(**CEG4561/CSI4541 – Chapitre 4, annexe)**

4.2. Les réseaux de Petri

4.2.1 Définitions

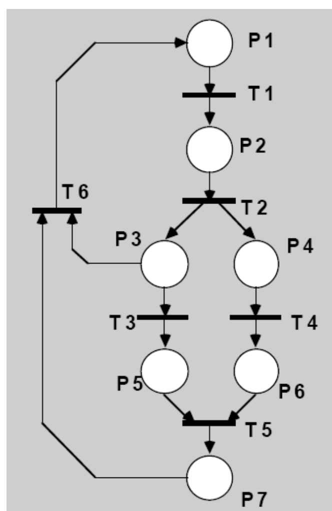
• Un *réseau de Petri* (RdP) est un graphe biparti constitué de 2 sortes de nœuds : Les *places* (représentées par des ronds) et les *transitions* (représentées par des barres).

• Le graphe est orienté : Des *arcs* vont d'une sorte de nœuds à l'autre (jamais de places à places, ou de transitions à transitions directement).

• Graphe formé de

- ensemble de places P = {P1, P2, P3,….}
- ensemble de transition T= {T1, T2, T3,….}
- marquage initial M= {m1, m2, m3,….}

Exemple :



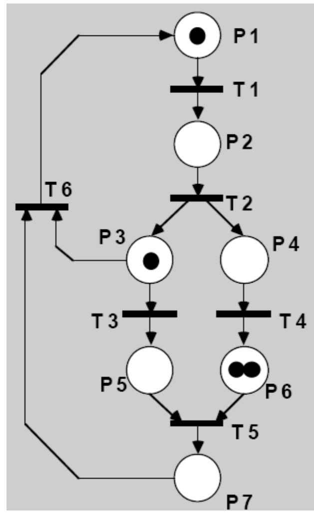
On dit que la place P2 est en amont ou est une entrée de la transition T2

On dira que la place P7 est en aval ou est une sortie de la transition T5

4.2.2. Marquage des places

• Les places sont *marquées* par des *jetons* ou *marques* (points noirs), un nombre entiers positifs ou nul.

• Les jetons circulent dans les places selon certaines règles (définies ci-dessous). Cette circulation symbolise l'évolution dynamique du système. Le *marquage initial* (celui indiqué sur le dessin) donne la position initiale des jetons.



Même Rdp que précédemment

avec marquage M=(1,0,1,0,0,2,0)

4.2.3 Franchissement de transition

Les règles de franchissement et de circulation des jetons sont :

a. Le franchissement d'une transition ne peut s'effectuer que si chacune des places en amont de cette transition contient au moins une marque.

b. Une transition sans place amont est toujours validée, on dit que c'est une transition source.

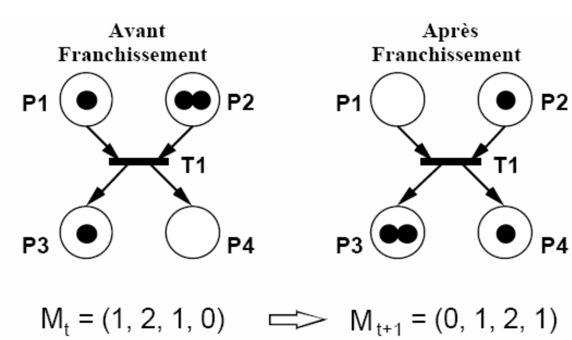
c. Le franchissement (le tir) d'une transition Tj consiste à retirer une marque (jeton) dans chacune des places en amont de la transition Tj et à ajouter une marque dans toutes les places en aval de Tj.

d. Lorsqu'une transition est validée cela n'implique pas qu'elle sera franchie immédiatement.

e. Il y a un seul franchissement à la fois.

f. Le franchissement d'une transition est indivisible.

g. Le franchissement d'une transition à une durée nulle (sauf dans les RdP temporisés qu'on va voir plus tard).



Remarque : si une transition est validée, cela n'implique pas qu'elle sera immédiatement franchie. Ces règles introduisent en effet un certain indéterminisme dans l'évolution des réseaux de Petri, puisque ceux-ci peuvent passer par différents états dont l'apparition est conditionnée par le choix des transitions tirées. Ce fonctionnement représente assez bien les situations réelles où il n'y a pas de priorité dans la succession des événements.

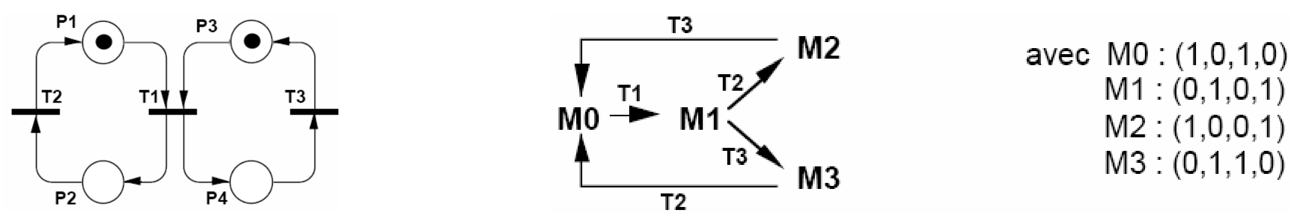
Note : Il y a conflit si plus d'une transition peuvent être franchies pour une même place d'origine, on choisit l'une des transitions, de manière non-déterministe.

