le 11 mars 2008

Devoir #6
MAT 2781B

Rémi Vaillancourt

#5.16 $\quad y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$ solution série

On sait que (solution en série de puissance)

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \cdots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 3\times 2a_3 x + 4\times 3a_4 x^2 + 5\times 4 a_5 x^3 + 6\times 5 a_6 x^4 + 7\times 6 a_7 x^5$$

Remplaçons dans l'ED

$$0 = \underbrace{(2a_2 + 3\times 2a_3 x + 4\times 3a_4 x^2 + 5\times 4 a_5 x^3 + 6\times 5 a_6 x^4 + 7\times 6 a_7 x^5) + \cdots}_{y''}$$

$2(x-1)y'$ $\quad - 2xa_1 + 2a_1 - 4a_2 x^2 + 4a_2 x - 6a_3 x^3 + 6a_3 x^2 - 8a_4 x^4 + 8a_4 x^3 - 10a_5 x^5 + 10a_5 x^4 - 12a_6 x^6 + 12a_6 x^5 + \cdots$

$(+ 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + 2a_4 x^4 + 2a_5 x^5 + \cdots) \to 2y$

Regroupons les termes par les puissances de x

$$0 = (2a_2 + 2a_0 + 2a_1) + (3\times 2a_3 - 2a_1 + 2\times 2a_2 + 2a_1)x + (4\times 3a_4 - 2\times 2a_2 + 2\times 3a_3 + 2a_2)x^2 + (5\times 4a_5 - 2\times 3a_3 + 2\times 4a_4 + 2a_3)x^3 + (6\times 5a_6 - 2\times 4a_4 + 2\times 5a_5 + 2a_4)x^4 + (7\times 6a_7 - 2\times 5a_5 + 2\times 6a_6 + 2a_5)x^5$$

Nous avons une identité en $1, x, x^2, x^3, \ldots$

Alors, il suit que tous les coefficients ci-haut sont nuls (zéro)

suite au verso

$1 = x^0$: $2a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = -(a_0+a_1)}$ a_0 et a_1 indéterminés

x^1 : $3\times 2a_3 - 2a_1 + 2\times 2a_2 + 2a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{2}{3}a_2 = \frac{2}{3}(a_0+a_1)}$

x^2 : $4\times 3a_4 - 2\times 2a_2 + 2\times 3a_3 + 2a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{-2\times 3a_3 + 2a_2}{4\times 3}$

$$= \frac{\cancel{2}(-3a_3+a_2)}{\cancel{2}\times 2\times 3}$$

$$= \frac{-3a_3+a_2}{2\times 3} = -\frac{3a_3}{6}+\frac{a_2}{6}$$

$$= \frac{-\cancel{3}\left(\frac{2}{\cancel{3}}(a_0+a_1)\right)+a_2}{2\times 3}$$

$$= \frac{-2(a_0+a_1)-(a_0+a_1)}{2\times 3}$$

$$= \frac{-3a_0-3a_1}{2\times 3} = \boxed{\frac{-(a_0+a_1)}{2}}$$

x^3 : $5\times 4a_5 - 2\times 3a_3 + 2\times 4a_4 + 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_5 = \frac{a_3-2a_4}{5}}$

⋮

$$a_5 = \frac{2}{15}(a_0+a_1) + \frac{(a_0+a_1)}{5}$$

$$\boxed{a_5 = \frac{a_0+a_1}{3}}$$

x^s - s entière 5

x^s : $(s+2)(s+1)a_{s+2} - 2sa_s + 2(s+1)a_{s+1} + 2a_s = 0$

$$a_{s+2} = \frac{2sa_s - 2(s+1)a_{s+1} - 2a_s}{(s+2)(s+1)}$$

$$\boxed{a_{s+2} = \frac{2(s-1)a_s - 2(s+1)a_{s+1}}{(s+2)(s+1)}}$$

Suite page suivante

La solution générale est alors

$$y(x) = a_0 + a_1 x - (a_0+a_1)x^2 + \frac{2}{3}(a_0+a_1)x^3 + -\frac{(a_0+a_1)}{2}x^4 + \frac{a_0+a_1}{3}x^5 + $$

seulement a_0 et a_1

$$\boxed{y(x) = a_0\left[1 - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \right] + a_1\left[x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right.}$$

meilleur forme seulement a_0 et a_1 que celle là

Ou

$$\boxed{y(x) = a_0 + a_1 x - (a_0+a_1)x^2 - \frac{2}{3}a_2 x^3 + \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_2}{6}\right)x^4 + \left(\frac{a_3 - 2a_4}{5}\right)x}$$

