2.6.3 Série de Fourier exponentielle complexe pour des signaux périodiques

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T. Ceci implique que :

$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t \tag{2.45}$$

où T est la plus petite valeur possible qui satisfait (2.45). La **fréquence fondamentale** du signal $x(t)$ est définie comme $f_o = 1/T$. Tout multiple entier de f_o, nf_o, est la ***n*ième harmonique** de $x(t)$. On peut alors approximer $x(t)$ sur une période quelconque $t_o < t < t_o + T$ en utilisant la série de Fourier exponentielle complexe de la section 2.6.2. Le signal de base $\phi_n(t) = e^{j2\pi n f_o t}$ est périodique, avec période $T_p = 1/(|n|f_o)$. Donc, la série de Fourier exponentielle complexe est une somme de signaux périodiques, où la période de chaque fonction est $T/|n|$, où $|n|$ est un entier. Par conséquent, la série de Fourier exponentielle complexe est une fonction périodique dont la période est le plus petit multiple commun de toutes les périodes des signaux de base, qui est T. Si le signal $x(t)$ est aussi périodique avec la période T, alors la série de Fourier exponentielle complexe est non seulement une bonne approximation sur l'intervalle de temps $t_o < t < t_o + T$, mais pour tout T. Enfin, l'erreur quadratique moyenne entre $x(t)$ et $x_a(t)$ diminue à mesure qu'on ajoute d'autres termes à la série de Fourier exponentielle complexe comme démontrée dans l'Exemple 2.7. Ainsi, à mesure que le nombre de termes dans la série de Fourier exponentielle complexe augmente à l'infini, l'erreur quadratique moyenne tend vers 0 et $x_a(t)$ est égal à $x(t)$ pour toute valeur de t. Par conséquent, si $x(t)$ est périodique avec la période T, alors $x(t)$ peut être exprimé sous la forme :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n f_o t} \tag{2.46}$$

où

$$X_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-j2\pi n f_o t} dt \tag{2.47}$$

où l'intégrale de (2.47) est prise sur n'importe quel intervalle de temps d'une période et $f_o = 1/T$.

Pour résoudre une série de Fourier, les étudiants devraient suivre la procédure suivante :

1. Trouver la période T de $x(t)$;
2. Déterminer $f_o = 1/T$.
3. Déterminer X_n à partir de (2.47)
4. Vérifier X_0 puisque dans (2.47) il y a plusieurs fois que X_0 est 0/0 ou même $\pm\infty$. Dans ces cas, il est mieux de résoudre X_0 en utilisant :
$$X_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t) dt \tag{2.48}$$
5. Exprimer $x(t)$ en utilisant (2.46).

Exemple 2.8

Trouvez la série de Fourier de $x(t)$ de la figure 2.12.

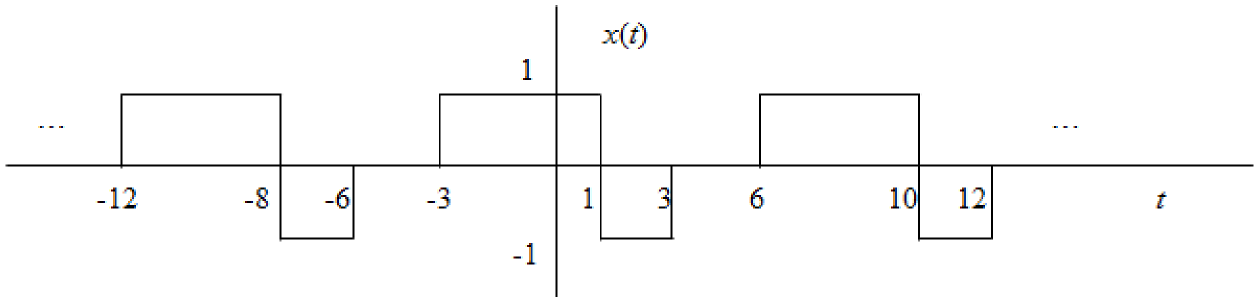

Figure 2.12: Signal $x(t)$ de l'exemple 2.8.