4.2.4. Graphes de marquage

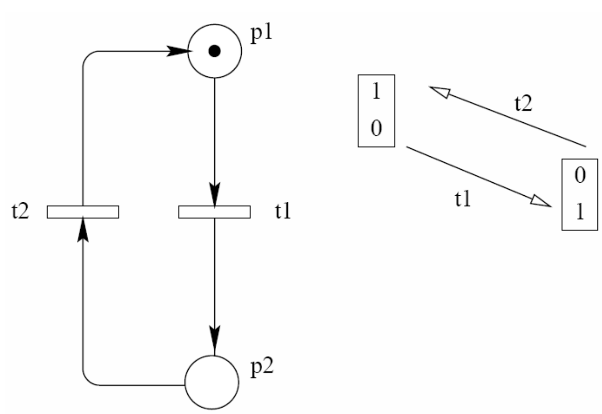
L'évolution temporelle d'un RdP peut être décrite par un graphe de marquage représentant l'ensemble des marquages accessibles et d'arcs correspondant aux franchissements des transitions faisant passer d'un marquage à l'autre pour un marquage initial M0.

Exemples :

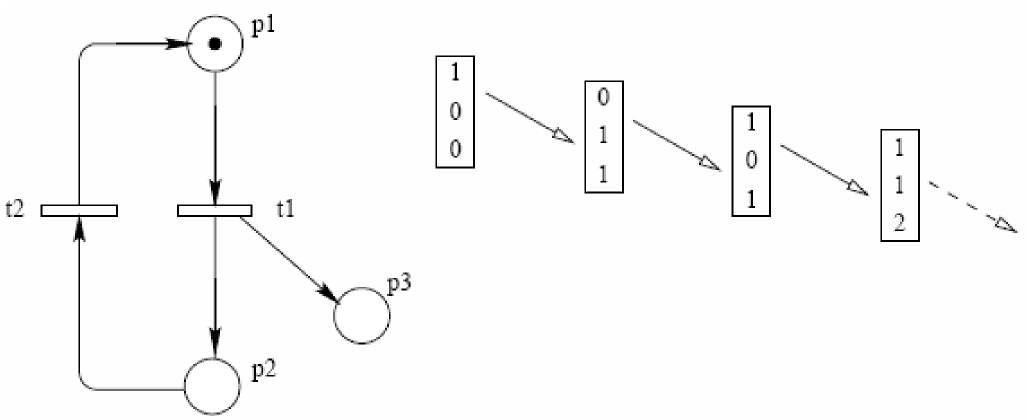
1)



2)



3)



Remarque : cette représentation permet de déterminer certaines propriétés d'un graphe. Par exemple si le graphe présente une zone non bouclé, cette partie du marquage une fois atteinte constitue un arrêt de l'évolution du RdP et celui-ci sera déclaré avec blocage.

4.2.5. RdP autonomes et non autonomes

• Un RdP autonome décrit le fonctionnement d'un système qui évolue de façon autonome, c-à-d dont les instants de franchissement ne sont pas connus, ou pas indiqués. (Exemple : Le cycle des saisons).

• Un RdP non autonome décrit le fonctionnement d'un système dont l'évolution est conditionnée par des événements externes ou par le temps (Exemple : Démarrage d'un moteur).

➔ Un RdP non autonome est Synchronisé et/ou Temporisé.

4.2.6. RdP particuliers

4.2.6.1 *Structures particulière :*

Ici on s'intéresse en premier à la structure du RdP.

a. Graphe d'états

Un RdP est un graphe d'états si est seulement si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.

(Traiter exemple en cours)

b. Graphe d'événements

Un RdP est un graphe d'événement si et seulement si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Un Graphe d'événement est donc dual d'un graphe d'états.

(Traiter exemple en cours)

c. RdP sans conflit

Un RdP dans lequel toute place a au plus une transition de sortie. Un conflit (ou conflit structurel) correspond à l'existence d'une place P1 qui a au moins deux transitions de sortie T1, T2,…On notera <P1, {T1, T2,….}>

(*Traiter exemple en cours*)

d. RdP à choix libre

Un RdP à choix libre est un RdP dans lequel pour tout conflit <P1, {T1, T2,….}> aucune des transitions T1, T2,…ne possède une autre place d'entrée que P1.

(*Traiter exemple en cours*)

e. RdP simple

C'est un RdP dans lequel chaque transition ne peut être concernée que par un conflit au plus. S'il existe une transition T1 et deux conflits <P1, {T1, T2,…}> et <P2, {T1, T3,…}>, alors le RdP n'est pas simple.

(*Traiter exemple en cours*)

Remarque :

- L'ensemble des RdP simples inclut l'ensemble des RdP à choix libre, qui inclut l'ensemble des RdP sans conflit, qui inclut lui-même l'ensemble des graphes d'événements
- L'ensemble des graphes d'états est inclus dans l'ensemble des RdP à choix libre.

f. RdP pur

C'est un RdP dans lequel il n'existe pas de transition ayant une place d'entrée qui soit également place de sortie de cette transition.

(*Traiter exemple en cours*)

g. RdP sans boucle

Un RdP sans boucle est tel qu'il existe une transition Tj et une place Pi qui est à la fois place d'entrée et place de sortie de Tj, alors Tj à au moins une autre place d'entrée.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.6.2. ***Abréviations et extensions :***

Abréviations : Des représentations simplifiées utiles pour alléger le graphisme mais auxquelles on peut toujours faire correspondre un RdP ordinaire (c.-à-d. un RdP autonome marqué fonctionnant selon les règles prédéfinies).

Extensions : Des modèles auxquels des règles de fonctionnement ont été ajoutées afin d'enrichir le modèle initial pour aborder un plus grand nombre d'applications.

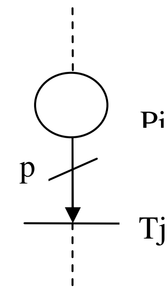
Remarque : Toutes les propriétés des RdP ordinaires se conservent pour les abréviations moyennant quelques adaptations, tandis que ces propriétés ne se conservent pas toutes pour les extensions.

a. RdP généralisé

Un RdP dans lequel des poids (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux arcs.

