MAT 2784 B

D3.1

SOLUTIONS

Devoir 3
MAT 2784 B

Rémi Vaillancourt

[2.7] $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \qquad y(2) = 1 \qquad y'(2) = 1$

$y = e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \frac{1}{4}e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$

donc $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1/2$

$y_1(x) = e^{\lambda x} = e^{-1/2 x}$

Posons $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$

$y_2(x) = xe^{\lambda x} = xe^{-1/2 x}$

donc $\boxed{y(x) = C_1 e^{-1/2 x} + C_2 x e^{-1/2 x}}$ solution générale

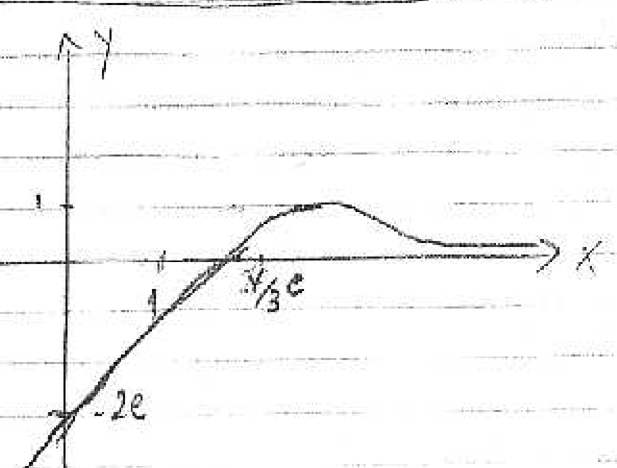
$y(2) = C_1 e^{-1} + 2C_2 e^{-1} = 1$

$y'(2) = -\dfrac{C_1}{2} e^{-1} - C_2 e^{-1} + C_2 e^{-1} = 1$

$\Rightarrow -C_1 e^{-1} = 2 \Rightarrow C_1 = -2e$

$C_2 = \dfrac{3e}{2}$

Alors $\boxed{y(x) = -2e\, e^{-x/2} + \frac{3}{2} e\, x e^{-x/2}}$ (solution unique)



#2.11 $y''+2y'+y=0 \quad y(0)=1 \quad y'(0)=1$ Le max de $|y(t)|$ =

<u>Amortissement critique</u> car $c^2=4mK$ où $m=1$ $K=1$ $c=2$

Alors, les deux valeurs propres sont égales et réelles.

$$\lambda_{1,2}=\frac{-c}{2m}=-1$$

Donc, la solution générale est de la forme

$$y(t)=c_1e^{\lambda t}+c_2te^{\lambda t}$$

Alors,
sol générale $y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$

Selon les conditions initiales,
$y_0=1 \quad t_0=0$
$y_0'=1$

De plus, on a que
$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t} \quad ①$$
$$y'(t)=-c_1e^{-t}+c_2[e^{-t}+-te^{-t}] \quad ②$$

Donc, avec les CI, on a de ①

$$1=c_1e^{-0}+c_2(0)e^{-0}$$
$$\boxed{1=c_1}$$

et de ②

$$1=-c_1e^{-0}+c_2[e^{-0}+-(0)e^{-0}]$$
$$1=-c_1+c_2 \quad \text{et on sait que } c_1=1$$
$$1=-1+c_2$$
$$\boxed{c_2=2}$$

⑤

Alors, la solution particulière est

$$\boxed{y(t)=e^{-t}+2te^{-t}}$$

On sait qu'une fonction est maximum lorsque la dérivée de cet fonction est nulle. $y'(t)=0$

