln 3 - 31 \ln 5}{\ln 3/5} = -3.41. \quad \square$$

QUESTION 12.10. Déterminer le rayon de convergence de la série :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(3m)!}{(m!)^2} x^m.$$

RÉSOLUTION.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(3m+3)!}{[(m+1)!]^2} \frac{(m!)^2}{(3m)!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(3m)!(3m+3)(3m+2)(3m+1)}{[m!(m+1)]^2} \frac{(m!)^2}{(3m)!} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(3m+3)(3m+2)(3m+1)}{m^2 + 2m + 1} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^3 [(3 + 3/m)(3 + 2/m)(3 + 1/m)]}{m^2 [1 + 2/m + 1/m^2]} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} 27m = \infty. \end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{\infty} = 0,$$

est nul. □

Formulaire et Tables

Dans ce formulaire on suppose que les fonctions satisfont les conditions suffisantes pour assurer la convergence des séries et l'existence des solutions.

13.1. Séries de Fourier

1. La *série de FOURIER* de la fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[-L, L]$ est

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right),$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Si $f(x)$ est $2L$ -périodique, on peut aussi écrire

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où α est un nombre réel quelconque.

2. Si f est une fonction paire $2L$ -périodique, sa série de FOURIER se réduit à la *série de FOURIER de cosinus* de $f(x)$ sur $[0, L]$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

où

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Si f est une fonction impaire $2L$ -périodique, sa série de FOURIER se réduit à la *série de FOURIER de sinus* de $f(x)$ sur $[0, L]$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

où

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4. Les séries de FOURIER de cosinus et de sinus découlent des relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \text{ et } m, n > 0, \\ \frac{L}{2} & \text{si } m = n > 0, \end{cases}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \text{ et } m, n \geq 0, \\ \frac{L}{2} & \text{si } m = n > 0, \\ L & \text{si } m = n = 0, \end{cases}$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \text{ pour tout } m \geq 0 \text{ et tout } n \geq 0.$$

5. La *série de FOURIER complexe* ou exponentielle est

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi/L)x}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i(n\pi/L)x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

13.2. Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ sur $[-1, 1]$

1. L'équation différentielle de LEGENDRE :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

2. La solution $y(x) = P_n(x)$ explicite :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m},$$

où $[n/2]$ désigne le plus grand entier au plus égal à $n/2$.

3. La relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

4. La standardisation :

$$P_n(1) = 1.$$

5. La norme des $P_n(x)$:

$$\|P_n\| = \left(\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{1/2}.$$

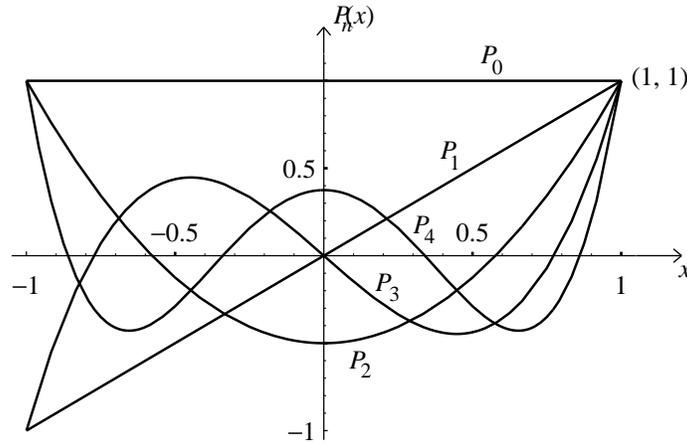


FIG. 13.1. Les 5 premiers polynômes de LEGENDRE.

