MAT 2784 B
DEVOIR 2
2012.01.25

1.27 Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2-y^2+x)\,dx + 2xy\,dy = 0$$
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M_y = -2y \neq N_x = 2y$$

→ l'équation n'est pas exacte!

$$g(y) = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y-2y}{2xy} = \frac{-4y}{2xy} = \frac{-2}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = 1/x^2$$

Donc, $1/x^2(x^2-y^2+x)\,dx + 1/x^2(2xy)\,dy = 0$
$$(1 - y^2/x^2 + 1/x)\,dx + (2y/x)\,dy = 0$$
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M_y = -2y/x^2 = N_x = -2y/x^2$$

→ l'équation est exacte!

$$\mu(x,y) = \int (2y/x)\,dy + T(x)$$
$$= y^2/x + T(x)$$

$$\mu_x(x,y) = d_x(y^2/x + T(x))$$
$$= -y^2/x^2 + T'(x)$$
$$= -y^2/x^2 + 1 + 1/x$$

donc $T'(x) = 1 + 1/x$ et $T(x) = x + \ln|x|$

La solution est donc : $\boxed{\frac{y^2}{x} + x + \ln|x| = C}$

1.30 Résoudre l'~~es~~ équation~~s~~ différentielle~~s~~

$$(2xy^2-3y^3)dx + (7-3xy^2)dy = 0$$
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M_y = 4xy - 9y^2 \quad \neq \quad N_x = -3y^2$$

$$g(y) = \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{4xy - 9y^2 - 3y^2}{2xy^2 - 3y^2}$$
$$= \frac{\cancel{y}(4x - 9y - 3y)}{y^{\cancel{2}}(2x-3)}$$
$$= \frac{2\cancel{(2x-3)}}{y\cancel{(2x-3)}}$$
$$= 2/y$$

$$\mu(y) = e^{\int -2/y\, dy}$$
$$= e^{-2\ln y}$$
$$= e^{\ln y^{-2}}$$
$$= 1/y^2$$

Donc, $\quad 1/y^2(2xy^2 - 3y^3)dx + 1/y^2(7-3xy^2)dy$
$$(2x - 3y)\,dx + (7/y^2 - 3x)\,dy$$
$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M_y = -3 \quad = \quad N_x = -3$$

l'équation est exacte!

$$\mu(x,y) = \int (2x - 3y)\,dx + T(y)$$
$$= x^2 - 3xy + T(y)$$

$$\mu_y(x,y) = d_y(x^2 - 3xy + T(y))$$
$$= -3x + T'(y)$$
$$= -3x + 7/y^2 \quad \rightarrow T'(y) = 7/y^2 \text{ et } T(y) = -7/y$$

La solution est donc $\boxed{x^2 - 3xy - 7/y = C}$

1,34 Résoudre l'équation différentielle

[redacted]

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}\, y = x$$

$$y' + f(x)\, y = r(x)$$

Alors le facteur d'intégration est:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{2x}{x^2+1}dx} \qquad \text{où } u = x^2+1, \quad du = 2x\,dx$$

$$= e^{\int \frac{1}{u} du}$$

$$= e^{\ln u}$$

$$= u$$

$$= x^2+1$$

on a que :

$$d'(x^2+1)y = (x^2+1)x$$

$$(x^2+1)y = \int (x^3+x)\, dx + C$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$$

donc :

$$(x^2+1)y = \frac{x^4+2x^2+4C}{4}$$

$$y = \frac{x^4+2x^2+4C}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+1)}$$

$$y = \frac{x^4+2x^2+4C}{4x^2+4}$$

1.37 Résoudre ~~les~~ problème ~~s~~ à valeur initiale.

$y' + 3x^2y = x^2, \quad y(0) = 2$

Donc c'est une équation linéaire de forme

$y' + f(x)y = r(x)$

Alors le facteur d'intégration est:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$
$$= e^{\int 3x^2\,dx}$$
$$= e^{\cancel{3}x^3/\cancel{3}}$$
$$= e^{x^3}$$

on a que :

