Qu 1) Donne une valeur approchée du point fixe

a)

$$x_{appr} = 0.2575$$

car la méthode du point fixe tend vers un zéro tel que $g(p) = p$; ici $p = 0.2575$

$g(x_n) = \frac{1}{3}(2 - e^{x_n} + x_n^2)$: $p = 0.2575$ est la racine car

$$g(0.2575) = \frac{1}{3}(2 - e^{0.2575} + (0.2575)^2) = 0.257538.$$

elle a été accélérée par Aitken et Steffensen. (on voit p facilement par ces méthodes)

: (Par Steffensen à x_3 on a déjà la racine)

b) l'ordre de convergence de ces trois méthodes.

$r_n(q) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{q}} \approx$ constant $\Rightarrow$ q est l'ordre de convergence

FPI : ordre est 1 car $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^1} \approx$ const

Aitken : ordre est 1.3 car $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{1.3}} \approx$ const

Steffensen : ordre est 2 car $\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \approx$ const

c) $g(x_n) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{x_n} + \frac{1}{3}x_n^2$

$$g'(x_n) = -\frac{1}{3}e^{x_n} + \frac{2}{3}x_n$$

$$g'(p) = g'(0.2575) = -\frac{1}{3}e^{0.2575} + \frac{2}{3}(0.2575)$$

$$= -0.4312306 + 0.171666667 = -0.259 \neq 0$$

$|g'(p)| < 1$ (52) T1. 2/5

mais (thm vue en classe)

$\Rightarrow |g'(p)| \neq 0 \Rightarrow$ ordre de convergence est 1 pour la méthode de fixe point. ✓

Qu 2) a) on remarque que la méthode la plus rapide sur la racine $p=1$ est avec multiplicité 2. c'est-à-dire il faut utiliser la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\,f(x_n)}{f'(x_n)}$$

on remarque ceci car $r_n(2) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \approx$ constant dès la 4e iteration. De plus, a partir de celle-ci on obtient $x_i = 1 \quad \forall i \geq$ dans la première table tandis que les autres n'ont pas convergé.

On peut donc déduire que l'ordre de convergence est 2 plus ✓

on voit donc que la multiplicité (l'ordre) du zéro (=1) est de 2.

b) on peut vérifier:

$$f(1) = (1-1) - \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 - 1 = 0$$ ✓

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = 1 \neq 0.$$

Donc multiplicité de 2 est l'ordre de la racine 1. de $f(x)$.

c) zéro simple $\Longleftrightarrow f'(p) \neq 0$ où $p =$ zéro.

Alors la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$, on met $g(x_n) = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Sorry I used $~~k~~$$f(x)$ instead of $h(x)$ (par habitude) pas de problème (5/2)

MTI.3/5

Où $m=1$

Donc $g(x_n) = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est une méthode du point fixe.

Pour que $g(x_n)$ converge du second ordre on doit obtenir $g'(p) = 0$

$$g'(x_n) = 1 - \left[\frac{f'(x_n)f'(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}\right]$$

$$= 1 - \cancel{1} + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$$

$$= \frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}$$

At $g'(p) = \dfrac{f(p)f''(p)}{(f'(x_n))^2}$ but $f(p)=0$ (because p is a root of f)

$$= \frac{0\, f''(p)}{(f''(x_n))^2}$$

$$= 0$$

Therefore $g'(p) = 0 \Rightarrow$ It at least of order 2.

we can also prove that

$g''(p) \neq 0$

And we saw by thm in class that a with simple root Newton's converges to order 2.

✓

(52) $\tau 1.4/5$

Q3) $\int_1^2 \left(x^2 - x^e e^{-x} + \frac{x^4}{24}\right) dx$

$f(x) = x^2 - x^e e^{-x} + \frac{x^4}{24}$

$f'(x) = 2x - \left[e x^{e-1} e^{-x} + x^e(-e^{-x})\right] + \frac{4x^3}{24}$ $\div 2x$

$f''(x) = 2 - \left[e(e-1)x^{e-2}e^{-x} - e^{-x}ex^{e-1} + ex^{e-1}(-e^{-x}) + e^{-x}x^e\right] + \frac{12x^2}{24}$

$\Rightarrow$ wrong

x^2 see graph $= 2 - \left[\qquad \right] + \frac{x^2}{2}$

$a = 1 \quad b = 2. \quad \Rightarrow \quad b - a = 1$

$|E_T| \le \left| \frac{(b-a)h^2 f''(\xi)}{12} \right| < 10^{-3}$

We see in graph that $M = \max_{1 \le x \le 2} f''(x) = 1.85$

MAT 3380

(52) T1. 5/5

$$|E_1| \le \frac{1 \cdot h^2}{12}(1.85) < 10^{-3}$$

$$h^2 < \frac{12 \times 10^{-3}}{1.85}$$

$$h^2 < 0.0064864 \quad \Rightarrow h < 0.0805387$$

$$\frac{1}{h} > \quad 12.416.$$

We take. $nh = b - a$

$$n\,h = 1$$

$$n \ge \frac{1}{h} \Rightarrow \quad n = 13$$

We take $n = 13$ and $h = \frac{1}{13}$

Q4) a)

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = \frac{1}{2}\left[0.367879\right]$$

$$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}\left[f(a) + 2f(a+h_2) + f(b)\right]$$

$$= \frac{1/2}{2}\left[f(0) + 2f(0 + 1/2) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[0 + 2f(0.5) + f(1)\right] = \frac{1}{4}\left[2 \times 0.151632665 + 0.367879\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[0.30326533 + 0.367879441\right]$$

$$= 0.167786193$$

verifie

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3}$$

b) $R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{R_{4,1} - R_{3,1}}{3}$

$= 0.16107990 + \frac{0.16107990 - 0.16248841}{3}$

$= 0.160610397$

Q5) a) $f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{-5.65014 - -5.89483}{0.3 - 0.1}$

$= 1.22345$

b) $f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-5.17788 - -5.65014}{0.6 - 0.3}$

$= 1.5742$

c) $p_3(x) = f_0 + (x-0) f[x_0, x_1] + (x-0)(x-0.1) f[x_0, x_1, x_2]$
$+ (x-0)(x-0.1)(x-0.3) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$p_3(x) = -6 + 1.05170x + 0.5725x(x-0.1)$
$+ 0.21500x(x-0.1)(x-0.3)$

d)

$f(0.2) \approx p_3(0.2) = -6 + 1.0517(0.2) + 0.5725(0.2)(0.2-0.1)$
$+ 0.2150(0.2)(0.2-0.1)(0.2-0.3)$
$= -6 + 0.21034 + 0.01145 + -0.00043 = -5.77864$