6. La formule de RODRIGUES :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n].$$

7. La fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad -1 < x < 1, |t| < 1.$$

8. L'inégalité sur les $P_n(x)$:

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

9. Les 6 premiers polynômes de LEGENDRE (V. figure 13.1) :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

10. Développement de FOURIER-LEGENDRE de $f(x)$ sur $[-1, 1]$ suivant les $P_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

où

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

11. Développement de FOURIER-LEGENDRE de $f(\varphi)$ sur $[0, \pi]$ suivant les $P_n(\cos \varphi)$:

$$f(\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

où

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\varphi) P_n(\cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(\arccos w) P_n(w) \, dw, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

12. Le développement de FOURIER-LEGENDRE découle des relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

13.3. La fonction gamma

1. La fonction gamma $\Gamma(\nu)$ est définie par l'intégrale

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} \, dt$$

pour $\nu > 0$ et par la formule de récurrence

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu \Gamma(\nu)$$

pour $\nu < 0$, $\nu \neq -1, -2, -3, \dots$

2. La fonction factorielle $n!$ et la fonction gamma sont reliées par la relation de récurrence :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

13.4. Les fonctions de Bessel

1. L'équation différentielle de BESSEL pour x réel :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

2. Si ν n'est pas un entier, $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont deux solutions indépendantes, où

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

3. Si $\nu = n$ est un entier positif ou nul, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, où

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2^2 \times 1!(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 \times 2!(n+1)(n+2)} + \frac{x^6}{2^6 \times 3!(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

est une solution ; $Y_n(x)$ est une seconde solution indépendante, où

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

TAB. 1. Table des zéros α_m et β_m de $J_0(x)$ et $J_1(x)$ et des valeurs $J_1(\alpha_m)$ et $J_0(\beta_m)$.

m	Racines α_m	Valeurs $J_1(\alpha_m)$	Racines β_m	Valeurs $J_0(\beta_m)$
1	2.4048	0.5191	0.0000	1.0000
2	5.5201	-0.3403	3.8317	-0.4028
3	8.6537	0.2715	7.0156	0.3001
4	11.7915	-0.2325	10.1735	-0.2497
5	14.9309	0.2065	13.3237	0.2184
6	18.0711	-0.1877	16.4706	-0.1965
7	21.2116	0.1733	19.6159	0.1801

4. Les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x), & \nu J_{\nu}(x) + xJ'_{\nu}(x) &= xJ_{\nu-1}(x), \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2J'_{\nu}(x), & \nu J_{\nu}(x) - xJ'_{\nu}(x) &= xJ_{\nu+1}(x), \\ [x^{\nu} J_{\nu}(x)]' &= x^{\nu} J_{\nu-1}(x), & [x^{-\nu} J_{\nu}(x)]' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

5. Les fonctions de BESSEL d'ordre plus et moins une demie :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

6. La norme de $J_n(\alpha_{mn}x/R)$ d'ordre n un entier positif ou nul sur $[0, R]$:

$$\|J_n(\alpha_{mn} \cdot / R)\| = \left(\int_0^R x J_n^2(\alpha_{mn}x/R) dx \right)^{1/2} = \left(\frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{mn}) \right)^{1/2},$$

où

$$\alpha_{1,n} < \alpha_{2,n} < \alpha_{3,n} < \dots,$$

désignent les zéros positifs de $J_n(x)$.

7. Table des zéros α_m et β_m de $J_0(x)$ et $J_1(x)$, et des valeurs $J_1(\alpha_m)$ et $J_0(\beta_m)$ (V. tableau 1).

8. Table des fonctions de BESSEL $J_0(x)$ et $J_1(x)$ (V. tableau 2).

9. L'intégrale de J_0 de 0 à $x \in [0, 10]$,

$$y(x) = \int_0^x J_0(s) ds, \quad x \in [0, 10],$$

(V. figure 13.3).

10. Développement de FOURIER-BESSEL de $f(r)$ sur $]0, R[$ suivant les fonctions $J_n(\alpha_{mn}r/R)$ d'ordre entier $n \geq 0$ fixé :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(\alpha_{mn}r/R), \quad 0 < r < R,$$

où $J_n(\alpha_{mn}) = 0$ et

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R r f(r) J_n(\alpha_{mn}r/R) dr, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

TAB. 2. Table des fonctions de BESSEL $J_0(x)$ et $J_1(x)$.

