2010.03.31
MAT 2784 B

Devoir #8

5.11 Trouver la solution série de l'équation différentielle
$$y'' + x^2y' + xy = 0$$

posons
$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$
$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1}$$
$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$y'' + x^2y' + xy = 0$$

$$0 = (2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots) + x^2(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots) + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots)$$
$$0 = 2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1 + a_1)x^2 + (20a_5 + 2a_2 + a_2)x^3 + (30a_5 + 3a_3 + a_3)x^4 + \cdots$$
$$0 = 2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + 2a_1)x^2 + (20a_5 + 3a_2)x^3 + (30a_5 + 4a_3)x^4 + \cdots$$

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$
$$6a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = -a_0/6$$
$$12a_4 + 2a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = -a_1/6$$
$$20a_5 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = -3a_2/20 = 0$$
$$30a_6 + 4a_3 = 0 \Rightarrow a_6 = -2/15 \cdot a_3 = 2a_1/90 = a_0/45$$

a_0 et a_1 sont indéterminés, ∴ nous avons 2 solutions.

$$a_1 = 0 \rightarrow y_1(x) = a_0 + a_3x^3 + a_6x^6 + \cdots$$
$$= \frac{a_0}{6}\left[6 - x^3 + \frac{2x^6}{15} + \cdots\right]$$

$$a_0 = 0 \rightarrow y_2(x) = a_1x + a_4x^4 + a_7x^7 + \cdots$$
$$= \frac{a_1}{6}\left[6x - x^4 + \frac{5}{42}x^7 + \cdots\right]$$

Solution Générale:
$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = \frac{a_0}{6}\left[6 - x^3 + \frac{2x^6}{15} - + \cdots\right] + \frac{a_1}{6}\left[6x - x_4 + \frac{5}{42}x^7 - + \cdots\right]$$

5.15 Trouver la solution série de l'équation différentielle
$$y'' - 4xy' + (4x^2-2)y = 0$$

posons $y(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + \dots$

$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + \dots$

$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + \dots$

$-4xy' = -4a_1x - 8a_2x^2 - 12a_3x^3 - 16a_4x^4 - 20a_5x^5 - 24a_6x^6 - 28a_7x^7 - 32a_8x^8 - 36a_9x^9 + \dots$

$(4x^2-2)y = 4a_0x^2 + 4a_1x^3 + 4a_2x^4 + 4a_3x^5 + \dots - 2a_0 - 2a_1x - 2a_2x^2 - 2a_3x^3 - 2a_4x^4 - 2a_5x^5 \dots$

$$\begin{aligned} 0 &= y'' - 4xy' + (4x^2-2)y \\ &= (2a_2 - 2a_0) + (6a_3 - 6a_1)x + (12a_4 - 10a_2 + 4a_0)x^2 + (20a_5 - 14a_3 + 4a_1)x^3 \\ &\quad + (30a_6 - 18a_4 + 4a_2)x^4 + (42a_7 - 22a_5 + 4a_3)x^5 + (56a_8 - 26a_6 + 4a_4)x^6 \\ &\quad + (72a_9 - 30a_7 + 4a_5)x^7 + \dots + (n(n-1)a_n - (4(n-2)+2)a_{n-2} + 4a_{n-4}) \end{aligned}$$

$2a_2 - 2a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = a_0$

$6a_3 - 6a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = a_1$

$12a_4 - 10a_2 + 4a_0 = 0 \Rightarrow 12a_4 - 10a_0 + 4a_0 = 12a_4 - 6a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = a_0/2 = a_0/2!$

$20a_5 - 14a_3 + 4a_1 = 0 \Rightarrow 20a_5 - 14a_1 + 4a_1 = 20a_5 - 10a_1 = 0 \Rightarrow a_5 = a_1/2 = a_1/2!$

$30a_6 - 18a_4 + 4a_2 = 0 \Rightarrow 30a_6 - 18(a_0/2) + 4a_0 = 30a_6 - 5a_0 = 0 \Rightarrow a_6 = a_0/6 = a_0/3!$

