

Lista de Exercícios #1 (100 pontos, peso15%)
Entrega: 02 de Maio as 8:20 (em aula)

Geração de Objetos Combinatórios Elementares

1. (20 pontos) **Prática com os algoritmos de geração de objetos combinatórios**

Calcule o resultado das seguintes operações. Mostre seus passos (com alguns detalhes, mas não muitos).

- Subconjuntos:

Dê o resultado de SUCCESSOR e RANK de 11010110 no código de Gray G^8 .

- k -subconjuntos:

Dê RANK de $\{3, 6, 7, 9\}$ considerado como um 4-subconjunto de $\{1, \dots, 13\}$ em ordem lexicográfica e ordem “revolving door”. Qual é o SUCCESSOR em cada uma destas ordens?

- Permutações:

Encontre RANK e SUCCESSOR da permutação $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ em ordem lexicográfica e ordem Trotter-Johnson.

UNRANK o rank $r = 54$ como uma permutação de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, usando a ordem lexicográfica e ordem Trotter-Johnson.

2. (20 pontos) **Códigos de Gray e ordem “revolving door”**

Suponha que $1 \leq k \leq n$ e que eliminamos todas as tuplas do *binary reflected Gray code* G^n que não correspondam a subconjuntos de cardinalidade k (neste exercício interpretaremos as tuplas na ordem inversa à dada em aula; por exemplo $[1010]$ representaria o subconjunto $\{2, 4\}$ de $\{1, 2, 3, 4\}$). Prove que as tuplas restantes na ordem especificada por G^n formam as tuplas na ordem revolving door $A^{n,k}$.

3. (30 pontos) **Gerando todas as variações de um multiconjunto**

As *variações* de um multiconjunto são as permutações de todos os seus sub-multiconjuntos.

Exemplo: as variações do multiconjunto $\{1, 2, 2, 3\}$ são:

$\epsilon, 1, 12, 122, 1223, 123, 1232, 13, 132, 1322$
 $2, 21, 212, 2123, 213, 2132, 22, 221, 2213, 223, 2231, 23, 231, 2312, 232, 2321$
 $3, 31, 312, 3122, 32, 321, 3212, 322, 3221$

Dê o pseudocódigo de um algoritmo para gerar todas as variações de um multiconjunto.

Para verificar que seu algoritmo funciona, você pode implementá-lo e testá-lo, mas a implementação não é obrigatória.

Dica: Você pode usar uma ideia similar a da ordem lexicográfica de permutações.

4. (30 pontos) **Gray codes generalizados**

(a) Sejam m_0, m_1, \dots, m_{n-1} números inteiros maiores ou iguais a 2. Neste exercício queremos gerar todas as n -tuplas $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$ onde $0 \leq a_j < m_j$ para todo j , $0 \leq j < n$, seguindo a seguinte ordem de mudança mínima: duas tuplas sucessivas diferem em exatamente uma componente com o valor absoluto da sua diferença igual a 1 (isto é, a componente é um incremento ou um decremento de 1). Adapte o algoritmo de successor do binary reflected Gray code ao caso deste Gray code generalizado. Dê seu algoritmo em forma de pseudocódigo.

(b) Dada a fatoração em números primos de um número $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$, dê um algoritmo para listar todos os divisores do número de modo que o próximo divisor é obtido do anterior pela multiplicação ou divisão por um só primo a cada passo.

Dica: Use o algoritmo da parte (a).