

## 2.5 Systèmes linéaires invariant en temps

Un système linéaire invariant en temps (« *linear time-invariant* » - LTI) est un système pour lequel les propriétés de linéarité et d'invariance en temps sont toutes deux vraies. Un système LIT peut être défini par sa réponse impulsionnelle,  $h(t)$ . La réponse impulsionnelle est définie comme la sortie du système lorsqu'une impulsion (fonction delta de Dirac) est appliquée à l'entrée. Autrement dit, pour un système LTI :

$$y(t) = H_{LTI}\{\delta(t)\} = h(t) \quad (2.17)$$

Puisque c'est un système LTI, si  $x(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} X_n \delta(t - \tau_n)$  alors

$$y(t) = \sum_{n=N_1}^{N_2} X_n h(t - \tau_n) \quad (2.18)$$

Une entrée à temps-continu,  $x(t)$ , peut se faire approximer par:

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \Pi(t - n\Delta t) \quad (2.19)$$

L'équation (2.19) peut être réécrite comme :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \left\{ \left( \frac{1}{\Delta t} \right) \Pi(t - n\Delta t) \right\} \Delta t \quad (2.20)$$

De la discussion sur l'impulsion rectangulaire, nous savons que le terme dans  $\{ \}$  est  $\delta(t - n\Delta t)$  car  $\Delta t$  tends vers 0, donc nous pouvons réécrire (2.20) comme :

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \delta(t - n\Delta t) \Delta t \quad (2.21)$$

Avec  $x(t)$  exprimé comme (2.21), nous pouvons déduire de (2.18) qu'étant donné que le système soit LTI,  $y(t)$  peut être exprimé comme :

$$y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) h(t - n\Delta t) \Delta t \quad (2.22)$$

Dans (2.22),  $\Delta t$  qui tend vers 0 représente une tranche de temps infiniment mince et  $n\Delta t$  représente la  $n$ ième tranche de temps. La  $(n+1)$ ième tranche de temps est voisine de la  $n$ ième tranche de temps mais ne la chevauche pas. Par conséquent, la variable  $n\Delta t$ , comme  $n$  va de  $-\infty$  à  $\infty$ , se rapproche d'une variable continue que nous désignerons comme  $\lambda$  alors que la sommation se rapproche de l'intégration. Donc dans la limite où  $\Delta t$  s'approche de 0, (2.22) devient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \quad (2.23)$$

Ainsi, la sortie d'un système LTI est la convolution de l'entrée et de la réponse impulsionnelle du système LTI.

### 2.5.1 Stabilité des systèmes LTI.

Soit  $y(t)$  donné par (2.23), alors  $y(t) = x(t)*h(t)$ . Nous savons d'après (2.11) que nous pouvons aussi l'exprimer par  $y(t) = h(t)*x(t)$ . Nous pouvons donc écrire :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda \quad (2.24)$$

Un système est stable si pour toute entrée bornée, la sortie est également bornée. Nous disons donc que le système est borné si  $|y(t)| < M$  pour  $|x(t)| < N$  où  $M, N < \infty$ . Alors :

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda \right| < M \quad (2.25)$$

L'inégalité de Schwarz indique que  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)||x(t - \lambda)|d\lambda$ , donc si  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)||x(t - \lambda)|d\lambda < \infty$  pour  $|x(t)| < N < \infty$ , alors  $y(t)$  sera également borné et le système sera stable. En insérant l'inégalité de Schwarz dans (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} |y(t)| &< \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)||x(t - \lambda)|d\lambda < M \\ &< \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|Nd\lambda < M \\ &< N \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|d\lambda < M \end{aligned} \quad (2.26)$$

ce qui ne peut être vrai que si  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|d\lambda < \infty$ . Un système LTI est donc stable si sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable. Autrement dit, il est stable si :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad (2.27)$$

---

### Exercice 2.7

Trois systèmes LTI ont les réponses impulsionnelles  $h_1(t)=0.1e^{-0.1t}u(t)$ ,  $h_2(t) = u(t)$  et  $h_3(t) = 4\delta(t)-2\delta(t-1)$ . Lequel ou lesquels des trois systèmes n'est pas garanti d'être stable, le cas échéant?

