SOLUTIONS

Devoir #7
MAT 2784 B

RÉMI VAILLANCOURT

#6.4 $F(t) = \sin(wt+\theta)$

On sait que $\mathcal{L}(F)(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$

Donc

$$\mathcal{L}(\sin(wt+\theta))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \sin(wt+\theta)\,dt$$

Identité trigonométrique

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(wt+\theta) = \sin wt \cos\theta + \cos wt \sin\theta$$

Donc, on peut écrire

$$\mathcal{L}(\sin wt \cos\theta + \cos wt \sin\theta)(s) \overset{\text{opérateur linéaire}}{=} \cos\theta\,\mathcal{L}(\sin wt)(s) + \sin\theta\,\mathcal{L}(\cos wt)$$

ET selon la table 7.2 p. 137 du manuel

$$\mathcal{L}(\sin kt)(s) = \frac{K}{s^2+K^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos kt)(s) = \frac{s}{s^2+K^2}$$

Donc $\mathcal{L}(\sin wt+\theta)(s) = \cos\theta \dfrac{w}{s^2+w^2} + \sin\theta \dfrac{s}{s^2+w^2}$

$$= \frac{w\cos\theta}{s^2+w^2} + \frac{s(\sin\theta)}{s^2+w^2}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\sin(wt+\theta))(s) = \frac{w\cos\theta + (\sin\theta)s}{s^2+w^2}}$$

numéro 6.10 au verso ①

D 7.2

6.10 $f(t) = (1+2e^{-t})^2$

On sait que $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$\mathcal{L}(1+2e^{-t})^2(s) = \int_0^\infty e^{-st}(1+2e^{-t})^2\,dt$$

$$f(t) = (1+2e^{-t})^2$$
$$= (1+4e^{-t}+4e^{-2t})$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{L}(\underbrace{1+4e^{-t}+4e^{-2t}}_{})(s) = \int_0^\infty e^{-st}(1+4e^{-t}+4e^{-2t})\,dt$$

Puisque $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{s} + 4\,\frac{1}{s+1} + 4\,\frac{1}{s+2}}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt + 4\int_0^\infty e^{(-t-st)}\,dt + 4\int_0^\infty e^{(-2t-st)}\,dt$$

$$= \frac{1}{s} + 4\int_0^\infty e^{-t(1+s)}\,dt + 4\int_0^\infty e^{-t(2+s)}\,dt$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{4e^{-t(1+s)}}{-(1+s)}\Big|_0^\infty + \frac{4e^{-t(2+s)}}{-(2+s)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{4e^{-\infty(1+s)}}{-(1+s)} - \frac{4e^{0(1+s)}}{-(1+s)} + \frac{4e^{-\infty(2+s)}}{-(2+s)} - \frac{4e^{0(2+s)}}{-(2+s)}$$

$e^{-\infty}=0$ $\quad$ $e^{-\infty}=0$

$$= \frac{1}{s} + \frac{4e^{-\infty}}{-(1+s)} - \frac{4e^{0}}{-(1+s)} + \frac{4e^{-\infty}}{-(2+s)} - \frac{4e^{0}}{-(2+s)}$$

trop long $\Longrightarrow$

$$= \frac{1}{s} + 0 - \frac{4}{-(1+s)} + 0 - \frac{4}{-(2+s)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{4}{1+s} + \frac{4}{2+s}$$

$$= \frac{(2+s)(1+s) + 4s(2+s) + 4(1+s)s}{s(1+s)(2+s)}$$

$$= \frac{(2+3s+s^2) + 8s + 4s^2 + 4s + 4s^2}{s(2+3s+s^2)}$$

Alors $\boxed{\mathcal{L}\{(1+2e^{-t})^2\}(s) = \dfrac{9s^2+15s+2}{s(2+3s+s^2)}}$

#16.16 $F(s) = \dfrac{2s}{s^2+3}$ trouver la transformé inverse

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+3}\right\} = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{3}^2}\right\} = 2\cos(\sqrt{3}\,t)$$

$\boxed{F(t) = 2\cos(\sqrt{3}\,t)}$, car $\mathcal{L}(\cos kt) = \dfrac{s}{s^2+k^2}$ ✓

#16.27 $F(s) = \dfrac{1}{s^4-9}$ trouver la transformé inverse

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+3)(s^2-3)}\right\}}_{\text{paire}}$$