$42a_7 - 22a_5 + 4a_3 = 0 \Rightarrow 42a_7 - 22(a_1/2) + 4a_1 = 42a_7 - 7a_1 = 0 \Rightarrow a_7 = a_1/3!$

$56a_8 - 26a_6 + 4a_4 = 0 \Rightarrow 56a_8 - 26(a_0/3!) + 4(a_0/2!) = 0 \Rightarrow a_8 = \frac{a_0}{24} = \frac{a_0}{4!}$

Puisque a_0 et a_1 sont indéterminés, nous avons deux solutions:

$a_1 = 0 \Rightarrow y_1(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \dots = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_0x^2}{1!} + \frac{a_0x^4}{2!} + \frac{a_0x^6}{3!} + \dots$

$a_0 = 0 \Rightarrow y_2(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots = \frac{a_1x}{0!} + \frac{a_1x^3}{1!} + \frac{a_1x^5}{2!} + \frac{a_1x^7}{3!} + \dots$

Solution Générale:

$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$

$$y(x) = a_0\left[\frac{1}{0!} + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots\right] + a_1\left[\frac{x}{0!} + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \dots\right]$$

5.22 Comparer la valeur de $P_4(0{,}7)$ obtenue par la récurrence à 3 points (13.1) de l'exercice précédent avec la valeur du polynôme $P_4(x)$ en $x = 0{,}7$.

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Pour P_4, $n=3$

① $(3+1)P_4(0{,}7) = (2\cdot 3+1)(0{,}7)P_3(0{,}7) - 3P_2(0{,}7)$

$4P_4(0{,}7) = 4{,}9\,P_3(0{,}7) - 3P_2(0{,}7)$ écriture !!

$= 4{,}9 \cdot \frac{1}{2}(5\cdot(0{,}7)^3 - 3(0{,}7)) - \frac{3}{2}(3(0{,}7)^2 - 1)$

$4P_4(0{,}7) = -0{,}94325 - 0{,}705 = -1{,}64825$

$P_4(0{,}7) = -0{,}4120625$

② $P_4(0{,}7) = 1/8(35(0{,}7)^4 - 30(0{,}7)^2 + 3) = -0{,}4120625$

Les deux réponses sont égales!

5.29 Trouver les trois 1ers coefficients du développement de Fourier-Legendre de la fonction $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$

et tracer $f(x)$ et les approximations de Fourier-Legendre sur le même repère.

① $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x), \quad -1 < x < 1$ Alors, $a_m = \frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_m(x)\,dx$

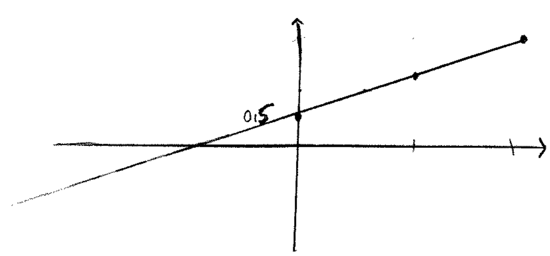
Donc, $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx = 1/2\, x\big|_0^1 = 1/2$

$a_1 = 3/2 \int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx = 3/2\int_0^1 x\,dx = 3/2\,(x^2/2)\big|_0^1 = 3/4$

$a_2 = 5/2\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = 5/2\int_0^1 1/2(3x^2-1)\,dx = 5/4\,(x^3 - x)\big|_0^1 = 0$

On a donc l'approximation

$f(x) \approx 1/2\,P_0(x) + 3/4\,P_1(x) + 0\,P_2(x) = 1/2 + 3/4\,x$



5.32. Évaluer $I = \int_{0,3}^{1,7} e^{-x^2} dx$, par la quadrature gaussienne à 3 points.

