D4.1

MAT 2784B

2009.03.02

RÉMI VAILLANCOURT

Devoir #4

3.4 $y^{(4)} + y''' - 3y'' - y' + 2y = 0$

On pose : $y = e^{\lambda x}$ $y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$ $y^{(4)} = \lambda^4 e^{\lambda x}$

Alors : $e^{\lambda x}(\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2) = 0$ puisque $e^{\lambda x} \neq 0$,
alors : $\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

Les racines sont :

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \lambda_3 = -1 \quad \lambda_4 = -2.$$

La solution générale est donc :

$$y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-2x}$$

3.5. $y''' + 12y'' + 36y' = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$ $y''(0) = -7$

Alors : $\lambda^3 + 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 12\lambda + 36) = 0$ $\lambda_1 = 0$

$\lambda(\lambda + 6)(\lambda + 6) = 0$

$\lambda(\lambda + 6)^2 = 0$ $\lambda_{2,3} = -6$

La solution générale est donc :

$$y = c_1 + c_2 e^{-6x} + c_3 x e^{-6x}$$

$$y(0) = 0 = c_1 + c_2 \underbrace{e^{-6(0)}}_{1} + \underbrace{c_3 (0) e^{-6(0)}}_{0}$$

$$0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2.$$

$$y'(x) = -6c_2 e^{-6x} - 6c_3 x e^{-6x} + c_3 e^{-6x}$$

$$y'(0) = 1 = -6c_2 e^{-6(0)} - \cancel{6c_3 (0) e^{-6(0)}}^{\,0} + c_3 e^{-6(0)}$$

$$1 = -6c_2 + c_3 \Rightarrow c_3 = 1 + 6c_2$$

$$y''(x) = 36c_2 e^{-6x} + 36c_3 x e^{-6x} - 6c_3 e^{-6x} - 6c_3 e^{-6x}$$

$$y''(0) = -7 = 36c_2 e^{-6(0)} + \cancel{36c_3 (0) e^{-6(0)}}^{\,0} - 6c_3 e^{-6(0)} - 6c_3 e^{-6(0)}$$

$$-7 = 36c_2 - 6c_3 - 6c_3 = 36c_2 - 12c_3$$

$$= 36c_2 - 12(1 + 6c_2)$$

$$= 36c_2 - 12 - 72c_2$$

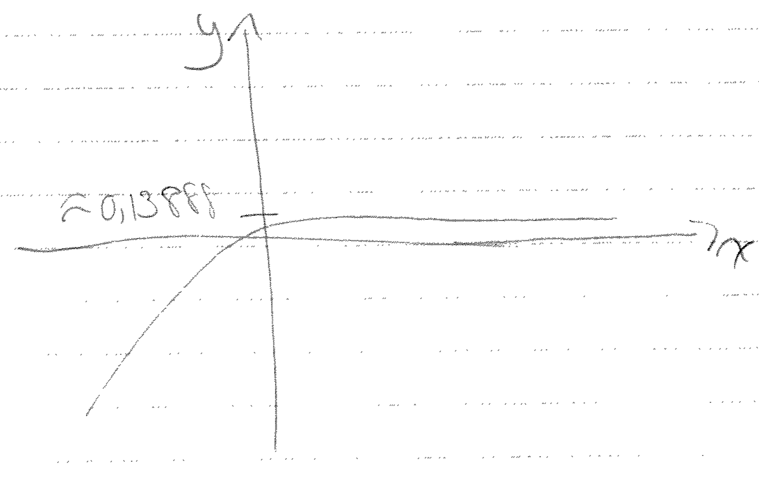
$$5 = -36c_2$$

$$c_2 = \frac{-5}{36} \qquad c_1 = \frac{5}{36}$$

$$c_3 = 1 + 6\left(\frac{-5}{36}\right) = 1 + \frac{-5}{6} = \frac{1}{6}$$

La solution particulière est donc :

$$y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{x}{6} e^{-6x}$$



3.12. $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = \cosh x = \left(\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\right)$

$-\infty \leq x \leq +\infty$

On prend le wronskien:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^x/2 - e^{-x}/2 \\ e^x & -e^{-x} & e^x/2 + e^{-x}/2 \\ e^x & e^{-x} & e^x/2 - e^{-x}/2 \end{vmatrix}$$

$-\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$

On fait $-L_1 + L_2$ et $-L_1 + L_3$ pour obtenir:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^x/2 - e^{-x}/2 \\ 0 & -2e^{-x} & e^{-x} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les fonctions sont donc linéairement dépendantes, pour tout x entre $-\infty$ et $+\infty$

3.26. $y_1(x) = x$ $y_2(x) = x\ln x$ $y_3(x) = x^2 \ln x$ $e^{-2} < x < +\infty$

Avec le wronskien:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2\ln x \\ 1 & \ln(x)+1 & 2x\ln x + x \\ 0 & 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix}$$

On fait $-L_1/x + L_2$ pour obtenir:

$$\begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2\ln x \\ 0 & 1 & x\ln x + x \\ 0 & 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix} = x\left(2\ln(x) + 3 - [\ln(x) + 1]\right) = x(\ln(x) + 2)$$

Si on prend les racines de ceci: $x = 0$ et $x = e^{-2}$. Mais vu les conditions initiales cela n'est pas valide, alors, $W(x) = x(\ln x + 2) \neq 0$, et c'est donc linéairement indépendant.