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.0	1.0000	.0000	5.0	-.1776	-.3276	10.0	-.2459	.0435
0.1	.9975	.0499	5.1	-.1443	-.3371	10.1	-.2490	.0184
0.2	.9900	.0995	5.2	-.1103	-.3432	10.2	-.2496	-.0066
0.3	.9976	.1483	5.3	-.0758	-.3460	10.3	-.2477	-.0313
0.4	.9604	.1960	5.4	-.0412	-.3453	10.4	-.2434	-.0555
0.5	.9385	.2423	5.5	-.0068	-.3414	10.5	-.2366	-.0789
0.6	.9120	.2867	5.6	.0270	-.3343	10.6	-.2276	-.1012
0.7	.8812	.3290	5.7	.0599	-.3241	10.7	-.2164	-.1224
0.8	.8463	.3688	5.8	.0917	-.3110	10.8	-.2032	-.1422
0.9	.8075	.4059	5.9	.1220	-.2951	10.9	-.1881	-.1603
1.0	.7652	.4401	6.0	.1506	-.2767	11.0	-.1712	-.1768
1.1	.7196	.4709	6.1	.1773	-.2559	11.1	-.1528	-.1913
1.2	.6711	.4983	6.2	.2017	-.2329	11.2	-.1330	-.2039
1.3	.6201	.5220	6.3	.2238	-.2081	11.3	-.1121	-.2143
1.4	.5669	.5419	6.4	.2433	-.1816	11.4	-.0902	-.2225
1.5	.5118	.5579	6.5	.2601	-.1538	11.5	-.0677	-.2284
1.6	.4554	.5699	6.6	.2740	-.1250	11.6	-.0446	-.2320
1.7	.3980	.5778	6.7	.2851	-.0953	11.7	-.0213	-.2333
1.8	.3400	.5815	6.8	.2931	-.0652	11.8	.0020	-.2323
1.9	.2818	.5812	6.9	.2981	-.0349	11.9	.0250	-.2290
2.0	.2239	.5767	7.0	.3001	-.0047	12.0	.0477	-.2234
2.1	.1666	.5683	7.1	.2991	.0252	12.1	.0697	-.2157
2.2	.1104	.5560	7.2	.2951	.0543	12.2	.0908	-.2060
2.3	.0555	.5399	7.3	.2882	.0826	12.3	.1108	-.1943
2.4	.0025	.5202	7.4	.2786	.1096	12.4	.1296	-.1807
2.5	-.0484	.4971	7.5	.2663	.1352	12.5	.1469	-.1655
2.6	-.0968	.4708	7.6	.2516	.1592	12.6	.1626	-.1487
2.7	-.1424	.4416	7.7	.2346	.1813	12.7	.1766	-.1307
2.8	-.1850	.4097	7.8	.2154	.2014	12.8	.1887	-.1114
2.9	-.2243	.3754	7.9	.1944	.2192	12.9	.1988	-.0912
3.0	-.2601	.3391	8.0	.1717	.2346	13.0	.2069	-.0703
3.1	-.2921	.3009	8.1	.1475	.2476	13.1	.2129	-.0489
3.2	-.3202	.2613	8.2	.1222	.2580	13.2	.2167	-.0271
3.3	-.3443	.2207	8.3	.0960	.2657	13.3	.2183	-.0052
3.4	-.3643	.1792	8.4	.0692	.2708	13.4	.2177	.0166
3.5	-.3801	.1374	8.5	.0419	.2731	13.5	.2150	.0380
3.6	-.3918	.0955	8.6	.0146	.2728	13.6	.2101	.0590
3.7	-.3992	.0538	8.7	-.0125	.2697	13.7	.2032	.0791
3.8	-.4026	.0128	8.8	-.0392	.2641	13.8	.1943	.0984
3.9	-.4018	-.0272	8.9	-.0653	.2559	13.9	.1836	.1165
4.0	-.3971	-.0660	9.0	-.0903	.2453	14.0	.1711	.1334
4.1	-.3887	-.1033	9.1	-.1142	.2324	14.1	.1570	.1488
4.2	-.3766	-.1386	9.2	-.1367	.2174	14.2	.1414	.1626
4.3	-.3610	-.1719	9.3	-.1577	.2004	14.3	.1245	.1747
4.4	-.3423	-.2028	9.4	-.1768	.1816	14.4	.1065	.1850
4.5	-.3205	-.2311	9.5	-.1939	.1613	14.5	.0875	.1934
4.6	-.2961	-.2566	9.6	-.2090	.1395	14.6	.0679	.1999
4.7	-.2693	-.2791	9.7	-.2218	.1166	14.7	.0476	.2043
4.8	-.2404	-.2985	9.8	-.2323	.0928	14.8	.0271	.2066
4.9	-.2097	-.3147	9.9	-.2403	.0684	14.9	.0064	.2069