Alors, $y'(t)=-e^{-t}+2[e^{-t}-te^{-t}]$

$$0=-e^{-t}+2e^{-t}-2te^{-t}$$
$$0=e^{-t}-2te^{-t}$$

Divisons par e^{-t}

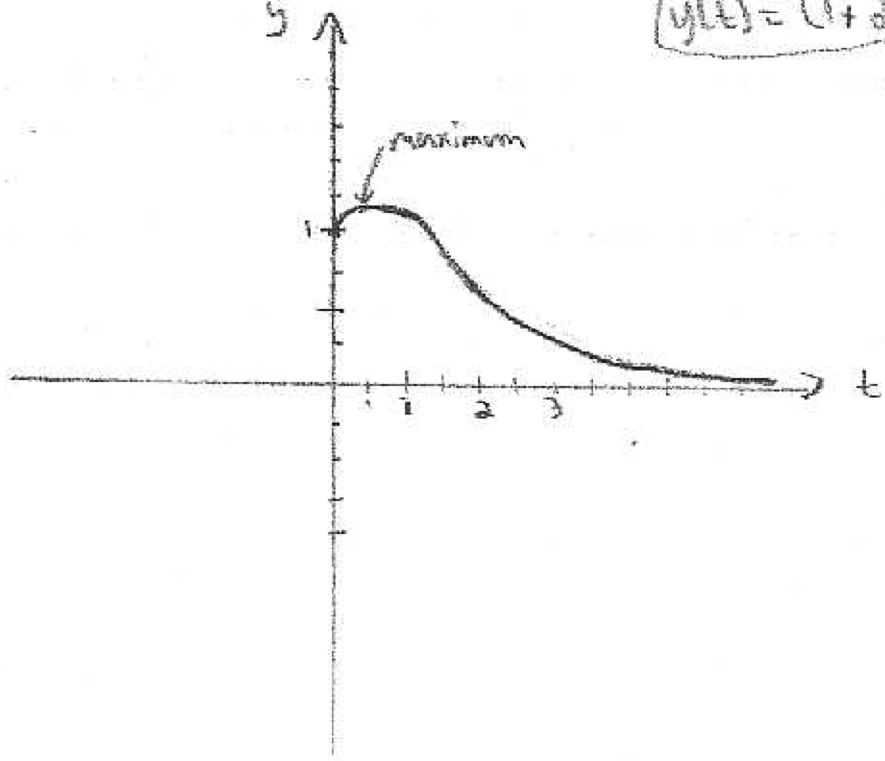
$$0=1-2t$$

$$1=2t$$

$$\Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{2}} \Rightarrow y=1,21$$

Ainsi, la fonction $y(t)$ est maximum losque $t=0,5$

Graphique de $y(t)$ $(t \geq t_0)$ on peut réécrire $y(t)$ comme $\boxed{y(t)=(1+2t)e^{-t}}$



2.15 $4x^2y''+y=0$

$y=x^m$
$y'=mx^{m-1}$
$y''=m(m-1)x^{m-2}$

En posant $y=x^m$ dans l'équation différentielle, on a

$$4x^2(m(m-1)x^{m-2})+x^m=0$$
$$4(m(m-1)x^m)+x^m=0$$
$$4((m^2-m)x^m)+x^m=0$$

Divisons par x^m et on obtient l'équation caractéristique suivante

$$4m^2-4m+1=0$$

Selon la formule pour trouver des zéros d'une fonction quadratique
$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ où $b=-4$ $a=4$ $c=1$

On obtient les valeurs propres suivantes, puisque le Δ est 0
((cas III)
$m=m_1=m_2=0{,}5$

De plus, la solution générale est de la forme
$y(x)=c_1x^m+c_2(\ln x)x^m$

Alors,
sol. gén. $\boxed{y(x)=c_1x^{1/2}+c_2(\ln x)x^{1/2}}$

#2.20 au verso →

03.5

n° 20 $x^2y'' + \frac{7}{2}xy' - \frac{3}{2}y = 0$ $y(4) = 1$ $y'(4) = 0$

On pose : $y = x^m$ $y' = mx^{m-1}$ $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

$\Rightarrow x^m\left(m(m-1) + \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{3}{2} = 0$