3.21 $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1(x) = e^{-2x}$

Pour trouver une autre solution, nous devons :

$y_1(x) = e^{-2x}$, $y_1'(x) = -2e^{-2x}$, $y_2'' = 4e^{-2x}$

et en posant $y_2(x) = \mu(x)y_1(x)$

alors : $y_2'(x) = \mu' y_1 + \mu y_1'$

et $y_2''(x) = \mu'' y_1 + \mu' y_1' + \mu' y_1' + \mu y_1''$

$= \mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1''$

On substitue ces valeurs dans l'équation initiale :

$= (1+2x)(\mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1'') + 4x(\mu' y_1 + \mu y_1') - 4(\mu y) = 0.$

$= \mu'' y_1 + 2\mu' y_1' + \mu y_1'' + 2x\mu'' y_1 + 4x\mu' y_1' + 2x\mu y_1'' + 4x\mu y_1 + 4x\mu y_1' - 4\mu y = 0.$

$= \mu(y_1'' + 2xy_1'' + 4xy_1' - 4y_1) + \mu'(2y_1' + 4xy_1' + 4xy_1) + \mu''(y_1 + 2xy_1) = 0.$

Puisque chacun sont de degré différent et égal à zéro, nous pouvons séparer le tout de la façon suivante :

$(y_1'' + 2xy_1'' + 4xy_1' - 4y_1) = e^{-2x}(\cancel{4} + \cancel{8x} - \cancel{8x} - \cancel{4}) = 0$

$(2y_1' + 4xy_1' + 4xy_1) = e^{-2x}(-4 - 8x + 4x) = e^{-2x}(-4x - 4)$

$(y_1 + 2xy_1) = e^{-2x}(1 + 2x)$

L'équation ci-dessus devient donc :

$0 + \mu'(e^{-2x}(-4x - 4)) + \mu''(e^{-2x}(1 + 2x)) = 0$

Mais sachant que $e^{-2x} \neq 0$, nous obtenons:

$$\mu'(-4x-4) + \mu''(1+2x) = 0.$$

Posons $v = \mu'$, on a donc

$$v(-4x-4) = -v'(1+2x)$$
$$v(4(x+4)) = \frac{dv}{dx}(1+2x)$$
$$c + \int \frac{4(x+1)}{(2x+1)}\,dx = \int \frac{dv}{v}$$
$$\ln|v| = 2x + \ln(2x+1) + 1$$
$$v = e^{2x + \ln(2x+1)+1}$$
$$= (e^{2x+1})(2x+1) = \mu'(x).$$

Trouvons maintenant $\mu(x)$:

$$\int \mu'(x) = \int e^{(2x+1)}(2x+1)\,dx$$
$$= e^{2x+1}\,x$$

Nous avons donc que $y_2(x) = \mu(x)\,y_1(x)$, alors:

$$y_2(x) = (xe^{2x+1})(e^{-2x}) = ex$$

3.22. $y'' + 3y' + 2y = 5e^{-2x}$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda+2)(\lambda+1) = 0 \qquad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$$

Cela nous donne la première partie de la solution.

$$y_1(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}.$$

On vérifie si $5e^{-2x}$ est de dimension finie :

$r(x) = 5e^{-2x}$ $\quad r'(x) = -10e^{-2x} = -2r(x) \Rightarrow \dim = 1$

On peut donc utiliser la méthode des coefficients indéterminés.

On prend une forme d'équation particulière, soit :

$y_p(x) = axe^{-2x}$ $\quad y_p'(x) = -2axe^{-2x} + ae^{-2x}$

$y_p''(x) = 4axe^{-2x} - 2ae^{-2x} - 2ae^{-2x}$

$= 4axe^{-2x} - 4ae^{-2x}$

On substitue :

$y_p''(x) + 3y_p'(x) + 2y_p(x) = 5e^{-2x}$

$\cancel{4axe^{-2x}} - 4ae^{-2x} \cancel{- 6axe^{-2x}} + 3ae^{-2x} + \cancel{2axe^{-2x}} = 5e^{-2x}$

$-a\cancel{e^{-2x}} = 5\cancel{e^{-2x}}$

$a = -5$

On obtient donc que $y_p(x) = -5xe^{-2x}$

La solution est donc : $c_1e^{-2x} + c_2e^{x} - 5xe^{-2x}$ $+5e^{-2x} = y_p(x)$

0,2
0,3

9.1 $f(x) = \ln(x+1)$ $\quad x_0 = 0,\ x_1 = 0{,}6$ $\quad x_2 = 0{,}9$ $\quad x = 0{,}45$