$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$

$F(s) = \frac{1}{2}$

Fractions partielles

$$\frac{1}{(s^2+3)(s^2-3)} = \frac{As+B}{s^2-3} + \frac{Cs+D}{s^2+3}$$

$$= \frac{(As+B)(s^2+3)+(Cs+D)(s^2-3)}{(s^2+3)(s^2-3)}$$

Au numérateur

$$1 = (As+B)(s^2+3)+(Cs+D)(s^2-3)$$

$$1 = As^3+Bs^2+3As+3B+Cs^3-3Cs+Ds^2-3D$$

On a

$$\begin{aligned} A+C&=0 \quad (s^3)\\ B+D&=0 \quad (s^2)\\ 3A-3C&=0 \quad (s)\\ 3B-3D&=1 \end{aligned}$$

On obtient alors la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Et en résolvant ce système par Gauss-Jordan, on obtient

$$A = 0 \qquad C = 0$$
$$B = 1/6 \qquad D = -1/6$$

Alors, $\dfrac{1/6}{s^2-3} + \dfrac{-1/6}{s^2+3} = \dfrac{1}{s^4-9}$

Donc $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1/6}{(s^2-3)} + \dfrac{-1/6}{(s^2+3)}\right\}$

$f(t) = \dfrac{1}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-3} + \dfrac{-1}{s^2+3}\right\}$ $\quad \dfrac{1}{s^2+w^2} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{w}\sin wt\right\}$, $\dfrac{1}{s^2-a^2} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{a}\sinh at\right\}$ p. T2 $\frac{1}{2}$ (manuel)

Donc

$$f(t) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-(\sqrt{3})^2} + \frac{-1}{s^2+(\sqrt{3})^2}\right\}$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sinh(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)\right)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sinh(\sqrt{3}t) - \sin\sqrt{3}t\right)}$$

<u>OU</u> Directement de la feuille de formule

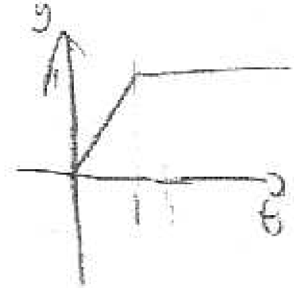
$$\frac{1}{s^4-k^4} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2k^3}\left(\sinh(kt) - \sin(kt)\right)\right\}$$

Donc $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4-\sqrt{3}^4}\right\} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}^3}\left(\sinh(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)\right)$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{6\sqrt{3}}\left(\sinh(\sqrt{3}t) - \sin(\sqrt{3}t)\right)}$$

ce qui concorde avec mon résultat précédent. Parfait!! :)

#6.32 $\quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$



Meilleure solution: $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$= \int_0^1 e^{-st}(t)\,dt + \int_1^\infty e^{-st}(1)\,dt$$

$u = t \quad dv = e^{-st}dt$
$du = 1dt \quad v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

$$= \frac{-t}{s}e^{-st} - \int_0^1 \frac{-1}{s}e^{-st}(1)\,dt + \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_1^\infty$$

$$= \left[\frac{-t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^1 + \frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_1^\infty$$

$$= \left[\frac{-1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s^2}e^{-s}\right] - \left[\frac{-0}{s}e^{0} - \frac{1}{s^2}e^{0}\right] + \left[\frac{-1}{s}e^{-s\infty} - \frac{-1}{s}e^{-s}\right]$$

$$= \frac{-1}{s^2}e^{-s} + 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t - u(t-1)\,t + u(t-1) = t - u(t-1)(t-1)$$
$$F(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2}$$

$-\frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}$

$\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{-1}{s}\right)e^{-st}\Big|_0^1$

À noter que si on fait avec la fonction $u(t)$ d'Heaviside on arrive à la même réponse

avec Heaviside on a

$f(t) = t - u(t-1)[t] + u(t-1)[1]$
$f(t) = t - u(t-1)[t-1]$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = -e^{-s}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{s^2}} \quad \boxed{= [1 - e^{-s}]\frac{1}{s^2}}$$

#6.43 $\quad y'' + y = \sin t \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

Posons $\mathcal{L}(y)(s) = Y(s)$

L'équation différentielle devient donc:

$$\mathcal{L}(y'') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin t) \qquad \mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s^2+k^2}$$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)Y(s) - s y(0) - y'(0) = \frac{1}{s^2+1}$$

Puisque $y'(0)$ et $y(0) = 0$

$$(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

À l'aide de la transformée inverse $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(1)^3}{(s^2+1^2)^2}\right)$