L'arc Pi → Tj a un poids p

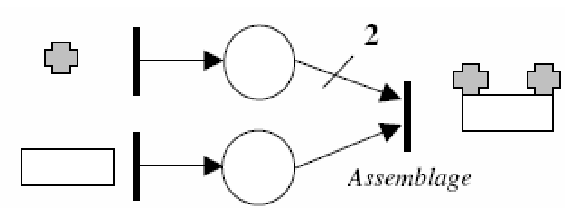
La transition Tj ne sera validée que si Pi contient au moins p jetons.



Lors du franchissement de cette transition, *p* jetons seront retirés de la place Pi.

Lorsqu'un arc Tj → Pi a un poids *p* cela signifie que lors du franchissement de Tj, *p* jetons seront ajoutés à la place Pi.

Exemple :



(*Traiter exemple en cours*)

b. RdP à capacité

Un RdP dans lequel des capacités (nombres entiers strictement positifs) sont associés aux places. Le franchissement d'une transition d'entrée d'une place Pi dont la capacité est cap(Pi) n'est possible que si le franchissement ne conduit pas à un nombre de jetons dans Pi qui dépasse cette capacité.

(*Traiter exemple en cours*)

Note : Tout RdP à capacité peut être transformé en un RdP ordinaire. (*À démontrer en classe*).

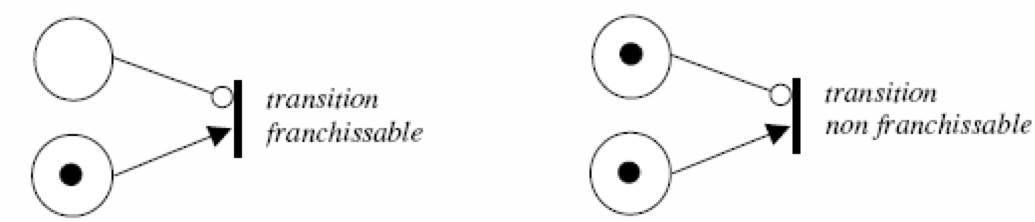
(*Traiter exemple en cours*)

c. RdP coloré

Un RdP coloré comporte des jetons auxquelles on attribue des couleurs (possibilité de représenter des processus parallèles)

d. RdP à arcs inhibiteurs

Un *arc inhibiteur* est un arc orienté qui part d'une place pour aboutir à une transition (et non l'inverse). Son extrémité est marquée par un petit cercle. La présence d'un arc *inhibiteur* entre une place Pi et une transition Tj signifie que la transition Tj n'est validée que si la place Pi ne contient aucun jeton. Le franchissement de la transition Tj consiste à retirer un jeton dans chaque place située en amont de la transition à l'exception de la place Pi , et à ajouter un jeton dans chaque place située en aval de la transition.



(*Traiter exemple en cours*)

e. RdP à priorité

Un tel réseau est utilisé lorsque l'on veut imposer un choix entre plusieurs transitions validées.

f. RdP continu

Leur particularité est que le marquage d'une place est un nombre réel (positif) et non plus un nombre entier.

Remarque :

- Les RdP généralisés, à capacité, coloré sont des abréviations des RdP ordinaires. Toutes les propriétés que nous allons voir dans ce qui suit peuvent donc être adaptées à ces modèles.
- Les RdP à arcs inhibiteurs, les RdP à priorités, les RdP non autonomes et les RdP continus sont des extensions des RdP ordinaires. Certaines propriétés des RdP ordinaires leur sont applicables mais pas toutes.

4.2.7 Propriétés des réseaux de Petri

4.2.7.1 *RdP borné :*

• Une place Pi est dite bornée pour un marquage initial M0 si pour tout marquage accessible à partir à partir de M0 le nombre de jetons dans Pi est fini.

• Un RdP est borné pour un marquage initial M0 si toutes les places sont bornées pour M0.

• Si pour tout marquage M appartement à l'ensemble des marquages accessibles à partir de M0 (noté *M0), on a M(Pi) ≤ K où K est un nombre entier naturel, on dit que Pi est K-borné. Si la propriété est vraie pour toute place on dit que ce RdP est K-borné.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.7.2 *RdP sauf :*

C’est un RdP 1-borné (ou binaire).

4.2.7.3 *Vivacité :*

• Une transition Tj est vivante pour un marquage initial M0 si pour tout marquage accessible Mi ∈ *M0, il existe une séquence de franchissement S qui contient Tj à partir de Mi (c-à-d il subsistera toujours une possibilité de franchir Tj).

(*Traiter exemple en cours*)

• Un RdP est vivant pour un marquage initial M0 si toutes ses transitions sont vivantes pour M0 (c-à-d aucune transition ne sera jamais définitivement infranchissable)

4.2.7.4 *Blocage :*

• Un blocage (ou état puits) est un marquage tel qu’aucune transition n’est validée.

• Un RdP est dit sans blocage pour un marquage initial M0 si ∀ marquage accessible

Mi ∈ *M0, il est sans blocage.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.8 Graphe des marquages et arbre de couverture

Pour pouvoir trouver si tel RdP présente telle ou telle propriété, il existe principalement 3 classes de méthodes :

a. Établissement du graphe de marquage ou de l’arbre de couverture
b. Utilisation des méthodes basées sur l’algèbre linéaire : résultats puissants.
c. Les méthodes de réduction des RdP.

4.2.8.1 *Graphe des marquages :*

Il est composé de nœuds qui correspondent aux marquages accessibles et D’arcs correspondant aux franchissements de transition faisant passer d’un marquage à l’autre.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.8.2 *Arbre de couverture :*

Quand on ne peut pas construire le graphe des marquages (RdP non borné), on construit un arbre de couverture qui possède un nombre fini de nœuds. Un arbre est un graphe particulier dans lequel il n’y a pas de boucle ni de circuit.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.9 Représentation matricielle

4.2.9.1 *Matrice de description :*

Considérons le RdP R={P, T, A,M0} comportant *l* places et *m* transitions.