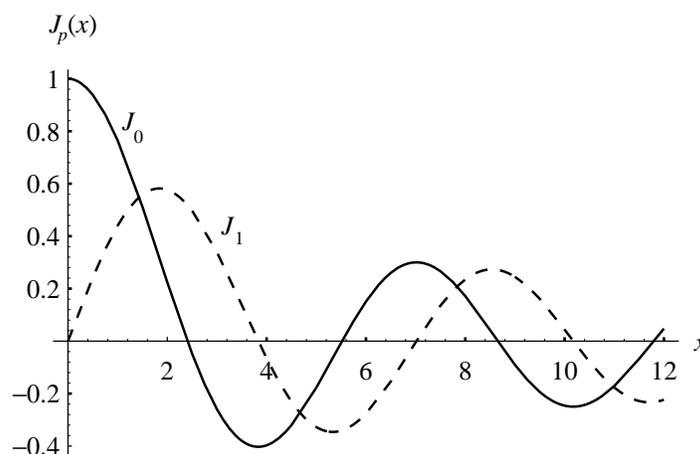


FIG. 13.2. Les fonctions de BESSEL $J_0(x)$ et $J_1(x)$ de première espèce d'ordre zéro et un (bornées à l'origine).

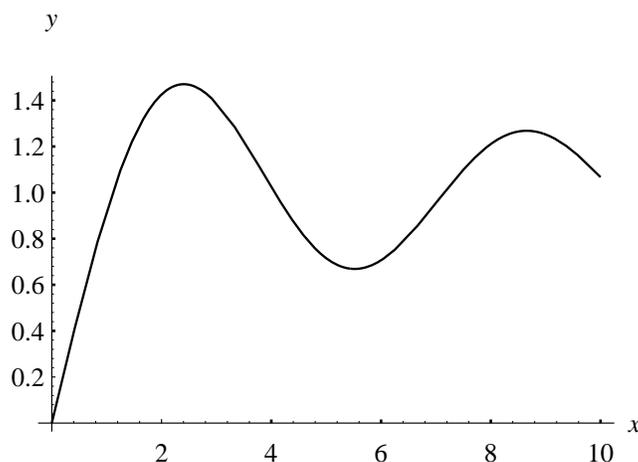


FIG. 13.3. Valeurs $y(x)$ de l'intégrale de J_0 de 0 à $x \in [0, 10]$.

11. Le développement de FOURIER-BESSEL découle des relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^R x J_n(\alpha_{kn}x/R) J_n(\alpha_{ln}x/R) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \text{ et } k, l > 0, \\ \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_{kn}) & \text{si } k = l > 0. \end{cases}$$

13.5. Solutions en série par la méthode de Frobenius

L'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}a(x)y' + \frac{1}{x^2}b(x)y = 0,$$

où

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

et

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$$

sont analytiques à $x = 0$ et r_1 et r_2 , $r_1 \geq r_2$, sont les racines de l'équation indicelle

$$r^2 + (a_0 - 1)r + b_0 = 0,$$

admet la solution en série :

$$y_1(x) = x^{r_1} (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots).$$

La forme de la 2^e solution dépend de la différence $r_1 - r_2$. Il y a 3 cas.