Commençons avec le polynôme de degré 1 :

$L_0(x) = \dfrac{(x-0{,}6)}{(0-0{,}6)} = \dfrac{-x}{0{,}6} + 1$

$L_1(x) = \dfrac{(x-0)}{(0{,}6-0)} = \dfrac{x}{0{,}6}$

$p(x) = \ln(1)\left(\dfrac{-x}{0{,}6} + 1\right)^{=0} + \ln(1{,}6)\left(\dfrac{x}{0{,}6}\right)$

$$p(x) = \ln(1{,}6)\left(\frac{x}{0{,}6}\right)$$

Si on évalue à $x = 0{,}45$, on obtient :

$$p(0{,}45) = \ln(1{,}6)\left(\frac{0{,}45}{0{,}6}\right) = 0{,}35$$

On passe ensuite au polynome de degré 2 :

$$L_0(x) = \frac{(x-0{,}6)(x-0{,}9)}{(0-0{,}6)(0-0{,}9)} = \frac{x^2 - 1{,}5x + 0{,}54}{0{,}54}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0{,}9)(x-0)}{(0{,}6-0{,}9)(0{,}6-0)} = \frac{x^2 - 0{,}9x}{-0{,}18}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0{,}6)}{(0{,}9-0{,}6)(0{,}9-0)} = \frac{x^2 - 0{,}6x}{0{,}27}$$

$$p(x) = \ln(1)\cancel{\left(\frac{x^2 - 1{,}5x + 0{,}54}{0{,}54}\right)}^{0} + \ln(1{,}6)\left(\frac{x^2 - 0{,}9x}{-0{,}18}\right) + \ln(1{,}9)\left(\frac{x^2 - 0{,}6x}{0{,}27}\right)$$

$$= \ln(1{,}6)\left(\frac{x^2 - 0{,}9x}{-0{,}18}\right) + \ln(1{,}9)\left(\frac{x^2 - 0{,}6x}{0{,}27}\right)$$

Si on l'évalue à $x = 0{,}45$:

$$p(0{,}45) = \ln(1{,}6)\left(\frac{(0{,}45)^2 - 0{,}9(0{,}45)}{-0{,}18}\right) + \ln(1{,}9)\left(\frac{(0{,}45)^2 - 0{,}6(0{,}45)}{0{,}27}\right)$$

$$= 0{,}37$$

Trouvons maintenant les erreurs:

L'erreur absolue est de: $f(0{,}45) = \ln(1{,}45) = 0{,}37$

Pour le polynôme de degré 1:

$\varepsilon_1 = f(0{,}45) - p_1(0{,}45) = 0{,}02$

Pour le polynôme de degré 2:

$\varepsilon_2 = f(0{,}45) - p_2(0{,}45) = 0$ * Si on avait pris 3 décimales on aurait eu $\varepsilon_2 = 0{,}004$

L'erreur entre les deux polynômes est de:

$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0{,}02$

9.6. degré 3 $(-1,2), (0,0), (1.5,-1), (2,4)$

On peut faire une table de différences divisées:

x	1ère diff div	2e diff div	3e diff div
x_0	$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_1, x_2]$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$[x_1, x_2]$	$[x_1, x_2, x_3]$	$[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_2	$[x_2, x_3]$	$[x_2, x_3, x_4]$	$[x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_3	$[x_3, x_4]$	$[x_3, x_4, x_5]$	
x_4	$[x_4, x_5]$		
x_5			

On fait les calculs et substituons les valeurs :

x_i	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-1	$\boxed{2}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{0{,}5333332}$	$\boxed{1{,}600000}$
0	0	$-0{,}666667$	$5{,}333335$	
$1{,}5$	-1	10		
2	4			

Le polynôme est donc :

$$P_3(x) = 2 + (x+1)(-2) + (x+1)(x-0)(0{,}5333332) + (x+1)(x-0)(x-1{,}5)(1{,}6000000).$$

$$= \cancel{2} - 2x - \cancel{2} + (x^2+x)(0{,}5333332) + (x^2+x)(x-1{,}5)(1{,}60000000)$$

$$= 0{,}5333332x^2 + 0{,}5333332x + (x^3 - 1{,}5x^2 + x^2 - 1{,}5x)(1{,}6) - 2x$$

$$= 0{,}5333332x^2 + 0{,}5333332x + 1{,}6x^3 - 0{,}8x^2 - 2{,}4x - 2x$$

$$= 1{,}6x^3 - 0{,}2666668x^2 + 0{,}5333332x - 2{,}4x - 2x$$

$$= 1{,}6x^3 - 0{,}2666668x^2 - 3{,}867x$$

$$= 1{,}6x^3 - 0{,}27x^2 - 3{,}87x$$