MAT 2784 B
08.01.25

D2.1

SOLUTIONS

Devoir 2
MAT 2784 B
Rémi Vaillancourt

$\boxed{1.27}$ $(x^2 - y^2 + x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

$M_y = -2y \neq N_x = 2x$ équation non exacte

$$f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-4y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - y^2 + x}{x^2}\,dx + \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

$$u(x,y) = \int N\,dy = \int \frac{2y}{x}\,dy = \frac{y^2}{x} + T(x)$$

$$u_x = -\frac{y^2}{x^2} + T'(x) = \frac{x^2 - y^2 + x}{x^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$T'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow T(x) = x + \ln x$$

Alors $u(x,y) = \frac{y^2}{x^2} + x + \ln x = C$ Solution générale.

$\boxed{1.30}$ $(2xy^2 - 3y^3)\,dx + (7 - 3xy^2)\,dy = 0$

$M_y = 4xy - 9y^2 \neq N_x = -3y^2$ pas exacte

$$f(y) = \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \frac{2(2xy - 3y^2)}{y(2xy - 3y^2)} = \frac{2}{y}$$

$$\mu_y = e^{\int f(y)dy} = e^{-2\ln y} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

$$du = \frac{2xy^2 - 3y^3}{y^2}\,dx + \frac{7 - 3xy^2}{y^2}\,dy = (2x - 3y)\,dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy =$$

$$u(x,y) = \int (2x - 3y)\,dx + T(y) = x^2 - 3yx + T(y)$$

$$u_y = -3x + T'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x \Rightarrow T'(y) = \frac{7}{y^2} \Rightarrow T(y) = -\frac{7}{y}$$

D2.2

Solution générale : $x^2 - 3yx - \frac{7}{y} = C$

1.34 $\quad y' + \frac{2x}{x^2+1} y = x$

$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = x^2+1$

$(\mu(x) y)' = (x^2+1)x = x^3 + x$

$(x^2+1)y = \int (x^3+x)\,dx + C = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$

$\Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{4x^2+4} + \frac{x^2}{2x^2+2} + \frac{C}{x^2+1}$

1.37 $\quad y' + 3x^2 y = x^2 \qquad y(0) = 2$

$f(x) = 3x^2$

$\mu(x) = e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$(e^{x^3} y)' = x^2 e^{x^3}$

$e^{x^3} y = \int x^2 e^{x^3} dx + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$

$y(x) = y = \frac{e^{x^3}}{3e^{x^3}} + \frac{C}{e^{x^3}} = \frac{C}{e^{x^3}} + \frac{1}{3}$

$y(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} + C = 2 \Rightarrow C = \frac{5}{3}$

$\boxed{U(x,y) = e^{x^3} y - \frac{e^{x^3}}{3} = \frac{5}{3}}$

---

x

#1.43 $y^2+2x=c$ → Trajectoires orthogonale des familles courbes

Dérivons p/r à x

$$y=\sqrt{c-2x}$$

$$(y)'=(\sqrt{c-2x})'$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{c-2x}}(c-2x)'$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{c-2x}}(0-2)=\frac{-2}{2\sqrt{c-2x}}=\frac{-1}{\sqrt{c-2x}}$$