---

### 2.5.2 Causalité

Un système est non causal si la valeur de la sortie au moment  $t_o$  dépend des valeurs de l'entrée à des temps supérieurs à  $t_o$ . Autrement dit, si la valeur de la sortie dépend des valeurs futures de l'entrée, le système est non causal. Pour les systèmes linéaires et invariants en temps :

$$y(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t_o - \lambda)d\lambda \quad (2.28)$$

La valeur de la sortie au temps  $t_o$  dépend des valeurs de  $x(t)$  aux temps  $(t_o-\lambda)$  qui sont supérieures à  $t_o$  pour toutes les valeurs négatives de  $\lambda$ . Cependant, si  $h(\lambda) = 0$  quand  $\lambda < 0$ , alors la valeur de

la sortie ne dépendra pas des valeurs futures de l'entrée. Par conséquent, un système LTI est causal si l'équation suivante est satisfaite :

$$h(t) = 0, \quad t < 0 \quad (2.29)$$

### Exercice 2.8

En observant leurs réponses impulsionnelles, lesquels des systèmes LIT suivants sont non causaux :

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \Pi\left(\frac{t-3}{6}\right) \\ h_2(t) &= e^{t/6}u(t) \\ h_3(t) &= h_2(t+4) \end{aligned}$$

## 2.6 Représentation des signaux dans le domaine fréquentiel

### 2.6.1 Série de Fourier généralisée

Considérez un ensemble de signaux,  $\{\phi_n(t)\}$  où  $n = 1, 2, \dots, N$  qui sont orthogonaux sur un intervalle de temps  $t_o < t < t_o + T$ . Autrement dit :

$$\int_{t_o}^{t_o+T} \phi_n(t)\phi_m^*(t)dt = 0, n \neq m \quad (2.30)$$

où  $n$  et  $m$  sont des nombres entiers entre 1 and  $N$  et  $*$  est le conjugué complexe. Prenons le cas où  $n = m$ , (2.30) devient :

$$\int_{t_o}^{t_o+T} |\phi_n(t)|^2 dt = c_n \quad (2.31)$$

où  $c_n$  est un nombre réel et positif. Les étudiants devraient remarquer de leur cours de signaux et systèmes que  $c_n$  représente l'énergie du signal  $\phi_n(t)$  sur l'intervalle de temps  $t_o < t < t_o + T$ .

Il y a un signal  $x(t)$  qu'on aimerait approximer par  $x_a(t)$ , qui est la somme pondérée de notre ensemble de signaux orthogonaux sur l'intervalle de temps  $t_o < t < t_o + T$ . Cette approximation  $x_a(t)$  est donnée par :

$$x_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t) \quad (2.32)$$

où les coefficients  $X_n$  sont choisis pour minimiser l'erreur quadratique moyenne,  $\epsilon_N$ , entre  $x(t)$  et  $x_a(t)$  sur l'intervalle de temps  $t_o < t < t_o + T$ . L'erreur quadratique moyenne est donnée par :

$$\epsilon_N = \int_{t_o}^{t_o+T} |x(t) - x_a(t)|^2 dt \quad (2.33)$$

En insérant (2.32) dans (2.33), on obtient le suivant :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N &= \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t)|^2 dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} (x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t))(x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t))^* dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt - \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) (\sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t))^* dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t) (\sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t)) dt + \int_{t_0}^{t_0+T} |\sum_{n=1}^{\infty} X_n \phi_n(t)|^2 dt
\end{aligned} \tag{2.34}$$

En réorganisant les termes dans (2.34), on obtient:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N &= \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N X_n^* \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \\
&\quad - \sum_{n=1}^N X_n \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t) \phi_n(t) dt + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N X_n X_m^* \int_{t_0}^{t_0+T} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Le dernier terme dans (2.35)  $\int_{t_0}^{t_0+T} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt$  qui est 0 si  $n \neq m$  et  $c_n$  pour  $n = m$ . Donc on peut simplifier (2.35) par:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_N &= \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N X_n^* \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \\
&\quad - \sum_{n=1}^N X_n \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t) \phi_n(t) dt + \sum_{n=1}^N |X_n|^2 c_n
\end{aligned} \tag{2.36}$$

En plaçant les trois derniers termes de (2.36) dans une sommation commune, on obtient :

$$\varepsilon_N = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^N \left( |X_n|^2 c_n - X_n^* \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt - X_n \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t) \phi_n(t) dt \right) \tag{2.37}$$