Solution

$$T = 9 \quad f_0 = \frac{1}{9}$$

$$X_n = \frac{1}{9}\int_{-3}^{6} x(t)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{9}}\, dt$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int_{-3}^{1} e^{-j\frac{2\pi n t}{9}}\, dt + \int_{1}^{3} (-1)\, e^{-j\frac{2\pi n t}{9}}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{9}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{9}} \Big|_{-3}^{1} + \frac{9}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{9}} \Big|_{1}^{3} \right)$$

$$= -\frac{1}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{9}} \Big|_{-3}^{1} + \frac{1}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{9}} \Big|_{1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n}{9}} + \frac{1}{j2\pi n} e^{j\frac{2\pi n}{3}} + \frac{1}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n}{3}} - \frac{1}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n}{9}}$$

$$\boxed{X_n = \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{j\pi n} - \frac{1}{j\pi n} e^{-j\frac{2\pi n}{9}}}$$

$$n = 0 \quad X_n = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow X_0 = \frac{1}{9}\int_{-3}^{6} x(t)\, dt = \frac{1}{9}\left(\int_{-3}^{1} dt - \int_{1}^{3} dt \right)$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{X_0 = \frac{2}{9}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{9} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{j\pi n} - \frac{e^{-j\frac{2\pi n}{9}}}{j\pi n} \right) e^{j\frac{2\pi n t}{9}}}$$

La figure 2.13 montre une période de x(t) ainsi que le graphique de $x_3(t) = \sum_{n=-3}^{3} X_n e^{j\frac{2\pi n t}{9}}$.

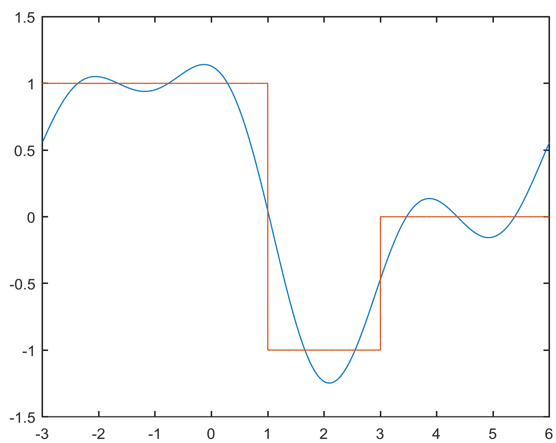

Figure 2.13: Le signal $x(t)$ de l'exemple 2.8 avec $x_3(t)$.

Exercice 2.9

Trouvez les séries de Fourier exponentielle complexe des signaux périodiques de la figure 2.14.

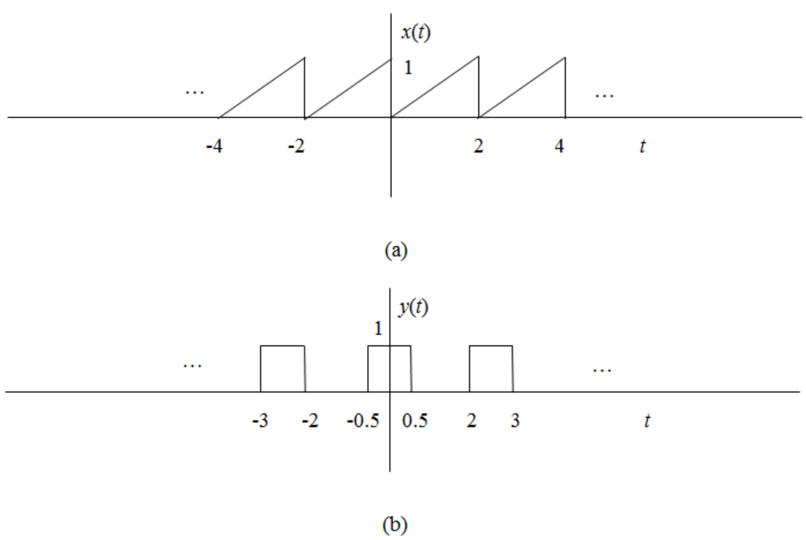

Figure 2.14: Signaux périodiques de l'exercice 2.9.

2.6.4 Propriétés de la série de Fourier exponentielle complexe pour les signaux à valeur réelle

Dans les systèmes de télécommunication pratiques, les signaux sont effectivement à valeur réelle. Comme qu'on l'a vu dans les exemples 2.5 et 2.8, les signaux à valeur réelle peuvent encore être représentés par la série de Fourier exponentielle complexe. Cependant, lorsqu'on fait la somme pondérée des signaux de base complexes, les parties imaginaires s'annulent, ce qui nous permet d'avoir une sommation qui produit un signal à valeur réelle. Ceci est démontré ci-dessous.