Pour $I = \int_{0,3}^{1,7} e^{-x^2} dx$, $a = 0{,}3$, $b = 1{,}7$ et $f(x) = e^{-x^2}$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt$$

$$\int_{0,3}^{1,7} e^{-x^2} dx = \frac{1{,}7-0{,}3}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1{,}7-0{,}3}{2}t + \frac{1{,}7+0{,}3}{2}\right)dt \quad \text{où } f(t) = e^{-(0{,}7t+1)^2}$$

$$= 0{,}7 \int_{-1}^{1} e^{-(0{,}7t+1)^2} dt$$

formule de Gauss à 3 points :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-(0{,}7t+1)^2} dt = \frac{5}{9} e^{-(-0{,}7(\sqrt{3/5})+1)^2} + \frac{8}{9} e^{-(0+1)^2} + \frac{5}{9} e^{-(0{,}7(\sqrt{3/5})+1)^2}$$

$$= 0{,}4505206667 + 0{,}3270039477 + 0{,}05149750074$$

$$= 0{,}8290221151$$

$$0{,}7 \int_{-1}^{1} e^{-(0{,}7t+1)^2} = 0{,}58031548$$

$$\therefore \boxed{\int_{0,3}^{1,7} e^{-x^2} = 0{,}58031548}$$

✓

12.11 Approcher à 4 décimales près la solution de $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, à valeur initiale sur $0 \leq x < 1$ par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $h = 0{,}1$ et tracer la solution numérique.

$h = x_{n+1} - x_n = 0{,}1$

$x_n = 0 + 0{,}1n = 0{,}1n$ où $n = 0, 1, 2, \dots, 10$

$y_0 = 1$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$K_1 = hf(x_n, y_n) = 0{,}1 \times [(0{,}1n)^2 + y_n^2]$

$K_2 = hf(x_n + 1/2h, y_n + 1/2K_1) = 0{,}1[(0{,}1n + 0{,}05)^2 + (y_n + K_1/2)^2]$

$K_3 = hf(x_n + 1/2h, y_n + 1/2K_2) = 0{,}1[(0{,}1n + 0{,}05)^2 + (y_n + K_2/2)^2]$

$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 0{,}1[(0{,}1n + 0{,}1)^2 + (y_n + K_3)^2]$

3 pas seulement

x_n	y_n	$y(x_n)$	Erreur absolue	Erreur relative
0.00	1,000			
0.10	1,1115			
0.20	1,2530			
0.30	1,4397			

Pour $n=0$, $K_1 = 0{,}1$; $K_2 = 0{,}1105$; $K_3 = 0{,}1116$; $K_4 = 0{,}1246$

Pour $n=1$, $K_1 = 0{,}1245$; $K_2 = 0{,}1400$; $K_3 = 0{,}1418$; $K_4 = 0{,}1611$

Pour $n=2$, $K_1 = 0{,}1610$; $K_2 = 0{,}1841$; $K_3 = 0{,}1872$; $K_4 = 0{,}2164$

12.17 Approcher à 6 décimales près la solution de $y' = x + 2\sin y$, $y(0)=0$, à valeur initiale sur $0 \le x \le 1$ par la paire de Matlab ode23 d'ordre 3 avec $h = 0{,}1$ et estimer l'erreur locale de méthode par la formule donnée.

$y' = f(x,y)$

Pour $n=0$, $x_0 = 0$

$K_1 = 0{,}1 \cdot 0 = 0$

$K_2 = 0{,}1(0{,}05 + 0) = 0{,}005$

$K_3 = 0{,}1(0{,}075 + 2\sin(0 + 0{,}00375)) = 0{,}00825$

$K_4 = 0{,}1(0{,}1 + 2\sin(0 + 0{,}001\overline{66} + 0{,}00\overline{366}) = 0{,}01106$

$y_1 = 0 + 2/9(0) + 1/3(0{,}005) + 4/9(0{,}008250) = 0{,}005\overline{333}$

$EE = -5/72(0) + 1/12(0{,}005) + 1/9(0{,}00825) - 1/8(0{,}011067) = -0{,}00005$

Pour $n=1$, $x_1 = 0{,}1$

$K_1 = 0{,}1(0{,}1 + 2\sin(0{,}005333)) = 0{,}0110666$

$K_2 = 0{,}1(0{,}15 + 2\sin(0{,}005333 + 0{,}005533)) = 0{,}0171733$

$K_3 = 0{,}1(0{,}175 + 2\sin(0{,}005333 + 0{,}01288) = 0{,}0211425$

$K_4 = 0{,}1(0{,}2 + 2\sin(0{,}005333 + 0{,}002459 + 0{,}005724 + 0{,}009396)) = 0{,}0245821$