On peut démontrer que

$$\begin{aligned}
c_n \left| X_n - \frac{1}{c_n} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \right|^2 &= |X_n|^2 c_n - X_n^* \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \\
&\quad - X_n \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t) \phi_n(t) dt + \frac{1}{c_n} \left| \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \right|^2
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Donc (2.37) devient:

$$\varepsilon_N = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt + \sum_{n=1}^N \left( c_n \left| X_n - \frac{1}{c_n} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \right|^2 - \frac{1}{c_n} \left| \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt \right|^2 \right) \tag{2.39}$$

Le  $X_n$  apparaît dans le deuxième terme qui est un module au carré, ce qui est toujours réelle et positive ou 0. Donc (2.39) est minimisé lorsque :

$$\boxed{X_n = \frac{1}{c_n} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \phi_n^*(t) dt} \tag{2.40}$$

Si  $X_n$  est donné par (2.40), alors le troisième terme de (2.39) est donc  $c_n|X_n|^2$ . Par conséquent, l'erreur quadratique moyenne entre le signal et son estimation dans (2.39) devient :

$$\varepsilon_N = \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt - \sum_{n=1}^N c_n |X_n|^2 \quad (2.41)$$

### 2.6.2 Série de Fourier exponentielle complexe

Pour la série de Fourier exponentielle complexe, l'ensemble des fonctions orthogonales utilisées pour approximer  $x(t)$  sur l'intervalle  $t_0 < t < t_0+T$  est donné par :

$$\phi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty \quad (2.42)$$

où  $f_0 = 1/T$ . Les étudiants doivent démontrer que :

$$c_n = T \quad (2.43)$$

### Exercice 2.8

Démontrez que l'ensemble des fonctions dans (2.42) sont orthogonales entre elles et que  $c_n = T$  pour toute valeur de  $n$ .

### Exemple 2.5

On veut approximer  $x(t) = t$  sur l'intervalle  $0 < T < 2$ . Trouvez l'expression de la série de Fourier et la dessiner (en utilisant Matlab) en prenant la somme entre  $\pm N$  où  $N = 3$ . Répéter pour  $N=5$  et  $N=7$ .

### Solution

$$0 < t < 2 \rightarrow T=2, f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

$$\phi_n(t) = e^{j2\pi n(\frac{1}{2})t} = e^{j\pi n t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\pi n t}$$

$$X_n = \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-j\pi n t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{t}{j\pi n} e^{-j\pi n t} + \frac{1}{(\pi n)^2} e^{-j\pi n t} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{j\pi n} e^{-j2\pi n} + \frac{1}{(\pi n)^2} e^{-j2\pi n} - \frac{1}{(\pi n)^2} \right)$$

$$e^{-j2\pi n} = (e^{-j2\pi})^n = (1)^n = 1$$

$$X_n = -\frac{1}{j\pi n}$$

$\rightarrow n=0 \quad X_n = -\infty?$

$$X_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t dt = \frac{1}{4} t^2 \Big|_0^2 = 1$$

$$x(t) = 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left( -\frac{1}{j\pi n} \right) e^{j\pi n t}$$

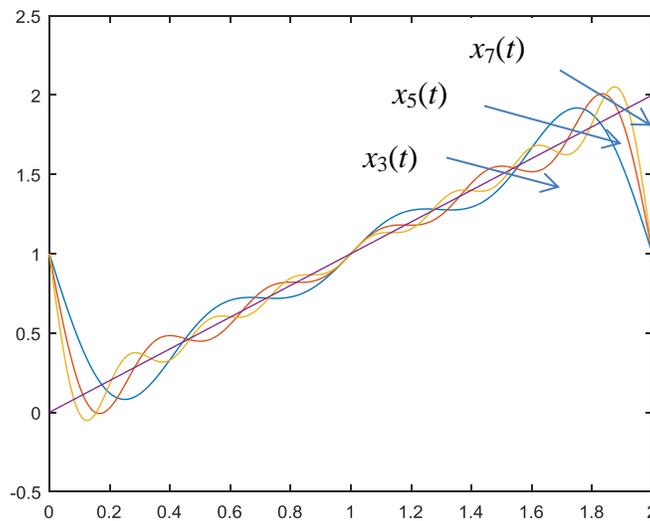


Figure 2.10: Graphique pour la série de Fourier exponentielle complexe de  $x(t) = t$  sur l'intervalle  $0 < t < 2$  pour  $-N \leq n \leq N$  lorsque  $N = 3, 5$  et  $7$ .