Considérons un signal périodique à valeur réelle $x(t)$. Puisque $x(t)$ est à valeur réelle, $\mathrm{Im}\{x(t)\} = 0$ et $x^*(t) = x(t)$, où $x^*(t)$ est le conjugué complexe de $x(t)$. Prenons comme exemple le coefficient de la série de Fourier X_{-n}.

$$\begin{aligned} X_{-n} &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi(-n)t}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{j2\pi nt}dt \end{aligned} \tag{2.49}$$

Maintenant, prenons le cas de X_n^*.

$$\begin{aligned} X_n^* &= \left(\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi nt}dt\right)^* \\ &= \frac{1}{T}\int_T x^*(t)e^{j2\pi nt}dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{j2\pi nt}dt \end{aligned} \tag{2.50}$$

où la dernière étape de (2.50) est le résultat de $x(t)$ étant un signal à valeur réelle. En comparant (2.49) à (2.50), on remarque qu'ils sont égaux. Alors :

$$X_{-n} = X_n^* \quad \text{si} \quad \mathrm{Im}\{x(t)\} = 0 \tag{2.51}$$

Exercice 2.10

Montrez que les coefficients de Fourier de l'Exemple 2.8 satisfont (2.51).

En observant (2.51), il est possible de conclure que :

$$\mathrm{Re}\{X_{-n}\} = \mathrm{Re}\{X_n\} \tag{2.52}$$

et

$$\mathrm{Im}\{X_{-n}\} = -\mathrm{Im}\{X_n\} \tag{2.53}$$

À partir de (2.52), la partie réelle du coefficient X_n est une fonction paire de n tandis que (2.53) montre que la partie imaginaire de X_n est une fonction impaire de n. On dit que les variables ou les fonctions qui se caractérisent avec une symétrie paire dans leur partie réelle et une symétrie impaire dans leur partie imaginaire présentent une **symétrie hermitienne**.

2.6.5 La série de Fourier trigonométrique pour les signaux périodiques à valeur réelle

Considérons un signal périodique à valeur réelle, x(t). La période de $x(t)$ est T. Le signal peut être représenté par sa série de Fourier, qui est donnée par (2.46) où X_n est donnée par (2.47). Cependant, on peut développer (2.47) en utilisant l'identité $e^{j2\pi n f_o t} = \cos(j2\pi n f_o t) + jsin(j2\pi n f_o t)$.

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T}\int_T x(t)(\cos(j2\pi n f_o t) - j\sin(j2\pi n f_o t))dt \\ &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\cos(j2\pi n f_o t)dt - j\frac{1}{T}\int_T x(t)\sin(j2\pi n f_o t)dt \end{aligned} \quad (2.54)$$

Donc

$$\mathrm{Re}\{X_n\} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\cos(j2\pi n f_o t)dt \quad (2.55)$$

et

$$\mathrm{Im}\{X_n\} = -\frac{1}{T}\int_T x(t)\sin(j2\pi n f_o t)dt \quad (2.56)$$

car le signal $x(t)$ en est un à valeur réelle.

La série de Fourier exponentielle complexe peut être réécrite comme :

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n e^{j2\pi n f_o t} + X_{-n}e^{-j2\pi n f_o t}\right) \\ &= X_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n e^{j2\pi n f_o t} + X_n^* e^{-j2\pi n f_o t}\right) \end{aligned} \quad (2.57)$$

La somme dans (2.57) a deux termes. Le deuxième terme est clairement le conjugué complexe du premier. Lorsqu'on fait l'addition de conjugués complexes, les parties imaginaires s'annulent. Donc (2.57) devient :

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\left\{X_n e^{j2\pi n f_o t}\right\} \quad (2.58)$$

La partie réelle du terme $X_n e^{j2\pi n f_o t}$ est donnée par:

$$\mathrm{Re}\left\{X_n e^{j2\pi n f_o t}\right\} = \mathrm{Re}\{X_n\}\cos(2\pi n f_o t) - \mathrm{Im}\{X_n\}\sin(2\pi n f_o t) \quad (2.59)$$

Donc (2.58) devient

$$x(t) = X_o + \sum_{n=1}^{\infty} 2\mathrm{Re}\{X_n\}\cos(2\pi n f_o t) - \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Im}\{X_n\}\sin(2\pi n f_o t) \qquad (2.60)$$

L`équation (2.60) est reformulée comme :

$$\boxed{x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_o t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_o t)} \qquad (2.61)$$

où

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt} \qquad (2.62)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(2\pi n f_o t)dt} \qquad (2.63)$$

et

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(2\pi n f_o t)dt} \qquad (2.64)$$

Exercice 2.11

Trouver la série de Fourier trigonométrique des signaux périodiques de l'Exercice 2.9 ainsi que de l'Exemple 2.8.

Exercice 2.12

Supposons que le signal périodique réel soit une fonction paire ($x(t) = x(-t)$). Montrez que $b_n = 0$.

Exercice 2.13

Supposons que le signal périodique réel $x(t)$ soit impair ($x(t) = -x(-t)$). Montrez que a_0 et $a_n = 0$.

Exercice 2.14

Un signal périodique à valeur réelle, $x(t)$, est pair. Montrez que $\mathrm{Im}\{X_n\} = 0$.