$(2m-1)(m+3) = 0 \Rightarrow m_1 = 1/2$, $m_2 = -3$

Solution générale : $y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-3}$

$y'(x) = \frac{C_1}{2}x^{-1/2} - 3C_2x^{-4}$

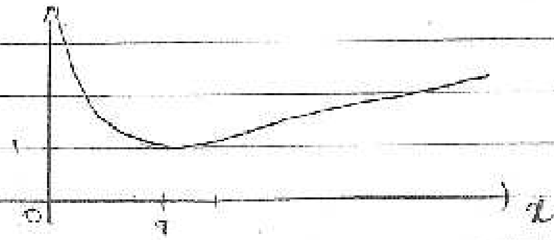
$y(4) = 2C_1 + \frac{C_2}{4^3} = 1$ ①

$y'(4) = \frac{C_1}{4} - \frac{3C_2}{4^4} = 0$ ②

② $\Rightarrow C_1 = \frac{3C_2}{4^3} = \frac{3C_2}{64}$

① $\Rightarrow C_2 = \frac{64}{7} \Rightarrow C_1 = \frac{3}{7}$

Solution unique : $\boxed{y(x) = \frac{3}{7}x^{1/2} + \frac{64}{7}x^{-3}}$



$\boxed{3.7}$ $y''' - y'' - y' + y = 0$ $\quad y(0) = 0$ $\quad y'(0) = 5$ $\quad y''(0) = 2$

On pose $y = e^{\alpha x}$ $\quad y' = \alpha e^{\alpha x}$ $\quad y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ $\quad y''' = \alpha^3 e^{\alpha x}$

$$\Rightarrow e^{\alpha x}(\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1) = 0$$

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha^2 = 1$$

$$\alpha_{2,3} = \pm 1$$

Solution générale : $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x e^x$

$y'(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_3 x e^x$

$y''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^x + C_3 e^x + C_3 x e^x$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$y'(0) = C_1 - C_2 + C_3 = 5 \Rightarrow -C_2 - C_2 + C_3 = 5 \Rightarrow C_3 = 5 + 2C_2$

$y''(0) = C_1 + C_2 + C_3 + C_3 = 2$

$$\Rightarrow -C_2 + C_2 + 5 + 2C_2 + 5 + 2C_2 = 2$$

$$10 + 4C_2 = 2$$

$$4C_2 = -8$$

$$C_2 = -2$$

$\Rightarrow C_1 = 2$ et $C_3 = 5 - 4 = 1$

$\boxed{y(x) = 2e^x - 2e^{-x} + xe^x}$ Solution unique

D3.7

méthode de Steffensen

8.17

résultats de 8.8:

n	x_n	erreur $\lvert x_n - x_{n+1} \rvert$
0	2,000000	—
1	0,5403023	1,459697694
2	0,8961866	0.3558843
3	0,99461625	0,0984295
4	0,9999835	0,00536927
5	0,9999999	0,0000144449