$$d(e^{x^3}y) = x^2e^{x^3}$$

$$e^{x^3}y(x) = \int x^2e^{x^3} + C_1$$

★ on substitue $u = x^3$, $du = 3x^2dx$

alors $e^{x^3}y(x) = \int \frac{e^u}{3} + C_1$

$$= 1/3 \int e^u + C_1$$
$$= 1/3\, e^u + C_1$$
$$= 1/3\, e^{x^3} + C_1$$

donc $e^{x^3}y(x) = 1/3e^{x^3} + C_1$

$$y(x) = \frac{\cancel{e^{x^3}}}{3\cancel{e^{x^3}}} + \frac{C_1}{e^{x^3}}$$
$$= 1/3 + C_1/e^{x^3}$$

trouvons la valeur de C: $\quad y(0) = 2 = 1/3 + C_1/e^{0^3}$

$5/3 = C_1$

La solution unique est donc $\boxed{y(x) = 1/3 + \frac{5}{3e^{x^3}}}$

1,41 Trouver les trajectoires orthogonales des familles de courbes. Dans chaque cas, tracer quelques courbes des deux familles sur le même repère.

$x^2 + y^2/4 = c$

→ dérivée par rapport à x

- $\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{y^2}{4}\right) = \frac{d}{dx}(c)$
- $2x + \frac{y}{2}y' = 0$

donc $y' = -\frac{4x}{y} = m$

l'équation différentielle de la famille orthogonale est alors:

$$\boxed{y'_{orth} = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{m(x)}}$$

$y'_{orth} = \frac{-1}{-4x/y}$

- $\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{-4x/y}$
- $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{4x}$
- $4x\,dx = y\,dy$
- $4x\,dx - y\,dy = 0$

$M(x,y)\,dx - N(x,y)\,dy = 0$

$M_y = 0 \; = \; N_x = 0$ → l'équation est exacte !

Suite

↓

Suite 1.41:

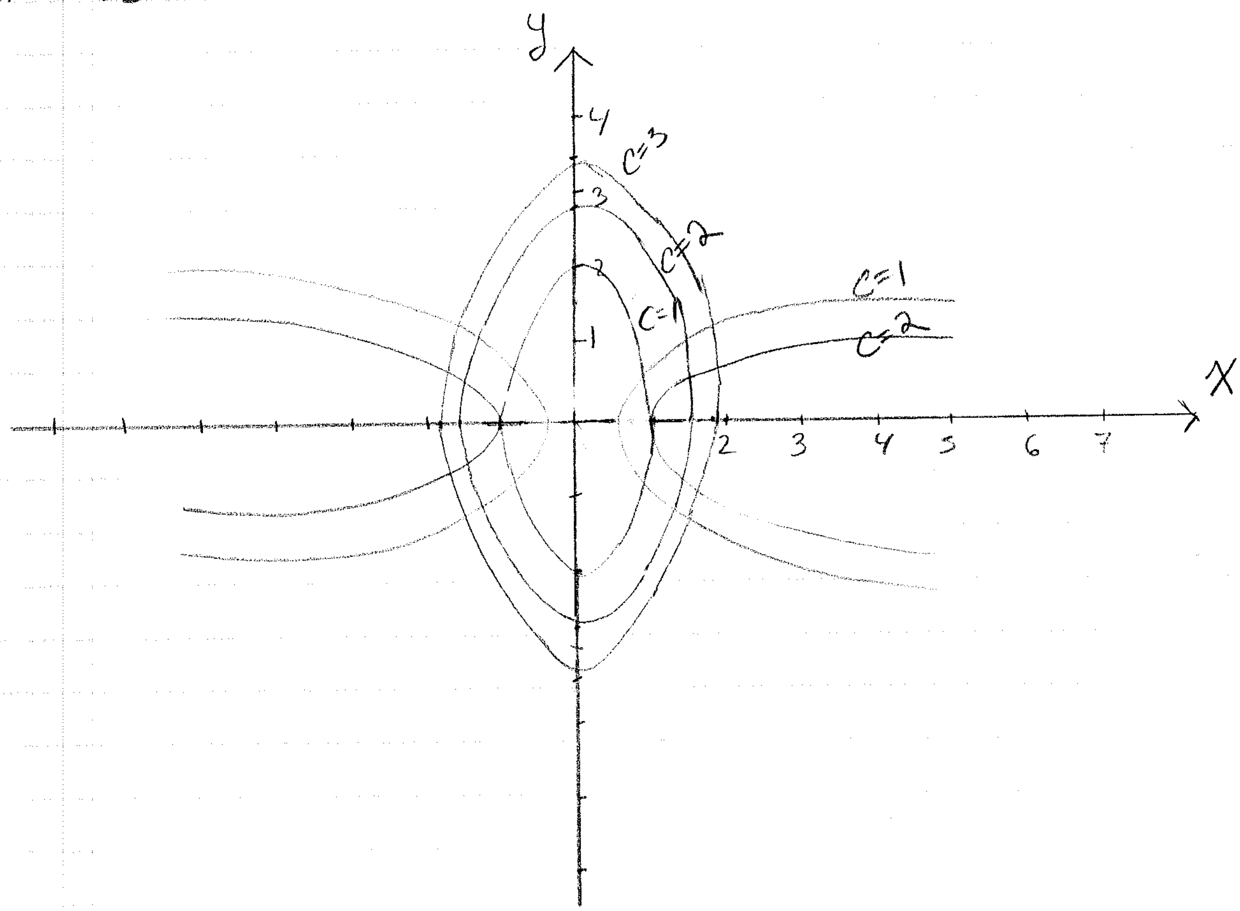
$$\mu(x,y) = \int M(x,y)\,dx + T(y)$$
$$= \int 4x\,dx + T(y)$$
$$= 2x^2 + T(y)$$