---

### Exemple 2.6

Que se passe-t-il lorsqu'on dessine la série de Fourier exponentielle complexe de l'Exemple 2.5 sur l'intervalle  $0 < t < 4$  au lieu de  $0 < t < 2$ ?

### Solution

Malgré que  $x(t) = t$  n'est pas une fonction périodique, la série de Fourier exponentielle complexe l'est. Elle a une période  $T = 1/f_0$  comme démontré dans la figure 2.11.

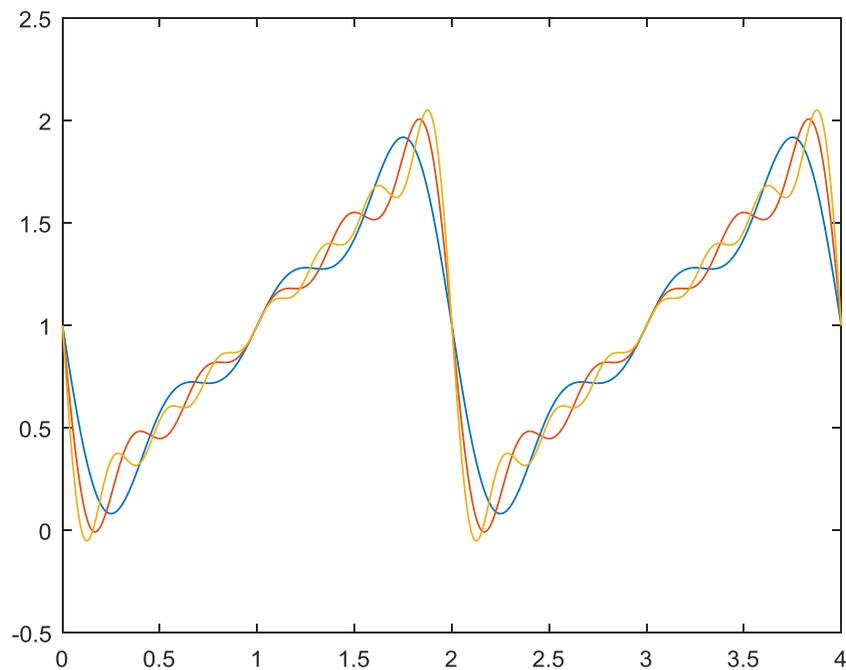


Figure 2.11: Graphique de  $x_3(t)$ ,  $x_5(t)$  et  $x_7(t)$  de l'Exemple 2.5 sur l'intervalle  $0 < t < 4$ . Nous pouvons montrer que la série de Fourier exponentielle complexe est périodique avec la période  $T = 1/f_0$ .

---

### Exemple 2.7

Quelle est l'erreur quadratique moyenne entre  $x(t)$  et  $x_3(t)$ ,  $x_5(t)$  et  $x_7(t)$  de l'Exemple 2.5?

### Solution

L'équation (2.41) nous permet de calculer l'erreur quadratique moyenne:

$$\varepsilon_N = \int_0^2 |x(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N c_n |X_n|^2$$

$$\int_0^2 |x(t)|^2 dt = \int_0^2 t^2 dt = \left. \frac{1}{3} t^3 \right|_0^2 = \frac{8}{3} = 2.667$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-3}^3 c_n |X_n|^2 &= 2 \cdot \left( 1^2 + \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{4\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} \right) \\ &= 2 + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} \\ &= 2.5576 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_3 = 2.667 - 2.552 = 0.115$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-5}^5 c_n |X_n|^2 &= 2.5576 + 2 \left( \frac{2}{16\pi^2} + \frac{2}{25\pi^2} \right) \\ &= 2.593 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_5 = 2.667 - 2.593 = 0.074$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-7}^7 c_n |X_n|^2 &= 2.593 + 2 \left( \frac{2}{36\pi^2} + \frac{2}{49\pi^2} \right) \\ &= 2.613 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_7 = 2.667 - 2.613 = 0.054$$

En observant les résultats, on remarque que lorsque  $N$  accroît, l'EQM entre  $x(t)$  et  $x_N(t)$  décroît. Puisqu'il a une infinité de base pour la série de Fourier exponentielle complexe,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N = 0 \quad (2.44)$$


---