Donc $y'=\frac{-1}{\sqrt{c-2x}}$ où $c=y^2+2x$ → l'équation de départ

Alors $y'=\frac{-1}{\sqrt{y^2-2x+2x}}=\frac{-1}{\sqrt{y^2}}=\frac{-1}{y}$

$$y'=\frac{-1}{y}=m$$

faire $d(y^2+2x)=dc=0$

$$2yy'+2=0$$

$$y'=-\frac{1}{y}=m$$

$$m_{orth}=-\frac{1}{m}=y$$

L'équation différentielle de la famille est

$y'_{orth}=-\frac{-y_{orth}}{1}=y_{orth}$, car $y_{orth}=-\frac{1}{m}$

Résoudre cette équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=y$$

$$\frac{dy}{y}=dx$$

suite au verso →

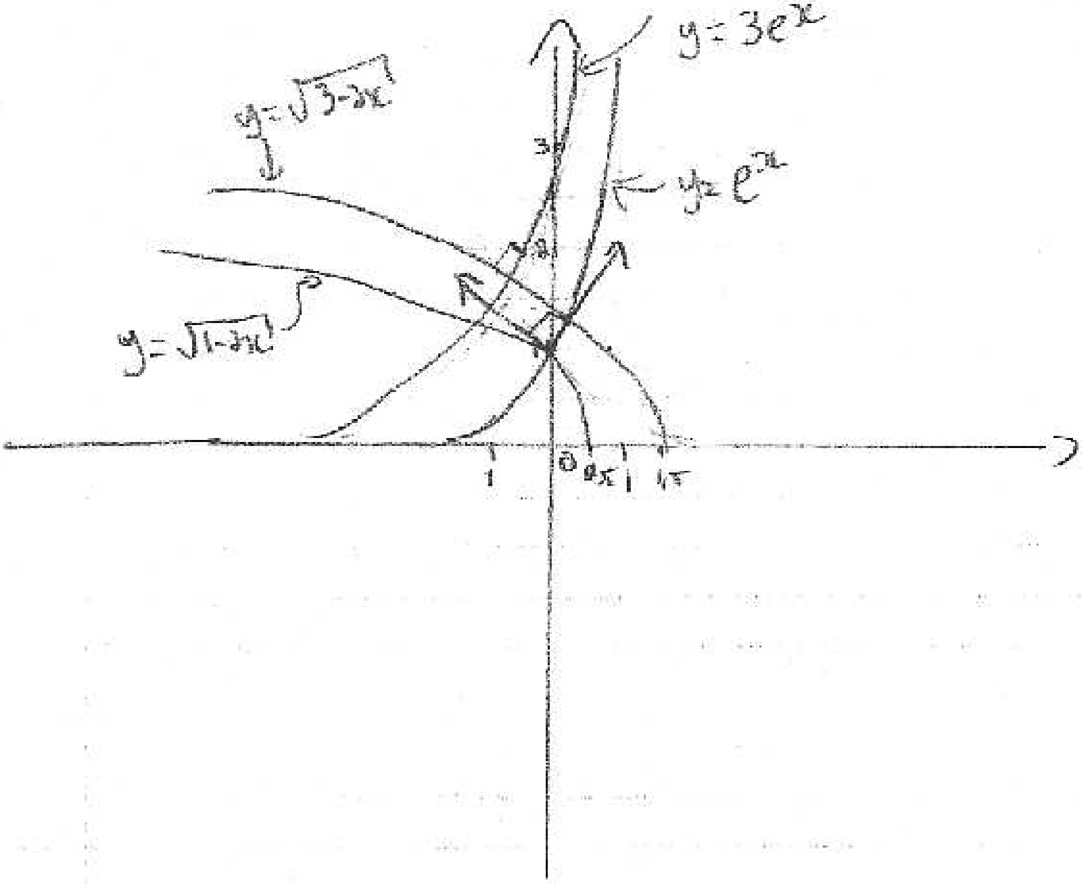
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + c_1$$

$$\ln|y| = x + c_1$$

$$y = e^{x+c_1}$$

$$y = e^{x}e^{c_1}$$

$$\boxed{y_{ortho} = Ke^{x}} \quad \text{où } K = e^{c_1}$$



D 2.5

$\cancel{A}$2.3 $\quad y'' - 9y' + 20y = 0$

cette équation différentielle est ~~une équation~~ linéaire du deuxième ordre homogènes à coefficients constants

$$Ly := y'' - 9y' + 20y = 0$$

Si on pose $y = e^{\lambda x}$
$y' = \lambda e^{\lambda x}$
$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Donc $Ly = \lambda^2 e^{\lambda x} - 9\lambda e^{\lambda x} + 20 e^{\lambda x} = 0$
$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0$

polynôme caractéristique

Alors $\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$ $\quad$ Somme $= -9$, produit $= 20$ $\}$ -4 et -5

$(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$

Donc $\lambda_1 = 4$
$\lambda_2 = 5$

$\boxed{\Delta > 0 \Rightarrow \text{cas I} \quad (-9)^2 - 4(20) = 1}$

On a deux solutions indépendantes, puisque $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ constante

$$y_1 = e^{4x} \text{ et } y_2 = e^{5x}$$

La solution générale est donc

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x}}$$

Numéro 8.8 au verso →

8.8

$g(x) = \cos(x-1)$ $\quad x_{n+1} = g(x_n)$

→ Itérer 5 fois
→ Démarrer en $x_0 = 2$
→ Utiliser au moins 6 décimales
→ On cherche l'ordre de convergence

→ angle en rad

itérations n	x_n	erreur $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	2,0000000000	—
1	0,5403023059	1,459697694
2	0,8961866417	0,3558843411
3	0,9946162335	0,0984295865
4	0,9999855046	0,0053692741
5	0,9999999999	0,0000144923

Pour trouver l'ordre de convergence, il faut regarder les dérivées de $g(x)$

$$g'(x) = \cos(x-1)'$$
$$= -\sin(x-1)(x-1)'$$
$$g'(x) = -\sin(x-1)$$

De plus, on voit p tend vers 1 $p = 1$

$$g'(p) = -\sin(p-1)$$
$$\boxed{g'(p) = 0}$$

Donc, l'ordre de convergence est au moins de 2

Regardons la deuxième dérivée de $g(p)$

$$g''(p) = (-\sin(p-1))'$$
$$= -\cos(p-1)$$
$$\boxed{g''(p) = -1}$$

Puisque $g'(p) = 0$ et $g''(p) \neq 0$ $\boxed{\text{l'ordre de convergence est de 2}}$