$$\mu_y(x,y) = \frac{d}{dy}\left(2x^2 + T(y)\right)$$
$$= T'(y)$$
$$= -y$$

donc $T'(y) = -y$ et $T(y) = -\frac{1}{2}y^2$

$\rightarrow$ alors $\mu(x,y) = \boxed{2x^2 - \frac{1}{2}y^2 = C}$ (hyperboles)

À partir des 2 familles, on obtient le graphique ci-dessous.



[redacted]

2.1 Résoudre les équations différentielles

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$y = e^{\lambda x}$$
$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

alors $y'' - 3y' + 2y = 0$ devient :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2 e^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$
$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ $\qquad$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{2x}$

Alors la solution générale, qui contient deux constantes arbitraires, est :

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$$

7.8 Itérer 5 fois la récurrence de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = \cos(x-1)$. Démarrer en $x_0 = 2$. Utiliser au moins 6 décimales. Trouver l'ordre de convergence de la méthode. Les angles sont en radians.

$$g(x) = \cos(x-1)$$
$$x_0 = 2$$

$$g'(x) = -\sin(x-1)$$

$$g'(p) = -\sin(p-1) = 0$$

↳ donc l'ordre de convergence est d'au moins 2.

$$g''(p) = -\cos(p-1) = -1$$

alors $g'(p) = 0$ et $g''(p) = -1$

donc l'ordre de convergence est de 2.

x_{n+1}	$g(x_n)$
0	2
1	0,540302
2	0,896187
3	0,994616
4	0,999986
5	0,999999...

7.9. Itérer 5 fois la récurrence de point fixe $x_{n+1} = g(x_n)$ avec $g(x) = 1 + \sin^2 x$. Démarrer en $x_0 = 1$. Utiliser au moins 6 décimales. Trouver l'ordre de convergence de la méthode. Les angles sont en radians.

$$g(x) = 1 + \sin^2 x$$
$$x_0 = 1$$

$$g'(x) = 2\sin x \cos x$$
$$= \sin(2x)$$

$$g'(p) = \sin(2p)$$
$$= -0.607$$
$$\neq 0$$

x_{n+1}	$g(x_n)$
0	1
1	1,708073
2	1,981273
3	1,840762
4	1,928872
5	1,877169

Donc l'ordre de convergence est de 1.