R peut être représenté par une matrice dite de sortie S(P,T) et une matrice dite d'entrée E(P,T) définies comme suit :

- S(P,T) : matrice de dimension $l \times m$ dans laquelle :
  - S(i,j)= poids de l'arc reliant Tj à Pi si Pi est une place de sortie de Tj.
  - S(i,j)= 0 si Pi n'est pas une place de sortie de Tj.
- E(P,T) : matrice de dimension $l \times m$ dans laquelle :
  - E(i,j)= poids de l'arc reliant Pi à Tj si Pi est une place d'entrée de Tj.
  - E(i,j)= 0 si Pi n'est pas une place d'entrée de Tj.

Cas particulier :

Si aucune place du RdP n'est à la fois place d'entrée et place de sortie d'une même transition alors il est possible de décrire complètement le réseau avec la matrice d'incidence C(P,T) comme suit :

C(P,T) = S(P,T) – E(P,T) dans laquelle :

- C(i,j)= poids de l'arc reliant Tj à Pi si Pi est une place de sortie de Tj.
- C(i,j)= poids de l'arc reliant Pi à Tj précédé du signe (-) si Pi est une place d'entrée de Tj.
- C(i,j)= 0 si Pi n'est ni place d'entrée ni place de sortie de Tj.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.9.2 *Validation des transitions :*

Si une transition Ti est validée pour un marquage initial M0, il faut que :

$$\forall\ Pj \in P,\ M(Pj) \geq E(Pj,\ Ti)$$

$$\text{Soit } |M0| \geq E(P,\ Ti)$$

En comparant successivement toutes les colonnes de E(P,T) au vecteur M0, on peut trouver toutes les transitions validées par ce marquage.

On obtient aussi un vecteur validation V de dimension égale au nombre de transitions du RdP (un 1 correspond à une transition validée, un 0 dans le cas contraire).

Cas particulier :

Si le RdP étudié est sauf, le vecteur V peut être obtenu en appliquant la relation suivante :

$$V = \overline{E(P,T)^t \otimes \left|\overline{M0}\right|}$$

$\overline{M0}$ est le vecteur en complément à 1 de M0.

$E(P,T)^t$: matrice transposée de E(P,T)

$\otimes$ est l'opérateur matriciel booléen obtenu en faisant terme à terme le produit des lignes de $E(P,T)^t$ et du vecteur colonne $\overline{M0}$ puis la somme logique de ces produits.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.9.3 *Évolution de marquage :*

Les marquages successifs M1, M2, M3,… obtenus à partir du marquage initial M0 par les tirs successifs des transitions Ti, Tj, Tk,…peuvent être obtenus comme suit :

M1 = M0 + C(P, Ti)

M2 = M0 + C(P, Tj)

M3 = M0 + C(P, Tk)

Pour une séquence finie de tirs, il est possible de relier le marquage final Mn au marquage initial M0 par une relation de la forme :

$$|Mn| = |M0| = |C(P,T)| . |D|$$

Avec |D| : vecteur colonne de dimension égale au nombre total *m* de transitions du réseau.

Les composantes *di* de |D| sont des nombres entiers positifs correspondant au nombre de tirs de la transition Ti pour la séquence donnée aboutissant au marquage Mn.

(*Traiter exemple en cours*)

4.2.10 Modélisation par réseaux de Petri

a. Modélisation des opérations logiques 'ET' et 'OU'

- ET aval (distribution), ET amont (jonction)
- OU aval (sélection), OU amont (attribution)

b. Visualiser le parallélisme

c. Visualiser la synchronisation

d. Visualiser le partage de ressource

e. Mémorisation

f. Lecture

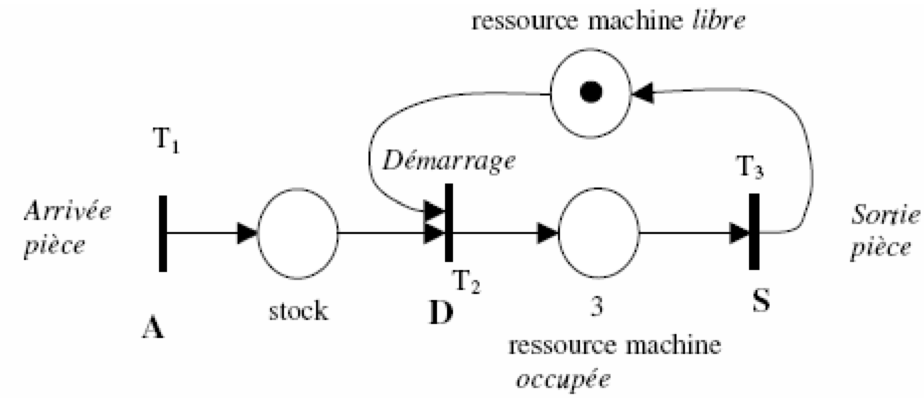
g. Capacité limitée

(*Traiter exemples en cours*)

4.2.11 RdP synchronisé

Un ensemble d'événements *externes* est associé au RdP ; ces événements permettent le franchissement de certaines transitions. Un tel RdP est dit *synchronisé.*

Considérons le RdP modélisant la machine décrite ci-dessous. On associe à ce RdP l'ensemble d'événements *A*, *D*, *S* où *A* désigne l'événement « *Arrivée pièce* », *D* l'événement « *Démarrage service* », *S* l'événement « *Sortie pièce* ». La figure représente le système modélisé par un RdP synchronisé.



- Le tir de la transition T1 est lié à l'occurrence de l'événement *A*.
- Le tir de la transition T2 est lié :

  - A la validation de la transition, matérialisée par la présence d'au moins un jeton dans la place « *stock* » et d'un jeton dans la place « *ressource machine libre* » ;

  - Au démarrage effectif du service (occurrence de l'événement *D*).
- Le tir de la transition T3 est lié à l'occurrence de l'événement *S*.