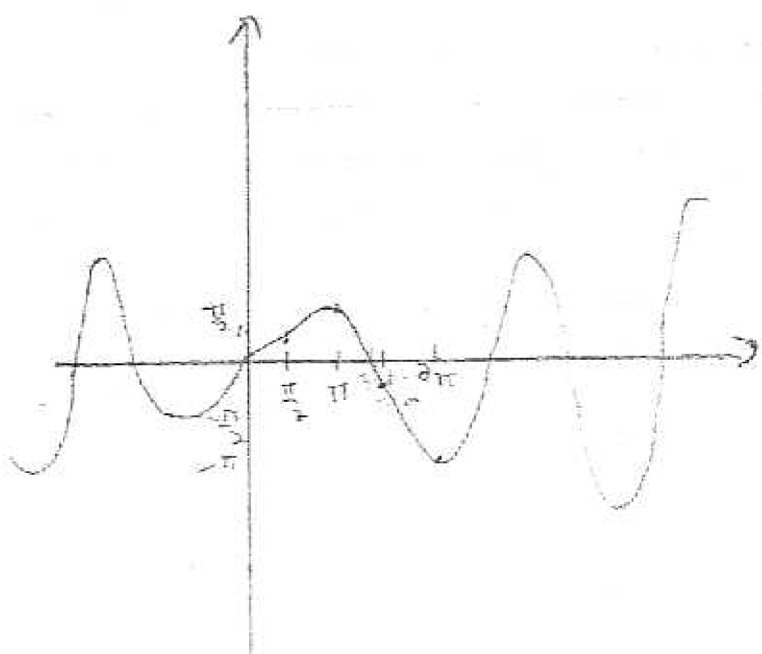
$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2k^3}{(s^2+k^2)^2}\right) = \sin kt - kt\cos kt$

↳ p.137 (manuel) Table 3.2 #16

Donc $\boxed{y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)}$ ✓

Graphique



#11.4

$$3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 23$$
$$18x_1 + 48x_2 - 39x_3 = 136$$
$$9x_1 - 27x_2 + 42x_3 = 45$$

Il faut donc résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ suivant

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 18 & 48 & -39 \\ 9 & -27 & 42 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 23 \\ 136 \\ 45 \end{bmatrix}}$$

Par décomposition LU avec pivotage

Le pivot de la première colonne est 18

$$|18| > |3| \quad |18| > |9|$$

Permutons donc la 2ième et la 1ère ligne de A

$$P_1A = \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 3 & 9 & 6 \\ 9 & -27 & 42 \end{bmatrix}, \text{ où } P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Appliquons une transformation gaussienne, M_1, sur P_1A

$$\begin{array}{c} \\ -\frac{1}{6} \leftarrow \\ -\frac{1}{2} \leftarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{18} & 1 & 0 \\ \frac{-9}{18} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 3 & 9 & 6 \\ 9 & -27 & 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 0 & 1 & 25/2 \\ 0 & -51 & 123/2 \end{bmatrix}$$

Alors, $M_1P_1A = A_1$

De cette matrice 2x2

$$\begin{bmatrix} 1 & 25/2 \\ -51 & 123/2 \end{bmatrix}$$

le pivot de la 1ère colonne est -51

$$|-51| > |1|$$

Alors, il faut permuter la 3ième et la 2ième ligne

$$P_2 A_1 = \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 0 & -51 & 123/2 \\ 0 & 1 & 25/2 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquons une transformation gaussienne M_2, sur $P_2 A_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{51} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 0 & -51 & 123/2 \\ 0 & 1 & 25/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 0 & -51 & 123/2 \\ 0 & 0 & 233/17 \end{bmatrix}$$

Donc $\quad M_2 P_2 A_1 = U$

Alors $\quad M_2 P_2 M_1 P_1 A = U$

Ainsi $\quad A = P_1^{-1} M_1^{-1} P_2^{-1} M_2^{-1} U = LU$

Alors $\quad L = P_1^{-1} M_1^{-1} P_2^{-1} M_2^{-1}$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1^{-1} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_2^{-1}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/6 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/51 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/51 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/51 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/51 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/6 & -1/51 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système
$L\vec{y} = \vec{b}$

par substitutions progrades

$$\begin{bmatrix} 1/6 & -1/51 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 136 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 136$

$y_2 = -\frac{y_1}{2} + 45 \Rightarrow y_2 = -23$

$y_3 = -\frac{y_1}{6} + \frac{y_2}{51} + 23 \Rightarrow y_3 = \frac{-2}{17}$

Et on résout le système
$U\vec{x} = \vec{y}$

par substitutions rétrograde

$$\begin{bmatrix} 18 & 48 & -39 \\ 0 & -51 & 123/2 \\ 0 & 0 & 233/17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 \\ -23 \\ -2/17 \end{bmatrix}$$

