Test mi-session 1
Durée: 80 min
Place: MRT219
17 février 2006
10:00–11:20

MAT 3380

Mid-term 1
Time: 80 min
Place: MRT219
17 February 2006
10:00–11:20

Prof.: Rémi Vaillancourt

Instructions:

(a) *Test à livre fermé. Tout genre de calculatrices autorisé.*
Closed book mid-term. All types of calculators are allowed.

(b) *Répondre dans le cahier-réponse et numéroter clairement chaque réponse.*
Answer in the answer booklet and clearly number each answer.

(c) *Les 5 questions ont toutes la même valeur.*
All five questions have the same value.

(d) *Une réponse sans calcul à l'appui ne sera pas corrigée.*
Show all computation. Bare answers will not be graded.

(e) *Tous les angles sont en RADIANS.*
Prière de tester et d'ajuster votre calculatrice.
All angles are in RADIAN measures.
Test and adjust your calculators.

$$\sin 1.123456789 = 0.90160112364453$$

"The purpose of computing is insight, not numbers", Hamming.

Qu. 1. Soit l'itération de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2 - e^{x_n} + x_n^2\right), \qquad x_1 = 0.5.$$

Cette itération de point fixe, l'accélération d'Aitken et l'accélération de Steffensen donnent les résultats suivants :

	FPI	Aitken	Steffensen
x1	0.5000	0.2587	0.5000
x2	0.2004	0.2576	0.2587
x3	0.2727	0.2575	0.2575
x4	0.2536	0.2575	0.2575
x5	0.2586	0.2575	0.2575
x6	0.2573	0.2575	NaN
x7	0.2576	0.2575	NaN
x8	0.2575	0.2575	NaN

Qu. 1(a): Donner une valeur approchée du point fixe et expliquer votre réponse :

$$x_{\text{appr}} =$$

Soit

$$\varepsilon_n = y_{n+1} - y_n \quad \text{et} \quad r_n(q) = \varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n^q.$$

L'itération de point fixe x_n, l'accélération d'Aitken a_n et l'accélération de Steffensen s_n donnent les résultats suivants :

$r_n(1)$	$r_n(1.3)$	$r_n(2)$
-0.24141908405732	0.03283711358292	0.00002287302451
-0.26467314169051	0.02968834769036	0.00000000078230
-0.25824069094927	0.03009078416098	0.00000000000000
-0.25989942037801	0.02996773583712	NaN
-0.25946794316388	0.02999829638646	NaN

Qu. 1(b): Déduire de ces résultats l'ordre de convergence de ces trois méthodes :

FPI: ; Aitken: ; Steffensen:

Qu. 1(c): Trouver analytiquement l'ordre de convergence de l'itération de point fixe au moyen de la valeur de la dérivée $g'(0.2575)$.

Qu. 2. Supposons que $f(x)$ admet un zéro de multiplicité $m \geq 1$ en $x = a$. On sait alors que la méthode de Newton modifiée

$$x_{n+1} = x_n - m\,\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge du second ordre, si x_0 est suffisamment près de a.

La méthode de Newton modifiée avec $m = 1, 2, 3$ appliquée à l'équation

$$f(x) = (x - 1) - \ln x$$

produit les résultats suivants :

m=1	m=2	m=3
1.5000	1.5000	1.5000
1.2164	0.9328	0.6492
1.1011	0.9984	1.1001
1.0489	1.0000	0.9452
1.0241	1.0000	1.0259
1.0119	1.0000	0.9867
1.0059	1.0000	1.0065

Avec $r_n(k)$ définie à la question 1 les trois méthodes produisent le tableau suivant :

$r_n(1)$	$r_n(2)$	$r_n(3)$
0.4064	0.2041	-0.5300
0.4529	0.3614	-0.3436
0.4764	0.3339	-0.5208
0.4882	0.3330	-0.4849

Qu. 2(a): De cet dernier tableau, identifier la méthode la plus rapide sur la racine $p = 1.000$ et, de votre réponse, déduire l'ordre q du zéro de $f(x)$ en p.

Qu. 2(b): Montrer analytiquement que $f(x)$ admet un zéro d'ordre q en $x = 1$.

Qu. 2(c): Montrer analytiquement que la méthode de Newton ($m = 1$) converge du second ordre sur un zéro simple de $h(x) = 0$.

Qu. 3. Soit la méthode des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2})$$

$$+ 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big] - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \qquad a < \xi < b.$$

Trouver les valeurs h and n pour approcher

$$\int_0^2 \left(x^2 - x^2\,e^{-x} + \frac{x^4}{24}\right)\,dx$$

au 10^{-3} près la méthode des trapèzes.