4.2.12 RdP temporisé

Décrit un système dont le fonctionnement dépend du temps.

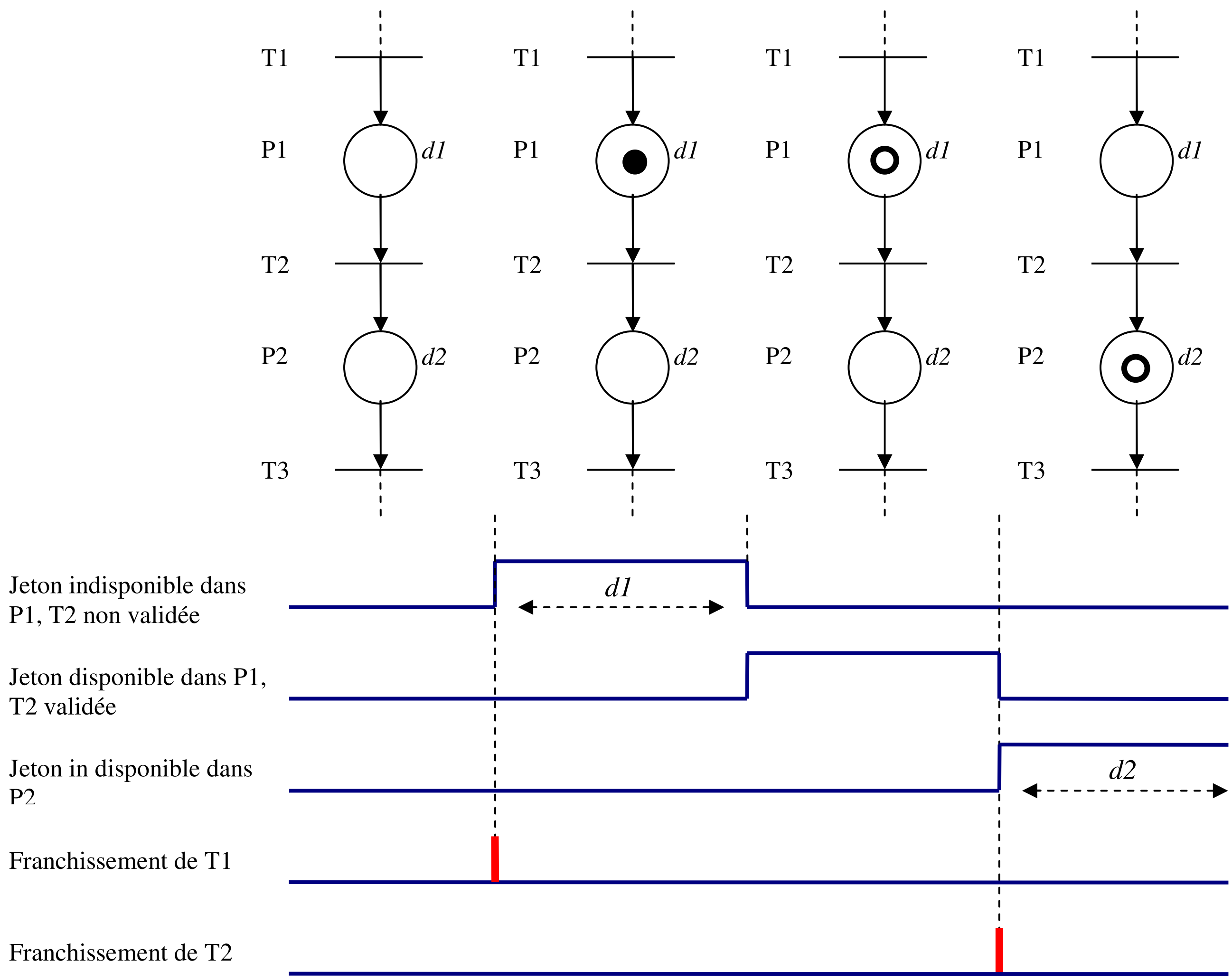
a. RdP P-temporisé :

- Une durée *minimale* de séjour dans les places : Durée pendant laquelle tout jeton qui vient d'être produit dans une place ne peut pas encore servir à l'activation de transitions aval.

Illustration :