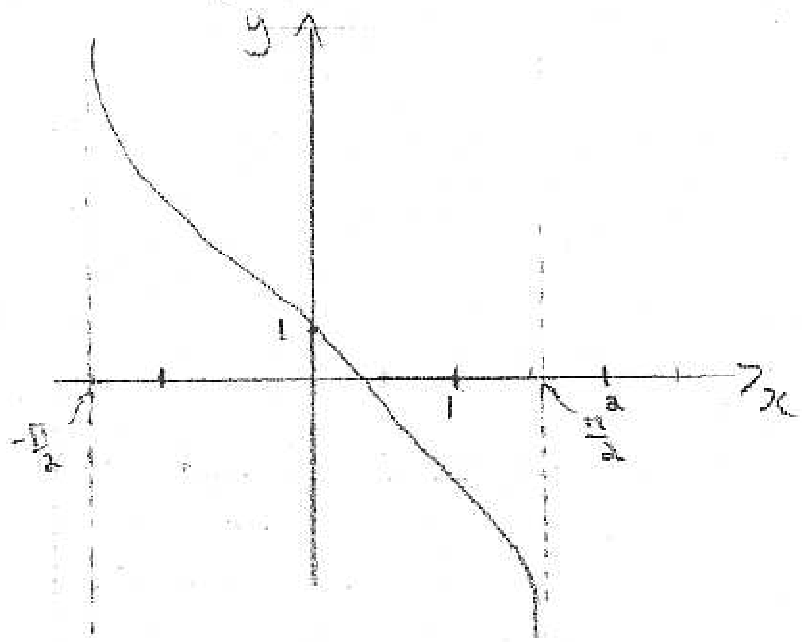
10

D 2.7

#8.11 $f(x)=e^{-x}-2\tan x$

→ Une racine de $f(x)=0$?: à 6 décimales avec méthode de Newton
→ Tracer la fonction
→ Démarrer en $x_0=1$
→ Ordre de convergence ??
→ angle en rad

Graphique de $f(x)$



Méthode de Newton

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{où } f'(x_n)=\left(e^{-x_n}-2\tan x_n\right)' = -e^{-x_n}-2\sec^2 x_n$$

$$=x_n-\frac{\left(e^{-x_n}-2\tan x_n\right)}{-e^{-x_n}-2\sec^2 x_n}$$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{e^{-x_n}-2\tan x_n}{-e^{-x_n}-2\sec^2 x_n}}$$

Suite au verso →

Itérations (n)	x_n	erreur $\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1,0000000000	—
1	0,6194808755	0,3805191245
2	0,3697066170	0,2497742585
3	0,3415868521	0,0281197649
4	0,3414502372	0,0001366149
5	0,3414502344	0,0000000028

Le zéro de $f(x)$ en commençant à $x_0=1$ est $\boxed{0,34145023}$ à 8 décimales près, ce qui est plus précis que la question, c'est-à-dire 6 décimales

Donc à $f(p) = f(0,34145023) = 0$

Ordre de convergence

$$f(p)' = -e^{-p} - 2\sec^2(p)$$
$$= -e^{-0,34145023} - 2\sec^2(0,34145023)$$
$$f(p)' = -2,96 \neq 0 \Rightarrow$$ ordre de convergence de Newton $= 1$ (v. Th. 8.7 cité)

et

$$f(p)'' = \left(-e^{-p} - 2\sec^2(p)\right)'$$
$$= e^{-p} - 2(\sec(p)\sec(p))'$$
$$= e^{-p} - 2(\sec(p)\sec(p)\tan(p) + \sec(p)\tan(p)\sec(p))$$
$$= e^{-p} - 2(\sec^2(p)\tan(p) + \sec^2(p)\tan(p))$$
$$= e^{-p} - 2(2\sec^2(p)\tan(p))$$
$$f(p)'' = \boxed{e^{-p} - 4\sec^2(p)\tan(p)}$$
$$f(p)'' = -0,889$$

Donc selon le théorème 8.7 de la page 154 (livre de note du cours)[1]

Si p est une racine simple de $f(x)=0$, c'est-à-dire que $f(p)=0$ et $f'(p) \neq 0$ et si $f''(p)$ existe, alors la méthode de Newton converge au moins d'ordre 2 avec x_0 près de p.

$\boxed{\text{Donc, l'ordre de convergence est au moins de 2}}$

[1] Équations différentielles et méthodes numériques pour ingénieurs, R. Vaillancourt, Ottawa