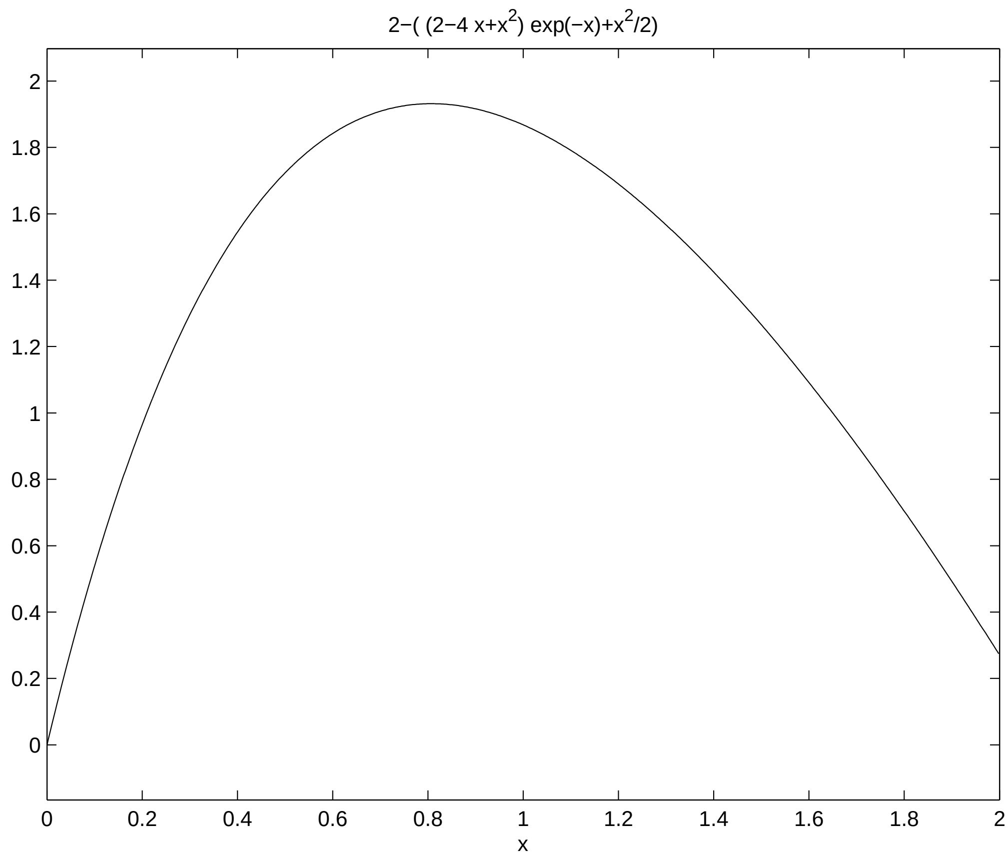

Figure 1. Le graphique de $f''(x)$ sur $[0, 2]$ pour la question 3.

Qu. 4. Les valeurs de l'intégrale

$$\int_0^1 x^2 \, e^{-x} \, dx$$

obtenues par la méthode des trapèzes (voir Qu. 3) avec

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad h_6 = \frac{1}{2^5},$$

se trouvent dans la première colonne ($j = 1$) du tableau suivant, où l'on a omis $R_{2,1}$ and $R_{4,3}$:

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6
h1 k=1	0.18393972					
h2 k=2		0.16240168				
h3 k=3	0.16248841	0.16072248	0.16061053			
h4 k=4	0.16107990		0.16060292	0.16060280		
h5 k=5	0.16072243	0.16060327	0.16060280	0.16060279	0.16060279	
h6 k=6	0.16063272	0.16060282	0.16060279	0.16060279	0.16060279	0.16060279

On obtient les autres colonnes par le schéma de Romberg :

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}.$$

Qu. 4(a): Calculer $R_{2,1}$ par la méthode des trapèzes avec $h = 1/2$.

Qu. 4(b): Calculer $R_{4,2}$.

Qu. 5. Soit le tableau **??** de différences divisées incomplet.

TABLE 1. Tableau de différences divisé pour la question 5.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+3}]$	$f[x_i, \dots, x_{i+4}]$
0.0	-6.00000				
		1.05170			
0.1	-5.89483		0.57250		
		$f[x_1, x_2]$		0.21500	
0.3	-5.65014		$f[x_1, x_2, x_3]$		0.06301
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
0.6	-5.17788		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	
1.0	-4.28172		$f[x_3, x_4, x_5]$		
		$f[x_4, x_5]$			
1.1	-3.99583				

Soit le polynôme de Gregory–Newton prograde à différences divisées avec $x_0 = 0$:

$$p_n(x) = f_0 + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

Qu. 5(a): Calculer $f[x_1, x_2]$.

Qu. 5(b): Calculer $f[x_2, x_3]$.

Qu. 5(c): Écrire le polynôme de Gregory–Newton $p_3(x)$ avec $x_0 = 0$ pour les données du tableau précédent.

Qu. 5(d): Interpoler les données $\{f[x_i]\}$ en $x = 0.2$ au moyen de $p_3(x)$.