#5.28 $\qquad f(x) = e^{2x} \quad , -1 < x < 1$

Posons
$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x), \quad -1 < x < 1$$

Alors, $\quad a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\,dx$

Donc $\qquad P_0(x) = 1$

$\boxed{m=0}$
$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{e^2}{4} - \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1}{4}\left(e^2 - e^{-2}\right)} = \frac{1}{2}\sinh$$

$P_1(x) = x$

$\boxed{m=1}$
$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x e^{2x}\,dx \qquad \begin{matrix} u = x & dv \\ du = dx & v = \end{matrix}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{2}\,dx\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(\frac{-e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4}\right)\right]$$

suite au (2)

$$a_1 = \frac{3}{2}\left[\frac{e^2}{4} + \frac{3e^{-2}}{4}\right] = \frac{3}{2}\left[\cosh 2 - \frac{\sinh 2}{2}\right]$$

$$\boxed{a_1 = \frac{3}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right)}$$

$\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\boxed{n=2}$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\left(\tfrac{1}{2}(3x^2-1)\right)dx$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\left(e^{2x}3x^2 - e^{2x}\right)dx = \frac{5}{4}\left[\int_{-1}^{1} e^{2x}3x^2\,dx - \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx\right]$$

$u = 3x^2 \quad dv = e^{2x}dx$
$du = 6x\,dx \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$= \frac{5}{4}\left[\left(\frac{3x^2e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{2}6x\,dx\right) - \left(\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx\right)\right]$$

$u = x \quad dv = e^{2x}dx$
$du = dx \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$

$$= \frac{5}{4}\left[\left(\frac{3x^2e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - 3\left(\frac{xe^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{2}dx\right)\right) - \left(\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx\right)\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\left(\frac{3x^2e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - 3\left(\frac{xe^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1} - \frac{e^{2x}}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)\right) - \left(\frac{e^{2x}}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\left(\frac{3e^2}{2} - \frac{3e^{-2}}{2} - 3\left(\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \left(-\frac{e^{-2}}{2} - \frac{e^{-2}}{4}\right)\right)\right) - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{3e^2}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{3e^{-2}}{2} - \frac{3e^{-2}}{2} - \frac{3e^{-2}}{4} + \frac{e^{-2}}{2}\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{13}{4}e^{-2}\right] = \frac{5}{16}\left[e^2 - 13e^{-2}\right]$$

$$\boxed{a_2 = \frac{5}{16}\left(e^2 - 13e^{-2}\right)}$$

suite page (4) suivan

On a donc l'approximation suivante,

$$f(x) \approx a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x)$$

$$\approx \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}) P_0(x) + \frac{3}{8}(e^2 + 3e^{-2}) P_1(x) + \frac{5}{16}(e^2 - 13e^{-2}) P_2$$