$\frac{233}{17} x_3 = \frac{-2}{17} \Rightarrow x_3 = -0{,}0086$

$-51 x_2 + \frac{123}{2} x_3 = -23 \Rightarrow x_2 = 0{,}4406$

$18 x_1 + 48 x_2 - 39 x_3 = 136 \Rightarrow x_1 = 6{,}3619$

X $\boxed{\text{Donc } x_3 = -0{,}0086,\ x_2 = 0{,}4406 \text{ et } x_1 = 6{,}3619}$ $\boxed{x = \begin{bmatrix} -0{,}0086 \\ 0{,}4406 \\ 6{,}3619 \end{bmatrix}}$

5

#11.5

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 3{,}8 \quad (1)$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5{,}7 \quad (2)$$
$$5x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 2{,}8 \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Par décomposition LU avec pivotage en ayant étalonné le 1er membre de chaque équation dans la norme L_∞

On divise la 1ère équation par $s_1 = \max\{|1|, |-1|, |2|\} = 2$

la 2ème équation par $s_2 = \max\{|4|, |3|, |-1|\} = 4$

et la 3ème équation par $s_3 = \max\{|5|, |10|, |3|\} = 10$

Alors

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Il faut donc résoudre le système suivant

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1 & 3/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ -1{,}425 \\ 0{,}28 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \frac{3{,}8}{2} \to s_1 \\ \to \frac{-5{,}7}{4} \to s_2 \\ \to \frac{2{,}8}{10} \to s_3 \end{matrix}$$

→ Pour éviter les erreurs, on applique la décomposition LU sur le système initial avec le pivot trouvé dans la norme L_∞ qui est dans la seconde équation car, $|1| > |1/2|$

Donc
Permutons la 2ième et la 1ère ligne de A

$$P_1 A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{où } P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Appliquons une transformation gaussienne M_1 sur $P_1 A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -7/4 & 9/4 \\ 0 & 25/4 & 17/4 \end{bmatrix}$$

Alors $M_1 P_1 A = A_1$

De cette matrice 2x2

$$\begin{bmatrix} -7/4 & 9/4 \\ 25/4 & 17/4 \end{bmatrix}$$

le pivot de la 1ère colonne est $25/4$
$|25/4| > |-7/4|$

Alors, il faut permuter la 3ième et la 2ième ligne

$$P_2 A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 25/4 & 17/4 \\ 0 & -7/4 & 9/4 \end{bmatrix} \quad \text{où } P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Appliquons une transformation gaussienne M_2, sur $P_2 A_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 25/4 & 17/4 \\ 0 & -7/4 & 9/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 25/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 86/25 \end{bmatrix}$$

Donc $M_2 P_2 A_1 = U$
Alors $M_2 P_2 M_1 P_1 A = U$
Ainsi $A = P_1^{-1} M_1^{-1} P_2^{-1} M_2^{-1} U = LU$
Alors $L = P_1^{-1} M_1^{-1} P_2^{-1} M_2^{-1}$

ET on résout le système

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

par substitutions rétrograde

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 25/4 & 17/4 \\ 0 & 0 & 86/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,7 \\ 347/40 \\ 8,004 \end{bmatrix}$$

$$\frac{86}{25} x_3 = 8,004 \Rightarrow x_3 = 2,3267$$

$$\frac{25}{4} x_2 + \frac{17}{4} x_3 = \frac{347}{40} \Rightarrow x_2 = 0,0058$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = -5,7 \Rightarrow x_1 = -0,8477$$

Donc, $x_1 = -0,8477$, $x_2 = 0,0058$ et $x_3 = 2,3267$

$$x = \begin{bmatrix} -0,8477 \\ 0,0058 \\ 2,3267 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1^{-1} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_2^{-1}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/25 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{25} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1/4 & -\frac{7}{25} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système

$$L\vec{y} = \vec{b}$$

par substitutions progrades

$$\begin{bmatrix} 1/4 & -7/25 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5/4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,8 \\ -5,7 \\ 2,8 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = -5,7$$

$$y_2 = -\frac{5}{4} y_1 + 2,8 \Rightarrow y_2 = \frac{397}{40}$$

$$y_3 = -\frac{1}{4} y_1 + \frac{7}{25} y_2 + 3,8 \Rightarrow y_3 = 8,004$$