Cas 1: Si $r_1 - r_2 \neq$ entier :

$$y_2(x) = x^{r_2} (c_0^* + c_1^*x + c_2^*x^2 + \dots).$$

Cas 2: Si $r_1 = r_2$:

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_2} (c_1^*x + c_2^*x^2 + \dots).$$

Cas 3: Si $r_1 - r_2 = s$ un entier > 0 :

$$y_2(x) = ky_1(x) \ln x + x^{r_2} (c_0^* + c_1^*x + c_2^*x^2 + \dots).$$

Dans le 3^e cas, si l'on montre que c_0 et c_s sont indéterminés, alors k est nul et l'on obtient la solution générale de la forme

$$y(x) = x^{r_2} (c_0 + c_1x + \dots + c_sx^s + \dots).$$

Dans les cas 2 et 3, si l'on a une expression fermée pour $y_1(x)$, on peut trouver $y_2(x)$ par la méthode de la variation des paramètres en posant

$$y_2(x) = y_1(x)u(x).$$

Alors $u(x)$ s'obtient par intégration.

13.6. Le problème de Sturm–Liouville

1. Soit l'équation de STURM–LIOUVILLE sur $a \leq x \leq b$:

$$(13.1) \quad [r(x)y']' + [q(x) + \lambda p(x)]y = 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$(13.2) \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0),$$

$$(13.3) \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (\beta_1, \beta_2) \neq (0, 0).$$

Les valeurs de λ qui donnent des solutions non nulles sont les *valeurs propres*, et les solutions non nulles correspondantes sont les *fonctions propres*.

2. Si les fonctions $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ et $r'(x)$ sont réelles et continues sur $[a, b]$, alors les fonctions propres associées à des valeurs propres distinctes satisfont les relations d'orthogonalité

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ \|y_n\|^2, & \text{si } m = n. \end{cases}$$

3. Si $r(a) = 0$, on peut omettre (13.2). Si $r(b) = 0$, on peut omettre (13.3).
Si $r(a) = r(b)$, on peut remplacer (13.2) et (13.3) par

$$(13.4) \quad y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b).$$

Si, de plus, $p(x) > 0$ sur $[a, b]$, les valeurs propres λ_n sont réelles.

13.7. Développement de Fourier généralisé

1. Soit \mathcal{E} un ensemble de fonctions $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$ définies sur l'intervalle $[a, b]$ et orthogonales par rapport au produit scalaire

$$(13.5) \quad (\varphi_j, \varphi_k) = \int_a^b p(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx,$$

où $p(x) > 0$ pour $a \leq x \leq b$. On note

$$(13.6) \quad \|\varphi_n\| = (\varphi_n, \varphi_n)^{1/2}$$

la norme de $\varphi_n(x)$.

2. On associe à une fonction $f(x)$ définies sur $[a, b]$ la *série de FOURIER généralisée* :

$$(13.7) \quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad a < x < b,$$

où les coefficients de FOURIER généralisés sont

$$(13.8) \quad a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} (f, \varphi_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Si la série (13.7) converge dans le sens suivant :

$$\int_a^b p(x) \left(f(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right)^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{avec } N \rightarrow \infty,$$

alors on remplace le symbole \sim par le symbole $=$.

4. La meilleure approximation de $f(x)$ dans la norme quadratique (13.6) de poids $p(x)$ sur $[a, b]$ au moyen des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ de \mathcal{E} ,

$$y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_N \varphi_N(x),$$

s'obtient par le minimum

$$\min_{c_1, \dots, c_N} \int_a^b p(x) [c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_N \varphi_N(x) - f(x)]^2 dx.$$

Dans ce cas,

$$c_j = (f, \varphi_j) / \|\varphi_j\|^2.$$

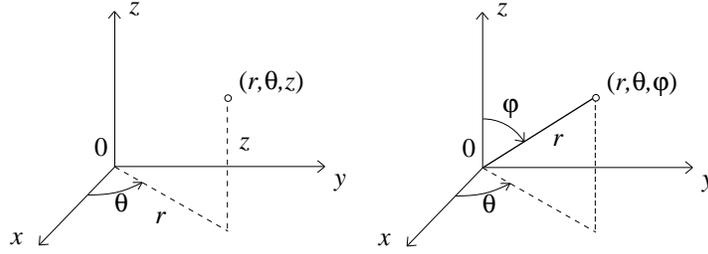


FIG. 13.4. Repères spatiaux : (a) polaire cylindrique et (b) sphérique.