Remplaçons les polynômes de Legendre

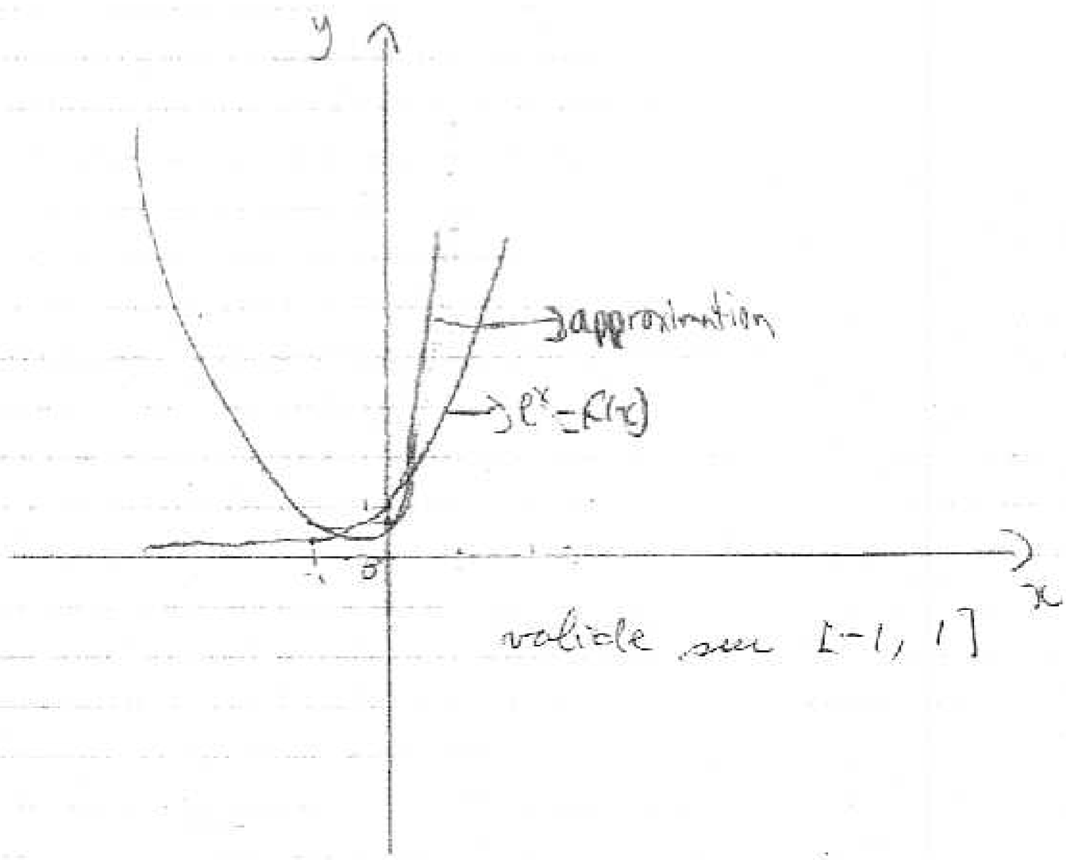
$$f(x) \approx \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2})(1) + \frac{3}{8}(e^2 + 3e^{-2})\, x + \frac{5}{16}(e^2 - 13e^{-2}) \frac{1}{2}(3x^2 -$$

$$f(x) \approx 1{,}81343 + 2{,}92315\, x + \frac{5}{32}(5{,}629697)(3x^2 - 1)$$

$$\boxed{f(x) \approx 2{,}638922\, x^2 + 2{,}92315\, x + 0{,}933793}$$

les 3 premiers term

Graphique et de f(x) et son approximation



valide sur [-1, 1]

#5.31 $I = \int_{0,2}^{1,5} e^{-x^2} dx$ par la quadrature gausienne à 3 points

On pose $x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$ $dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) dt$

pour avoir l'intervalle d'intégration de $[-1, 1]$

$$x = \frac{(1{,}5 - 0{,}2)t + 1{,}5 + 0{,}2}{2} \quad dx = \frac{(1{,}5-0{,}2)}{2} dt$$

Ainsi, en $t = -1 \Rightarrow x = 0{,}2$
$t = 1 \Rightarrow x = 1{,}5$

Alors,

$$I = \frac{13}{20} \int_{-1}^{1} e^{-\left(\frac{1{,}3t + 1{,}7}{2}\right)^2} dt$$

$$I = \frac{13}{20} \int_{-1}^{1} e^{-(0{,}65t + 0{,}85)^2} dt \qquad f(t) = e^{-(0{,}65t + 0{,}85)^2}$$

