Test mi-session 2
Durée: 80 min
Place: MRT219
17 mars 2006
10:00–11:20

MAT 3380

Mid-term 2
Time: 80 min
Place: MRT219
17 March 2006
10:00–11:20

Prof.: Rémi Vaillancourt

Instructions:

(a) *Test à livre fermé. Tout genre de calculatrices autorisé.*
Closed book mid-term. All types of calculators are allowed.
(b) *Répondre dans le cahier-réponse et numéroter clairement chaque réponse.*
Answer in the answer booklet and clearly number each answer.
(c) *Les 6 questions ont toutes la même valeur.*
All six questions have the same value.
(d) *Une réponse sans calcul à l'appui ne sera pas corrigée.*
Show all computation. Bare answers will not be graded.
(e) *Tous les angles sont en RADIANS.*
Prière de tester et d'ajuster votre calculatrice.
All angles are in RADIAN measures.
Test and adjust your calculators.

$$\sin 1.123456789 = 0.90160112364453$$

"The purpose of computing is insight, not numbers", Hamming.

Qu. 1. Résoudre le système $Ax = b$ par substitutions prograde et rétrograde si $A = LU$ et

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Qu. 2. Trouver la décomposition de Cholesky et calculer le déterminant de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 10 & 1 \\ -2 & 1 & 21 \end{bmatrix}.$$

Donner le détail de vos calculs.

Qu. 3. Permuter les équations du système :

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & = & -17 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{rcl} x_1^{(0)} & = & 1 \\ x_2^{(0)} & = & 1 \\ x_3^{(0)} & = & 1 \end{array}$$

pour assurer la convergence de la récurrence de Gauss–Seidel et faire une passe par cette récurrence.

Qu. 4. Tracer les disques de Gershgorin de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1-i & 0.3+0.4i & 0.5i \\ 0.3i & -1+i & 0.3 \\ 0 & 0.6+0.8i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Qu. 5. Démontrer l'unicité de l'une des trois décompositions matricielles suivantes :

(a) $A = LU$ où A est régulière, L triangulaire inférieure avec $l_{ii} = 1$ et U est triangulaire supérieure.
(b) $A = GG^T$ où A est définie positive, G triangulaire inférieure avec $g_{ii} > 0$.
(c) $A = QR$ où A est régulière, Q orthogonale et R triangulaire supérieure avec $r_{ii} > 0$.

On peut supposer que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Qu. 6. Soit la réflexion de Householder :

$$P = I - 2\,\frac{vv^T}{v^Tv}.$$

Qu. 6(a). Montrer que P est symétrique : $P^T = P$.

Qu. 6(b). Montrer que P est orthogonale : $P^{-1} = P^T$.

Qu. 6(c). Trouver les valeurs propres de P. (Justifier votre réponse. Deviner ne suffit pas.)

Qu. 6(d). Calculer le déterminant de P.

On peut supposer que $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.