13.8. Le laplacien $\Delta = \nabla^2$

1. En coordonnées cartésiennes, (x, y, z) .

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. En coordonnées polaires, (r, θ) , où (V. figure 13.4(a))

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

3. En coordonnées cylindriques, (r, θ, z) , où (V. figure 13.4(a))

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4. En coordonnées sphériques, (r, θ, φ) , où (V. figure 13.4(b))

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi.$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

13.9. Solutions générales par séparation de variables

1. Solution générale de l'équation des ondes,

$$u_{tt} = c^2 \nabla^2 u,$$

- (a) en coordonnées cartésiennes, (x, y, z) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (a \cos ckt + b \sin ckt)(\alpha \cos kx + \beta \sin kx), \\ u(x, y, t) &= (a \cos ckt + b \sin ckt)(\alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x) \\ &\quad \times (\gamma \cos \nu y + \delta \sin \nu y), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2; \end{aligned}$$

(b) en coordonnées cylindriques, (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} u(r, t) &= (a \cos ckt + b \sin ckt) J_0(kr), \\ u_n(r, \theta, t) &= (a_n \cos ck_n t + b_n \sin ck_n t) (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \\ &\quad \times J_n(k_n r), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ u(r, z, t) &= (a \cos ckt + b \sin ckt) (\alpha \cos \nu z + \beta \sin \nu z) \\ &\quad \times J_0(\mu r), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2; \end{aligned}$$

(c) en coordonnées sphériques, (r, θ, φ) :

$$u(r, t) = (a \cos ckt + b \sin ckt) \left(\frac{\alpha}{kr} \cos kr + \frac{\beta}{kr} \sin kr \right).$$

2. Solution générale de l'équation de la chaleur,

$$u_t = c^2 \nabla^2 u,$$

(a) en coordonnées cartésiennes, (x, y, z) :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-c^2 k^2 t} (\alpha \cos kx + \beta \sin kx), \\ u(x, y, t) &= e^{-c^2 k^2 t} (\alpha \cos \mu x + \beta \sin \mu x) \\ &\quad \times (\gamma \cos \nu y + \delta \sin \nu y), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2; \end{aligned}$$

(b) en coordonnées cylindriques, (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} u(r, t) &= a e^{-c^2 k^2 t} J_0(kr), \\ u_n(r, \theta, t) &= e^{-c^2 k_n^2 t} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \\ &\quad \times J_n(k_n r), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ u(r, z, t) &= e^{-c^2 k^2 t} (\alpha \cos \nu z + \beta \sin \nu z) \\ &\quad \times J_0(\mu r), \quad k^2 = \mu^2 + \nu^2; \end{aligned}$$

(c) en coordonnées sphériques, (r, θ, φ) :

$$u(r, t) = e^{-c^2 k^2 t} \left(\frac{\alpha}{kr} \cos kr + \frac{\beta}{kr} \sin kr \right).$$

3. Solution générale de l'équation du potentiel et de la chaleur stationnaire,

$$\nabla^2 u = 0,$$

(a) en coordonnées cylindriques, (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} u(r) &= c \ln r + k, \\ u_n(r, \theta) &= (a_n r^n + b_n r^{-n}) \cos n\theta \\ &\quad + (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

(b) en coordonnées sphériques, (r, θ, φ) :

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{c}{r} + k, \\ u_n(r, \varphi) &= \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

13.10. Séries usuelles

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, & |x| < 1, \\ \ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, & |x| < 1, \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \\ \arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}, & |x| < 1.\end{aligned}$$