Puisque c'est à trois points

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = a f(t_1) + b f(t_2) + c f(t_3)$$

et selon la formule de Gauss à trois points → p.103 du manuel équation 5.26

$$\int_{-1}^{1} f(t) dt = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Donc

$$I = \frac{13}{20}\left[\frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right]$$

$$= \frac{13}{20}\left[\frac{5}{9} e^{-\left(0{,}65\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 0{,}85\right)^2} + \frac{8}{9} e^{-(0{,}65(0) + 0{,}85)^2} + \frac{5}{9} e^{-\left(0{,}65\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 0{,}85\right)^2}\right.$$

Suite page suivante →

$$I = \frac{13}{20}\left[\frac{5}{9}(0,886858) + \frac{8}{9}(0,4855369) + \frac{5}{9}(0,1601044)\right]$$

$$= \frac{13}{20}\left[0,49269875 + 0,4315884 + 0,08894687 6\right]$$

$$= \frac{13}{20}(1,013234)$$

$$\boxed{I = 0,658602}$$

#5.34 $P_4(x)$ par la formule de Bonnet

La formule de Bonnet est

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$
$n = 1, 2, ---$

On veut $P_4(x)$ donc posons $n = 3$

Remplaçons dans la récurrence de Bonnet

$$(3+1)P_4(x) = (2(3)+1)xP_3(x) - 3P_2(x)$$

$$4P_4(x) = (7)xP_3(x) - 3P_2(x)$$

$$\boxed{P_4(x) = \frac{7xP_3(x) - 3P_2(x)}{4}}$$

<u>ou</u> (en fonction de x, en remplaçant $P_3(x)$ et $P_2(x)$

on sait que $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ et $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

Donc $$P_4(x) = \frac{7x\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)(3x^2 - 1)}{4}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}(5x^4 - 3x^2) - \frac{3}{2}(3x^2 - 1)}{4}$$

$$= \frac{\frac{35}{2}x^4 - \frac{21}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}}{4}$$

suite au verso

$$= \frac{\frac{35}{2}x^4 - \frac{30}{2}x^2 + \frac{3}{2}}{4}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(35x^4 - 30x^2 + 3)}{4}$$

$$\boxed{P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)}$$ → ce qui concorde avec le $P_4(x)$ de Legendre

#5.37 Trouver les zéros de $P_5(x)$ sous formes radicals

Trouvons $P_5(x)$

Selon la recurrence de Bonnet en posant $n=4$

$$P_5(x) = \frac{9x\,P_4(x) - 4P_3(x)}{5}$$

et en remplaçant $P_4(x)$ et $P_3(x)$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$ et $$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$ → numéros 5.34

$$P_5(x) = \frac{9x\left(\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\right) - 4\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right)}{5}$$

Avec des simplifications algebriques, nous obtenons → voir la dernière page

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$ ⑮

Maintenant, trouvons les zéros de ce polynôme

$$0 = \frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15)$$ → zéro est un zéro de ce polynôme $\boxed{x=0}$

$$0 = 63x^4 - 70x^2 + 15$$

suite page ⑧ suite

Posons $x^2 = t$

Donc $0 = 63t^2 - 70t + 15$ où $a = 63$ $b = -70$ $c = 15$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(-70) \pm \sqrt{(-70)^2 - 4(63)(15)}}{2(63)}$$

$$t_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{1120}}{126} = \frac{1}{63}(35 \pm 2\sqrt{70})$$

On sait que $t = x^2$ alors

$$x^2 = \frac{70 \pm \sqrt{1120}}{126}$$

$$x_{1,3} = \frac{\sqrt{70 \pm \sqrt{1120}}}{\sqrt{126}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}(35 \pm 2\sqrt{70}}$$

$$x_{2,4} = -\frac{\sqrt{70 \pm \sqrt{1120}}}{\sqrt{126}}$$

Donc, les zéros de ce polynôme sont

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{70 + \sqrt{1120}}{126}} = 0,906179845\text{9} \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{70 + \sqrt{1120}}{126}} = -0,906179845\text{9} \\ x_3 &= \sqrt{\frac{70 - \sqrt{1120}}{126}} = 0,5384693101 \\ x_4 &= -\sqrt{\frac{70 - \sqrt{1120}}{126}} = -0,5384693101 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}}$$