converge d'ordre 2

$g(x) = \cos(x-1)$; $x_0 = 2$

Donc $a_0 = x_0 - \dfrac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$

$$= 2 - \frac{(0,5403023 - 2)^2}{(0,8961866 - 2(0,5403023) - 2} = 2,975416507$$

Donc

$S_0 = x_0 = 2$

$S_1 = a_0 = 2,975416507$

$S_2 \Rightarrow Z_1 = g(S_1) = \cos(2,975416507 - 1) = -0,393669638$

$Z_2 = g(Z_1) = \cos(-0,393669638 - 1) = 0,176201948$

D'où $S_{n+1} = S_n - \dfrac{(Z_1 - S_n)^2}{Z_2 - 2Z_1 + S_n}$

$$S_2 = S_1 - \frac{(Z_1 - S_1)^2}{(Z_2 - 2Z_1 + S_1)}$$

$$S_2 = 0,09375536$$

$S_2 = 0.09375536$

$S_3 \Rightarrow Z_1 = g(S_2) = \cos(S_2 - 1) = 0.616706286$

$Z_2 = g(Z_1) = \cos(Z_1 - 1) = 0.927437894$

$$S_3 = S_2 - \frac{(Z_1 - S_2)^2}{(Z_2 - 2Z_1 + S_2)}$$

$S_3 = 1.38241124$

$S_4 \Rightarrow Z_1 = g(S_3) = \cos(S_3 - 1) = 0.927767558$

$Z_2 = g(Z_1) = \cos(Z_1 - 1) = 0.997392371$

$$S_4 = S_3 - \frac{(Z_1 - S_3)^2}{(Z_2 - 2Z_1 + S_3)}$$

$S_4 = 0.988145936$

$S_5 \Rightarrow Z_1 = g(S_4) = \cos(S_4 - 1) = 0.99992974$

$Z_2 = g(Z_1) = \cos(Z_1 - 1) = 0.999999998$

$S_5 = 1.000000$

n	x_n	a_n	S_n
0	2.000000	2.975416507	2
1	0.5403023	1.032247716	2.975416507
2	0.8961866	1.000293049	0.09375536
3	0.99461625	0.99999999	1.38241124
4	0.9999835		0.988145936
5	0.9999999		1.0000000

D'où $S_{n+1} = S_n - \dfrac{(Z_1 - S_n)^2}{Z_2 - 2Z_1 + S_n}$

$P \simeq 1.00000$
et converge
d'ordre 2
donc pas d'accélération

$$a_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

8.17) $g(x) = 1 + \sin^2 x$; $x_0 = 1$ conv. d'ordre 1

$a_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$ avec $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

$s_0 = x_0$; $s_1 = a_0$

$z_1 = g(s_n)$; $z_2 = g(z_1)$

$$\boxed{s_{n+1} = s_n - \frac{(z_1 - s_n)^2}{z_2 - 2z_1 + s_n}}$$

Iteration n	x_n	a_n	s_n
0	1.000000	2.152904629	1
1	1.708073418		2.152904629
2	1.981273081		1.870559415
3	1.840761872		1.89698659
4	1.928872054		1.897194293
5	1.877168913		1.897194293
6	1.909036155		
7	1.889890731		

$$a_0 = 1 - \frac{(0.708073418)^2}{-0.434873755} = 2.152904629$$

Exemple de Calcul de s_2:

$z_1 = g(s_1) = 1 + \sin^2(2.152904629) = 1.697735097$

$z_2 = g(z_1) = 1 + \sin^2(1.697735097) = 1.983972911$

$$s_2 = s_1 - \frac{(z_1 - s_n)^2}{z_2 - 2z_1 + s_n} = 1.870559415$$

L'ordre de convergence est 2.

MAT 3784B Devoir 3 0.3.10

9.1) $(0.1\ ,\ 1.0100502)$, $(0.2\ ,\ 1.04081077)$, $(0.4\ ,\ 1.1735109)$

x	$f(x)$	1ères différences divisées	2èmes différences divisées
0.1	$\boxed{1.0100502}$		
		$\boxed{0.3076057}$	
0.2	1.04081077		$\boxed{1.1863165}$
		0.66350065	
0.4	1.1735109		

$$f[0.1\,,0.2] = \frac{1.04081077 - 1.0100502}{0.2 - 0.1} = 0.3076057$$

$$f[0.2\,,0.4] = \frac{1.1735109 - 1.04081077}{0.4 - 0.2} = 0.66350065$$

$$f[0.1\,,0.2\,,0.4] = \frac{0.66350065 - 0.3076057}{0.4 - 0.1} = 1.1863165$$

$$p_2(x) = 1.0100502 + 0.3076057(x - 0.1) + 1.1863165(x - 0.1)(x - 0.2)$$

En particulier,

$$p_2(0.3) = 1.0100502 + 0.3076057(0.3 - 0.1) + 1.1863165(0.3 - 0.1)(0.3 - 0.2)$$

$$\boxed{p_2(0.3) = 1.09529767}$$