Index

- d'ALEMBERT, solution de, 38
- amplitude
 - du signal, 77
- approximation en norme quadratique, 104
- base orthogonale de vecteurs, 9
- base orthonormée de vecteurs, 9
- chemin dans \mathbb{C} , 163
- chemins homotopes, 163
- conditions
 - au bord (C.B.), 2
 - aux limites (C.L.), 2
 - initiales (C.I.), 2
- conjugué d'un nombre complexe, 73
- convergence
 - d'une série de FOURIER, 67
- convergence d'une série
 - absolue, 150
 - uniforme, 150
- convolution, 80
 - discrète, 76
- coordonnées spatiales naturelles, 1
- corde vibrante, 3, 21
- critère de convergence de CAUCHY, 152
- critère de convergence de D'ALEMBERT, 152
- développement unique, 10
- demi-largeur de f , 83
- densité des neutrons dans un réacteur
 - cylindrique, 134
 - sphérique, 136
- déplacement simple, 22
- dérivée
 - à droite, 67
 - à gauche, 67
- domaine de \mathbb{C} , 165
- domaine géométrique, 1
- équation
 - d'EULER–CAUCHY, 90
 - d'EULER, 90
 - de BESSEL, 8, 114, 181, 197
 - de HELMHOLTZ, 140
 - de LAPLACE, 2, 89, 138, 143, 144
 - de LEGENDRE, 156, 197
 - de la chaleur, 2, 82
 - des ondes, 1
 - indicielle, 171
 - transcendante, 44
- équation
 - déterminante, 171
- espace $L^2[a, b]$, 107
- existence de solution analytique, 155
- factorielle, 182
- fonction
 - à décroissance rapide, 79
 - analytique, 153
 - d'HEAVISIDE, 79, 86
 - de DIRAC, 77
 - de BESSEL, 114, 220
 - d'ordre $1/2$ et $-1/2$, 185
 - de 1^{re} espèce, 183
 - de 2^e espèce, 184
 - de carré sommable, 77
 - génératrice
 - des $He_n(x)$, 201
 - des $P_n(x)$, 160
 - gamma, 182, 220
 - harmonique, 165
 - holomorphe, 162
 - impaire, 12
 - périodique, 59, 206
 - paire, 12
 - poids $p(x)$, 195
 - propre, 25, 47, 50, 116, 195, 224
 - rationnelle, 149
 - sommable, 77
- fonctions
 - orthogonales, 9, 103
 - orthonormées, 10
- forme de divergence d'une équation différentielle, 195
- formule de RODRIGUES
 - des $P_n(x)$, 159
- harmonique, n^e , 25
- hypothèse sur le modèle physique, 114