✓ ✓ ✓ ✓ ✓

#10.5 Évaluer $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$ par la méthode des trapèzes (composée) avec $n=10$

les bornes

$1-0=1=nh$

$1=10h$

$h=\frac{1}{10}$

On sait que selon la méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]$$

et $x_0=0$; $x_1=\frac{1}{10}$, ..., $x_{i-1}=\frac{i-1}{10}$, $x_i=\frac{i}{10}$, $x_n=1$

on omet l'erreur

Donc $$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} \approx \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{10}\left[\frac{1}{1+2\left(\frac{i-1}{10}\right)^2}+\frac{1}{1+2\left(\frac{i}{10}\right)^2}\right]-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{10}f''(\xi_i)$$

$$\approx \frac{1}{20}\Big[(1+1/1{,}02)+(1/1{,}02+1/1{,}08)+(1/1{,}08+1/1{,}18)+(1/1{,}18+1/1{,}32)$$
$$+(1/1{,}32+1/1{,}50)+(1/1{,}50+1/1{,}72)+(1/1{,}72+1/1{,}98)+(1/1{,}98+1/$$
$$+(1/2{,}28+1/2{,}62)+(1/2{,}62+1/3)\Big]$$

$$\approx \frac{1}{20}\left[13{,}50281307\right]$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} \approx 0{,}6751406535}$$

ou (revient au même)

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+\dots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$$

Numéro #10.9 page suivante

#10.9 $\int_1^3 \ln x \, dx$ Valeurs de h et n = ??
pour approx. l'intégrale à 10^{-3} près
Trapèze, Simpson et point milieu

$a = 1 \quad b = 3$

Alors $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{matrix} |f''(1)| = 1 \\ |f''(3)| = 1/9 \end{matrix}$ ⇒ décroissant en absolue

On voit que $M = \left|\max_{1 \le x \le 3} f''(x)\right| = |f''(1)| = \left|\dfrac{-1}{1^2}\right| = 1$

Méthode des points milieux (composée)

$$|\varepsilon_M| \le \frac{M}{24}(b-a)h^2 = \frac{1}{12}h^2 \le 10^{-3}$$

$$\frac{h^2}{12} \le 10^{-3}$$

$$h^2 \le 0{,}012$$

$$\boxed{h \le 0{,}1095}$$

De plus, $nh = (b-a)$

$nh = 2$

$n = \dfrac{2}{h}$

$n = 18{,}26 \Rightarrow \boxed{n = 19}$ arrondir à la hausse pour être sûr d'être à 10^{-3} près

avec $n = 19 \quad h = \dfrac{2}{19} = 0{,}105 \Rightarrow \boxed{h = 0{,}105}$

Autres méthodes (Simpson et trapèze) au verso →

Methode des trapèzes $\rightarrow \overset{(b-a)}{(3-1)}$ (composée)

$$\left| \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi) \right| \leq \frac{2h^2}{12} M = \frac{h^2}{6} \cdot 1$$

$$\frac{h^2}{6} \leq 10^{-3}$$

$$h^2 \leq 0{,}006$$

$$h \leq 0{,}0775$$

De plus, $nh = (b-a)$

$$nh = 2$$

$$n = 25{,}82 \Rightarrow \boxed{n = 26}$$

Donc avec $n = 26$

$$h = \frac{2}{n} = 0{,}0769$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 0{,}0769}$$

Methode de Simpson (composée)

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f''''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Donc $M = \left| \max_{1 \leq x \leq 3} f''''(x) \right| = \left| f''''(1) \right| = 6$

$$\left| \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \right| \leq \frac{\overset{(b-a)}{2} h^4}{180} \cdot 6 = \frac{h^4}{15}$$

$$\frac{h^4}{15} \leq 10^{-3}$$

$$h^4 \leq 0{,}015$$

$$h \leq 0{,}34996$$

Suite page suivante

(12)