○ Jeton réservé

● Jeton non réservé



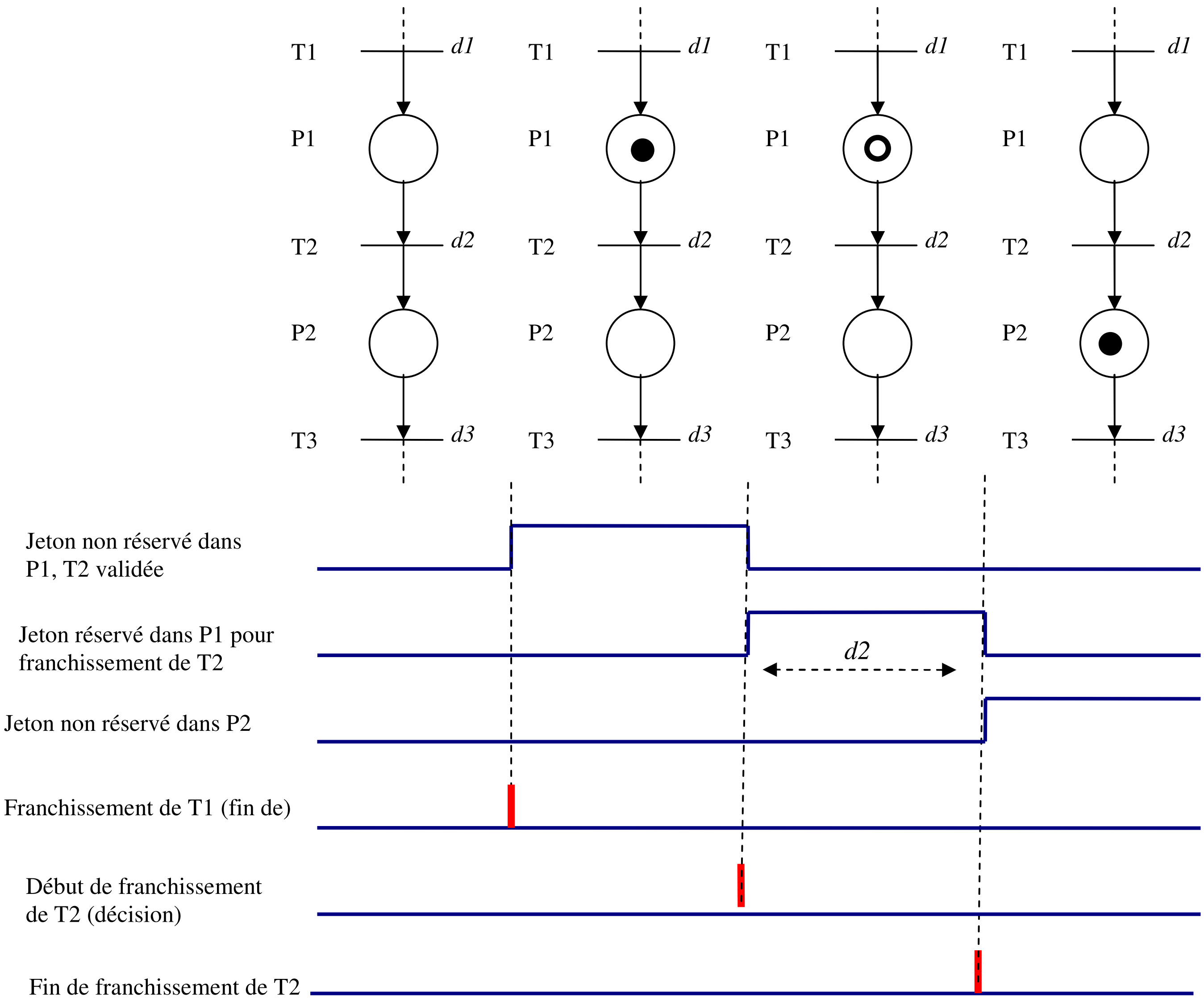
b. RdP T-temporisé :

- Une durée d'activation pour les transitions : Durée pendant laquelle un jeton situé dans chaque place amont de la transition activée est « réservé » pour cette transition (avant de disparaître), et au delà de laquelle un jeton apparaît dans chacune des places aval ;

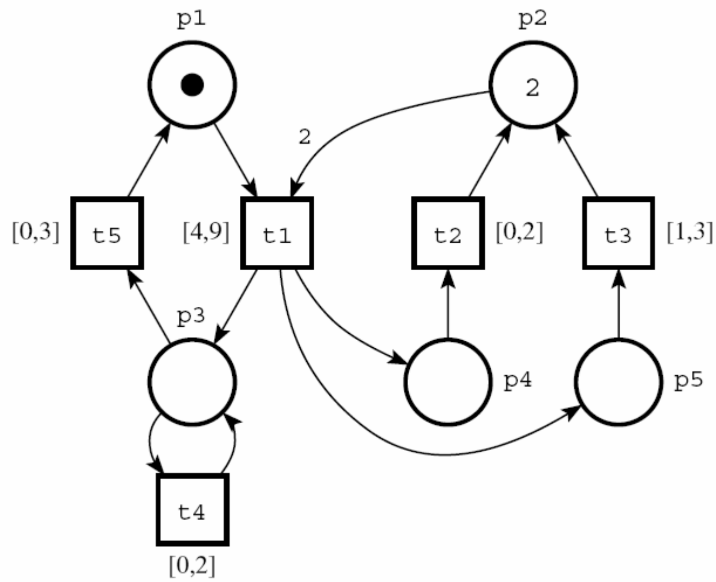
Illustration :

○ Jeton indisponible

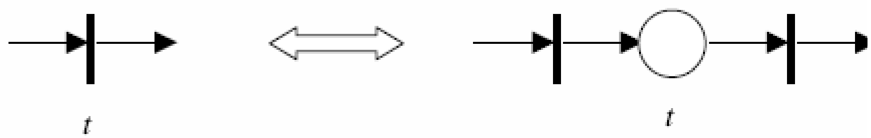
● Jeton disponible



Remarque : Il y a un temps minimum et un temps maximum pour le franchissement d'une transition



Remarque : Il existe une équivalence entre le RdP T-temporisé et celui P-temporisé. La figure suivante montre la transformation d'une transition de durée *t* en 2 transitions instantanées (le début et la fin) séparées par une place de temporisation *t*.

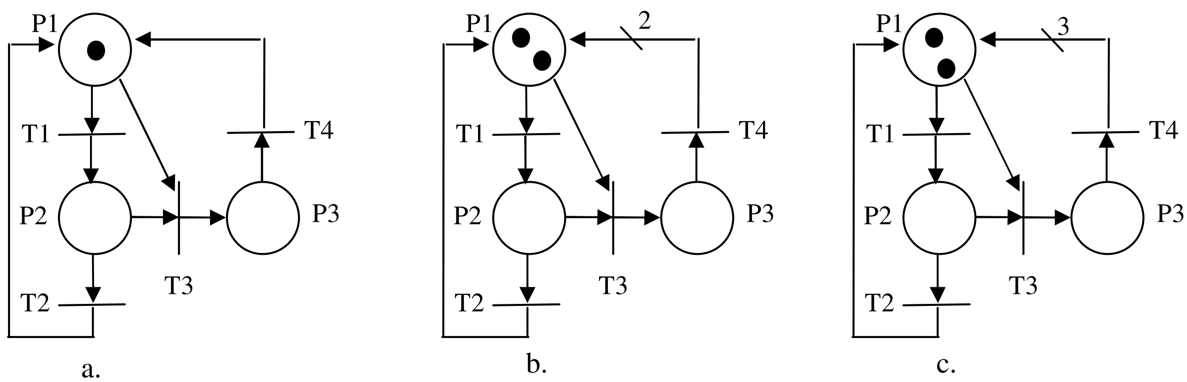


(*Traiter exemple en cours*)