- hypothèse sur le modèle physique, 21
- identité d'EULER, 71, 73
- identités trigonométriques, 70
- identité
 - de PLANCHEREL, 86
- impulsion
 - décroissante
 - impaire, 78
 - paire, 78
- indice d'un point, 164
- intégrale de $f(x)$, 163
- lacet, 163
- lacet homotope à un point, 163
- lacets homotopes, 163
- laplacien, 226
 - en coordonnées cartésiennes, 6
 - en coordonnées polaires, 6, 113, 138, 143
 - en coordonnées sphériques, 89, 144
- ligne nodale, 48, 116
- longueur d'un chemin, 163
- masse critique, 136
- matrice
 - circulante, 76
 - de FOURIER F_n , 75
 - périodique, 76
- membrane vibrante
 - circulaire, 7, 113
 - rectangulaire, 45
- mesure de DIRAC, 77
- méthode
 - de FROBENIUS, 171, 181, 214
 - des séries généralisées, 171
- mode
 - fondamental, 25
 - normal, 25
- norme d'une fonction, 9
- ordre $1/n^k$ des coefficients de FOURIER, 68
- ouvert simplement connexe, 163
- partie imaginaire d'un nombre complexe, 73
- partie réelle d'un nombre complexe, 73
- période d'une fonction périodique, 59
- phénomène de GIBBS, 68
- pôle d'ordre $-n$ d'une fonction analytique, 165
- polynômes
 - d'HERMITE $H_n(x)$, 201
 - d'HERMITE $He_n(x)$, 200
 - de CHEBYSHEV $T_n(x)$, 199
 - de LAGUERRE $L_n(x)$, 199
 - de LEGENDRE $P_n(x)$, 11, 17, 158, 198, 218
 - orthogonaux, 198
- principe
 - d'incertitude d'HEISENBERG, 83
- problème du potentiel
 - pour 2 sphères concentriques, 94
- problème
 - en coordonnées polaires, 113
 - en coordonnées sphériques, 89
- problème de la chaleur
 - en 2 dimensions, 49
 - en une dimension, 38
- problème de STURM-LIOUVILLE, 117, 195
 - à 2 points singuliers, 197
 - à un point singulier, 197
 - périodique, 197
 - régulier, 197
- problème des ondes
 - d'une chaîne vibrante, 124
 - d'une corde vibrante
 - fixée aux bouts, 23, 27, 209
 - fixée en $x = 0$ et mobile en $x = L$, 33
 - mobile aux bouts, 29
 - mobile en $x = 0$ et fixée en $x = L$, 31
 - d'une membrane vibrante
 - circulaire, 211
 - en 2 dimensions, 45
 - en une dimension, 21
- problème du potentiel
 - pour 2 cylindres coaxiaux, 215
 - pour 2 sphères concentriques, 210
 - pour un cercle, 138
 - pour un rectangle, 51
 - pour une sphère, 89
- problème homogène, 26
- produit scalaire de fonctions, 9, 73, 103
- quadrature gaussienne, 107
 - à 2 points, 107
 - à 3 points, 108
- rayon de convergence d'une série, 152, 216
- réurrence de BONNET, 168
- réduction d'une équation à l'équation de BESSEL, 189
- règle de CRAMER, 37, 216
- relation d'orthogonalité
 - de fonctions propres, 197
 - des $\cos((2n-1)\pi x/2L)$ sur $[0, L]$, 15
 - des $\cos(n\pi x/L)$ et $\sin(n\pi x/L)$ sur $[-L, L]$, 13
 - des $\cos(n\pi x/L)$ sur $[0, L]$, 14
 - des $\sin((2n-1)\pi x/2L)$ sur $[0, L]$, 15
 - des $\sin(n\pi x/L)$ sur $[0, L]$, 14
 - des $J_0(x)$, 116
 - des $J_1(x)$, 122, 131
 - des $J_n(x)$, 187
 - des $L_n(x)$, 200
 - des $P_n(x)$, 158
 - des $T_n(x)$, 199
- repère spatial, 226
 - polaire cylindrique, 1, 226
 - sphérique, 1, 226

- résidu d'une fonction analytique, 165
- séparation des variables, 2
 - pour l'équation de LAPLACE, 90
 - pour un disque vibrant, 114
 - pour un rectangle vibrant, 46
 - pour une corde vibrante, 23
- série de FOURIER, 59, 217
 - complexe, 218
 - de cosinus, 15, 66, 205, 217
 - de forme eulérienne, 73
 - de sinus, 15, 66, 205, 218
 - généralisée, 103, 225
- série de FOURIER-LEGENDRE, 219
- série de FOURIER-BESSEL, 121
- série de FOURIER-LEGENDRE, 17, 208
- série de LAURENT, 165
- séries usuelles, 228
- singularité d'une fonction analytique, 165
- singularité essentielle, 165
- solution en série de FROBENIUS, 171
- somme partielle d'une série de FOURIER, 68
- suite complète de fonctions, 10
- suite orthogonale de fonctions, 9
- suite orthonormée de fonctions, 10
- superposition de solutions, 26
- température
 - d'un cylindre circulaire, 128
 - d'une plaque circulaire, 127
 - d'une plaque rectangulaire, 4, 49
 - d'une sphère, 99
 - d'une tige, 39-41, 43
- TFD/FFT, 75
- TFR/FFT, 76
- transformation
 - de FOURIER, 77
 - inverse, 77
 - rapide, 76
- transformée
 - de FOURIER, 77
 - inverse, 77
 - de FOURIER discrète, 75, 76
- valeur propre, 25, 47, 50, 116, 195, 224
- variation des paramètres, 178, 224
- variation totale d'un chemin, 163