De plus, $nh = (b-a)$

$nh = 2$

$n = 5{,}71 \Rightarrow \boxed{n = 6}$ → pair

Donc avec $n = 6$

$h = \frac{2}{n} = 1/3 \Rightarrow \boxed{h = 1/3}$

#10.11 $\int_1^{1,5} x^2 \ln(x)\,dx$ avec l'intégration de Romberg pour calculer $R_{3,3}$

les bornes

$h = h_1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5 \quad h_2 = \frac{h}{2} = 0{,}25 \quad h_3 = \frac{h}{2^2} = 0{,}125$

Donc $R_{1,1}$ (obtenue par la formule des trapèzes avec le pas 0,5)

(eq (1)) $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$

$nh = (b-a)$
$n = 1$

$\int_1^{1,5} x^2 \ln(x)\,dx = \frac{0{,}5}{2}\left[f(1) + f(1{,}5)\right]$

$= 0{,}25\left[0 + 0{,}912296493\right]$

$R_{1,1} = 0{,}2280741233$

$R_{2,1}$ (obtenue par la formule des trapèzes avec le pas $0{,}25$ (h_2))

Selon l'eq (1)

$nh = (b-a)$
$n = 2$

$\int_1^{1,5} x^2 \ln(x)\,dx = \frac{0{,}25}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}25) + f(1{,}5)\right]$

$= 0{,}125\left[0 + 0{,}6973235974 + 0{,}9122964\right]$

$R_{2,1} = 0{,}2012025114$

$R_{3,1}$ (obtenue par la formule des trapèzes avec le pas $0{,}125$ (h_3))

Selon l'eq (1)

$nh = (b-a)$
$n = 4$

$\int_1^{1,5} x^2 \ln(x)\,dx = \frac{0{,}125}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}125) + 2f(1{,}25) + 2f(1{,}375) + f(1{,}5)\right]$

suite au verso

$$= 0{,}0625\left[0 + 0{,}298138309 + 0{,}6973235970 + 1{,}204153171 + 0{,}9122964932\right]$$

$$R_{3,1} = 0{,}1944944732$$

On sait que $R_{k,j} = R_{k,j-1} + \dfrac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1}-1}$

Alors $R_{2,2} = R_{2,1} + \dfrac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 0{,}2012025114 + \dfrac{0{,}2012025114 - 0{,}2280741233}{3}$

$$R_{2,2} = 0{,}1922453074$$

Et $R_{3,2} = R_{3,1} + \dfrac{R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = 0{,}1944944732 + \dfrac{0{,}1944944732 - 0{,}201202511}{3}$

$$R_{3,2} = 0{,}1922584605$$

5074

Et $R_{3,3} = R_{3,2} + \dfrac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = 0{,}1922584605 + \dfrac{0{,}1922584605 - 0{,}19224}{15}$

$$R_{3,3} = 0{,}1922593374$$

Donc $\boxed{I \approx R_{3,3} = 0{,}1922593374}$

Table 1.1 : Table d'intégration de Romberg à 3 niveaux

0,2280741233		
0,2012025114	0,1922453074	
0,194494732	0,1922584605	$\boxed{0{,}1922593374}$

✓

Simplications algébriques de AS.37

$$P_5(x) = \frac{9x\left(\frac{1}{8}\right)(35x^4-30x^2+3) - 4\left(\frac{1}{2}\right)(5x^3-3x)}{5}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)(315x^5-270x^3+27x) - (10x^3-6x)}{5}$$

$$= \frac{\frac{315}{8}x^5 - \frac{135}{4}x^3 + \frac{27}{8}x - 10x^3 + 6x}{5}$$

$$= \frac{\frac{315}{8}x^5 - \frac{175}{4}x^3 + \frac{75}{8}x}{5}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{8}\right)(315x^5 - 350x^3 + 75x)}{5}$$

$$\boxed{P_5(x) = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)}$$

C.Q.F.D