4.2.13. Exemples divers

Exercice 1

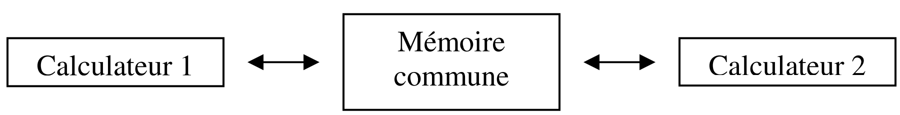
Pour chacun des RdP de la figure suivante, dont certains sont des RdP généralisés, répondre aux questions : est-il borné? Vivant? Sans blocage? Justifier votre réponse.



Exercice 2

Deux calculateurs utilisent une mémoire commune. On suppose que chaque calculateur peut avoir trois états :

- il n'a pas besoin de la mémoire
- il la demande mais ne l'utilise pas encore
- il l'utilise



Modéliser le fonctionnement de ce système par un RdP ou un Grafcet.

Exercice 3

On considère le protocole suivant de gestion des cabines et des paniers d'une piscine. À l'entrée, un client qui a trouvé une cabine libre y entre et se change en posant ses vêtements dans la cabine. Il demande ensuite un panier qu'il remplit pour libérer la cabine. Après la baignade le client rentre dans une cabine avec son panier, le vide et le libère. Ensuite il se rhabille et libère la cabine.

Soient Nc le nombre de cabines et Np le nombre de panier.

1. Décrire ce protocole par un RdP ou un Grafcet avec Nc=3 et Np=5.
2. Montrer qu'il y a un état de blocage. Y-a-t-il blocage pour toute valeurs de Nc et de Np?
3. Définir un protocole tel qu'il n'y ait pas de blocage et donner le RdP ou le Grafcet correspondant.

4. Modifier le RdP ou le Grafcet de 2. pour modéliser le nombre de clients qui attendent une cabine pour entrer à la piscine.

Conseil : Avant même d'établir le RdP ou le Grafcet, analyser ce protocole et détecter le blocage qui peut apparaitre et pourquoi.

Exercice 4

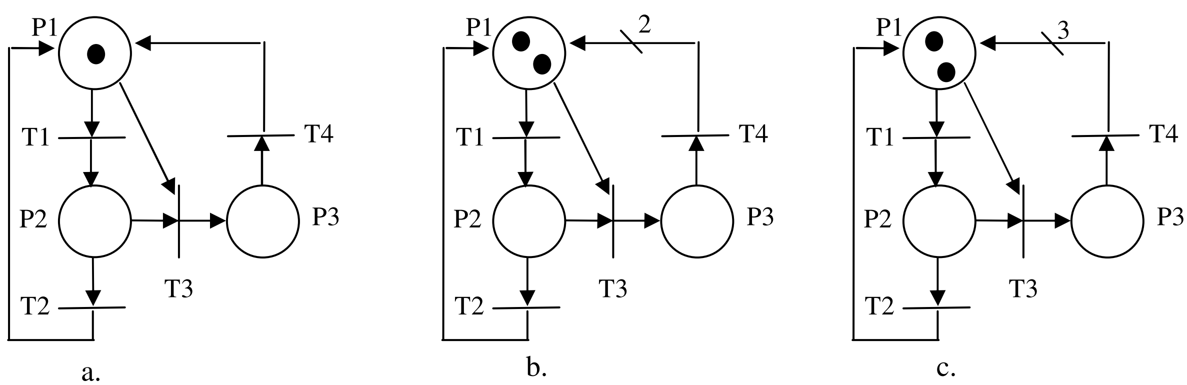
Une administration fait entrer des clients puis ferme la porte d'entrée avant de commencer le service. Au fur et à mesure qu'ils sont servis les clients sortent par une autre porte. La porte d'entrée ne sera rouverte que lorsque tous les clients qui étaient entrés seront sortis.

Donner le RdP correspondant.

Conseil : Utiliser la notion d'arc inhibiteur.