$y_2 = 0{,}005\overline{333} + 0{,}002459 + 0{,}005724 + 0{,}009396 = 0{,}00291\overline{233}$

$EE = \frac{-5}{72}(0{,}0110666) + \frac{1}{12}(0{,}0171733) + \frac{1}{9}(0{,}0211425) - \frac{1}{8}(0{,}0245821) = -0{,}000061$

Pour $n=2$, $x_2 = 0{,}2$

$K_1 = 0{,}1(0{,}2 + 2\sin(0{,}022912)) = 0{,}024582$

$K_2 = 0{,}1(0{,}25 + 2\sin(0{,}022912 + 0{,}012291)) = 0{,}032039$

$K_3 = 0{,}1(0{,}275 + 2\sin(0{,}022912 + 0{,}024029)) = 0{,}036885$

$K_4 = 0{,}1(0{,}3 + 2\sin(0{,}022912 + 0{,}005463 + 0{,}010680 + 0{,}016393) = 0{,}041084$

$y_3 = 0{,}022912 + 0{,}005463 + 0{,}010680 + 0{,}016393 = 0{,}055448$

$EE = \frac{-5}{72}(0{,}024582) + \frac{1}{12}(0{,}032039) + \frac{1}{9}(0{,}036885) - \frac{1}{8}(0{,}041084) = -0{,}0000\overline{743}$

Deux pas suffisent.

12.22 Approcher à 6 décimales près la solution de $y' = x + \cos y$, $y(0) = 0$ à valeur initiale sur $0 \le x \le 1$ par le prédicteur-correcteur d'Adams-Bashforth-Moulton d'ordre 3 avec $h = 0{,}1$, estimer l'erreur locale de méthode en $x = 0{,}5$ et tracer la solution numérique.

Valeurs initiales

$x_0 = 0 \implies y_0 = 0$

$x_1 = 0{,}1 \implies y_1 = 0{,}104821$

$x_2 = 0{,}2 \implies y_2 = 0{,}218475$

car $\longrightarrow$ $y_{n+1}^P = y_n^c + \frac{h}{12}(23 f_n^c - 16 f_{n-1}^c + 5 f_{n-2}^c)$ $\quad f_k^c = f(x_k, y_k^c)$

$y_{n+1}^c = y_n^c + \frac{h}{12}(5 f_{n+1}^P + 8 f_n^c - f_{n-1}^c)$ $\quad f_k^P = f(x_k, y_k^P)$

$n=2$

$y_3^P = y_2^c + \frac{0{,}1}{12}(23 \cdot f_2 - 16 f_1^c + 5 f_0^c)$

$= 0{,}218475 + 0{,}008333[23(1{,}1762) - 16(1{,}0945) + 5(1)] = 0{,}339647$

$y_3^c = 0{,}218475 + 0{,}008333(5(1{,}2429) + 8(1{,}1762) - 1{,}0945) = 0{,}339555$

$\varepsilon \approx -\frac{1}{10}[y_{n+1}^c - y_{n+1}^P]$

$\varepsilon \approx -\frac{1}{10}[y_3^c - y_3^P] \approx -\frac{1}{10}(0{,}339555 - 0{,}339647) = 0{,}0000092$

$\varepsilon = 0{,}92 \times 10^{-5}$

$n=3$

$y_4^P = 0{,}339555 + 0{,}008\overline{333}[(23(1{,}2429) - 16(1{,}1762) + 5(1{,}0945))]$

$= 0{,}1466555$

$y_4^c = 0{,}339555 + 0{,}008\overline{333}[(5(1{,}2931) + 8(1{,}2429) - 1{,}1762)]$

$= 0{,}14664925$

$E \approx -\frac{1}{10}[y_4^c - y_4^P] \approx 0{,}00000625$

$E \approx 0{,}625 \times 10^{-5}$