Solutions des exercices 1 à 4

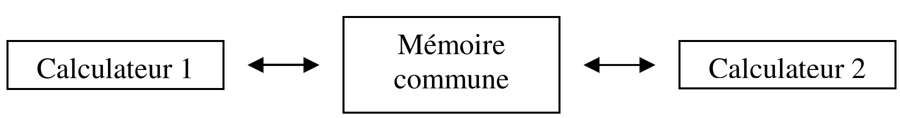
Solution Exercice 1

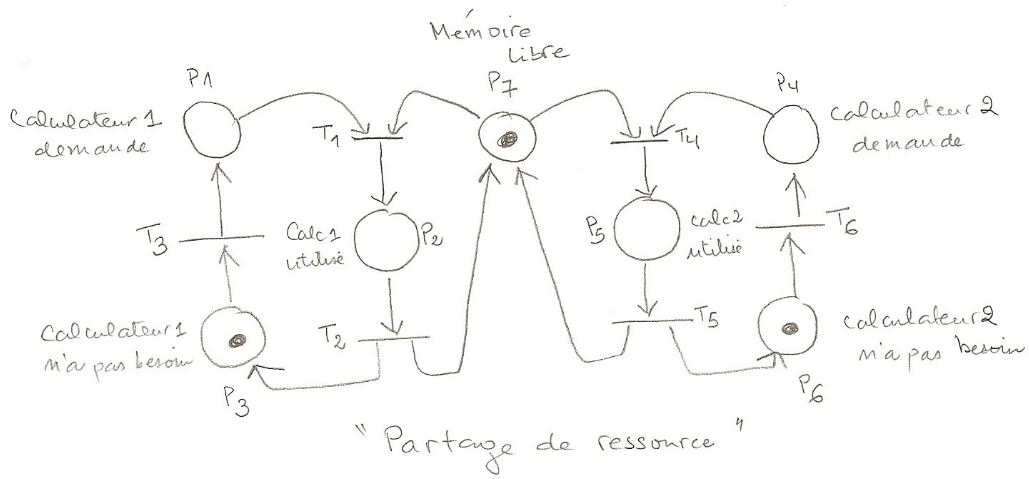


a.	b.	c.
Borné	**Borné**	**Pas borné**
Pas vivant	**Vivant**	**Vivant**
Sans blocage	**Sans blocage**	**Sans blocage**

Solution Exercice 2

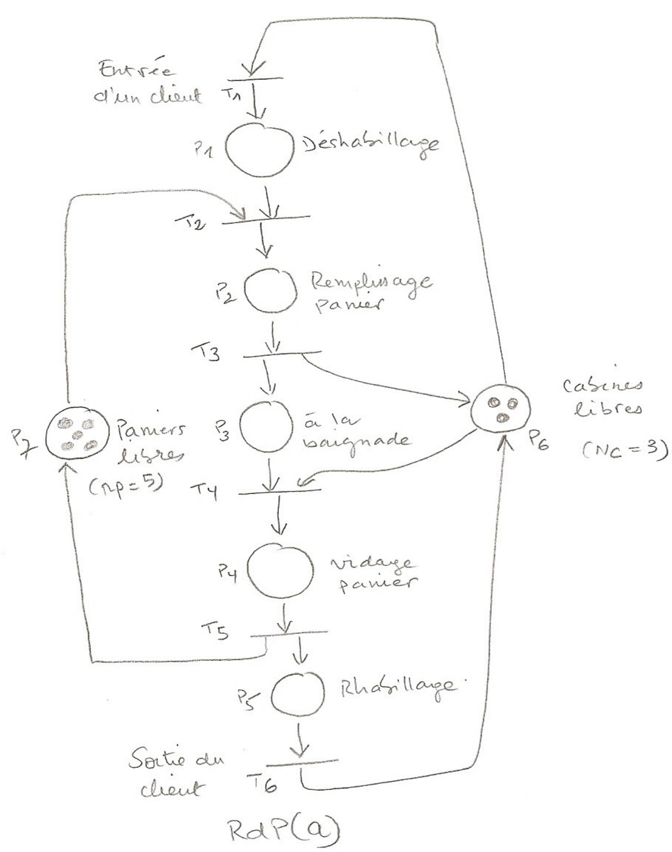
Deux calculateurs utilisent une mémoire commune. On suppose que chaque calculateur peut avoir trois états : il n'a pas besoin de la mémoire, il la demande mais ne l'utilise pas encore, il l'utilise





Solution Exercice 3

1.



2. Montrer qu'il y a un état de blocage. Y-a-t-il blocage pour toute valeurs de Nc et de Np?

La séquence de franchissement $(T_1T_2T_3)^5T_1^3$ conduit au marquage (3,0,5,0,0,0,0) qui est un blocage : Il y a 5 personnes qui sont à la baignade et 3 dans les cabines en attente de paniers qui ne se libéreront jamais.

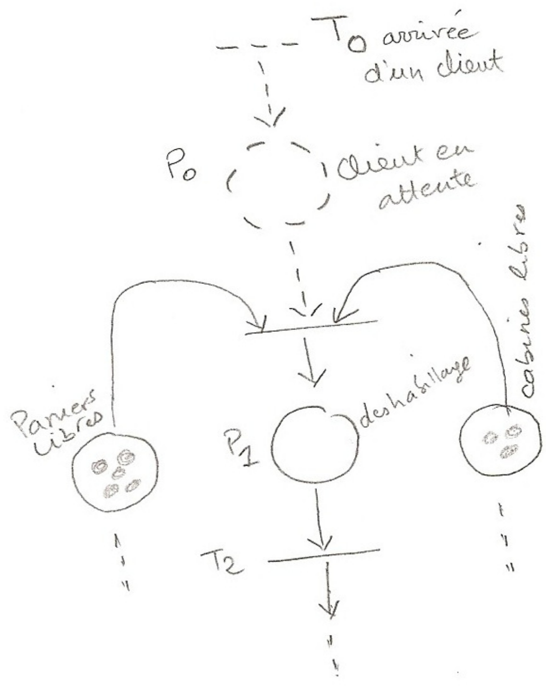
En général : $\forall$ Nc et Np, la séquence $(T_1T_2T_3)^{Np}T_1^{Nc}$ conduit à un blocage.

3. Définir un protocole tel qu'il n'y ait pas de blocage et donner le RdP ou le Grafcet correspondant.

Le client qui entre a besoin de deux ressources qui sont une cabine et un panier, s'il les prend simultanément quand les deux sont libres il n'y a pas de blocage. Le RdP (b) modifié montre que la transition T1 en amont de P1 ne sera franchise que si un panier ET une cabine sont libre simultanément.

4. Modifier le RdP ou le Grafcet de 2. pour modéliser le nombre de clients qui attendent une cabine pour entrer à la piscine.

On ajoute une transition T0 et une place P0 (en pointillés sur le RdP (b)) : Le franchissement de T0 (arrivée d'un client) ajoute un jeton dans P0 (nombre de clients en attente).



RdP (b)

Solution Exercice 4

Le Rdp est le suivant :