D7.1

2010.03.24
MAT 2784 B

Devoir #7

6.52 Résoudre $y''+3y'+2y = 1-u(t-1)$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ par transformation de laplace et tracer les solutions.

posons $\mathcal{L}(y) = Y(s)$

$$\mathcal{L}(y''+3y'+2y) = \mathcal{L}(1-u(t-1)) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2+3s+2) - 1 = \frac{1-e^{-s}}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}$$

$$Y(s) = \frac{s+1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{s(s+1)(s+2)} - \frac{e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} = \frac{(s+2)A + (s+1)B}{(s+1)(s+2)} = \frac{(A+B)s + (2A+B)}{(s+1)(s+2)}$$

$A+B=0 \Rightarrow A=-B$ $\quad 2A+B=1$ $\quad -2B+B=1 \Rightarrow B=-1$ et $A=1$

$$\therefore \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)} = \frac{(s+1)(s+2)A + Bs(s+2) + C(s+1)s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{(s^2+3s+2)A + B(s^2+2s) + C(s^2+s)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{(A+B+C)s^2 + (3A+2B+C)s + 2A}{s(s+1)(s+2)}$$

$2A=1 \Rightarrow A=1/2$ $\quad 3A+2B+C = 1{,}5+2B+C=0 \Rightarrow C=-1{,}5-2B$

$A+B+C = 0{,}5 + B + (-1{,}5-2B) = -1-B = 0 \Rightarrow B=-1$ $\therefore C=1/2$

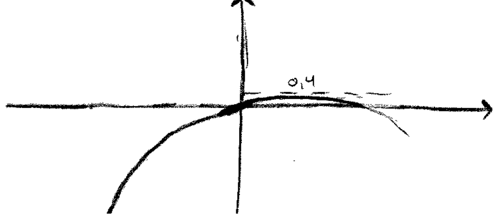
$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left[\frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{(s+1)}\right] + \left[\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}\right] - e^{-s}\left[1/2s + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{(s+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)} - e^{-s}\left[1/2s + 1/2(s+2) - 1/(s+1)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{1}{2}u(t-1) - \frac{1}{2}u(t-1)e^{-2(t-1)} + u(t-1)e^{-(t-1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - u(t-1)\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-2(t-1)}}{2} - e^{-(t-1)}\right]$$



désolé pour les traces de café →
:)

6.53 Résoudre $y''-y=\sin t+\delta(t-\pi/2)$, $y(0)=3.5$, $y'(0)=-3.5$ par transformation de Laplace et tracer les solutions.

On pose $\mathcal{L}(y)=Y(s)$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Y(s)=\mathcal{L}^{-1}(\sin t+\delta(t-\pi/2))$$

$$(s^2-1)Y(s)-3{,}5s+3{,}5=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi/2\,s}$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}+\frac{e^{-\pi/2\,s}}{(s^2-1)}+\frac{3{,}5s}{(s^2-1)}-\frac{3{,}5}{(s^2-1)}$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}=\frac{A}{(s^2+1)}+\frac{B}{(s^2-1)}=\frac{(A+B)s^2+(B-A)}{(s^2+1)(s^2-1)}$$

$A+B=0 \Rightarrow A=-B$
$B-A=1 \Rightarrow B+B=1 \Rightarrow B=1/2$
et $A=-1/2$

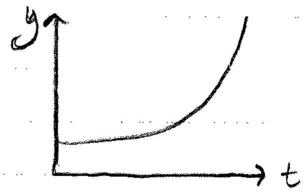
⇒ On ne prend que les termes pairs

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)}=\frac{1}{2(s^2-1)}-\frac{1}{2(s^2+1)}$$

$$\therefore\ Y(s)=\frac{1}{2(s^2-1)}-\frac{1}{2(s^2+1)}+\frac{e^{-\pi/2\,s}}{(s^2-1)}+\frac{3{,}5s}{(s^2-1)}-\frac{3{,}5}{(s^2-1)}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\sinh(t)-\frac{1}{2}\sin t+\underset{u}{\cancel{\delta}}(t-\pi/2)\cdot\sinh(t-\pi/2)+3{,}5\cosh t-3{,}5\sinh(t)$$

$$y(t)=3{,}5\cosh(t)-3\sinh(t)-1/2\sin(t)+\overset{u}{\cancel{\delta}}(t-\pi/2)\cdot\sinh(t-\pi/2)$$



6.57 Résoudre $y(t)=\cos 3t+2\int_0^t y(\tau)\cos 3(t-\tau)\,d\tau$ par transformation de Laplace et tracer les solutions.

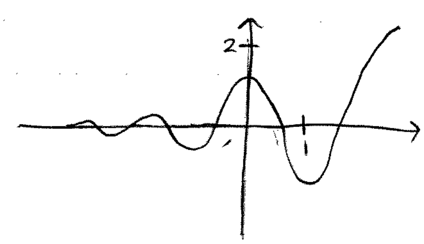
⇒ convolution

$$y(t)=\cos 3t+2(y*\cos(3t)) \Rightarrow Y(s)=\frac{s}{s^2+9}+2Y(s)\cdot\frac{s}{s^2+9}$$

$$Y(s)-2Y(s)\cdot\frac{s}{(s^2+9)}=\frac{s}{(s^2+9)} \Rightarrow Y(s)\left(1-\frac{2s}{s^2+9}\right)=\frac{s}{(s^2+9)} \Rightarrow Y(s)=\frac{s\,\cancel{(s^2+9)}}{\cancel{(s^2+9)}(s^2-2s+9)}$$

$$Y(s)=\frac{s-1+1}{(s-1)^2+8}=\frac{s-1}{(s-1)^2+8}+\frac{1}{(s-1)^2+8}$$

$$y(t)=e^t\cos(\sqrt{8}\,t)+\frac{1}{\sqrt{8}}e^t\sin(\sqrt{8}\,t)$$



6.59

$$y(t) = t\,e^{t} + 2e^{t}\int_0^t e^{-\tau} y(\tau)\,d\tau$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[t\,e^{t}] + 2\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau)\,d\tau\right]$$

$$Y(s) = \mathcal{L}[t\,e^{t}] + 2\,\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau)\,d\tau\right]$$

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' + 2\left[Y(s)\cdot\frac{1}{s-1}\right]$$

Car $\mathcal{L}[t.f(t)] = -F'(s)$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + Y(s)\cdot\frac{2}{s-1}$$

$$Y(s) - Y(s)\cdot\frac{2}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s)\left[1 - \frac{2}{s-1}\right] = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$Y(s)\left[\frac{s-3}{s-1}\right] = \frac{1}{(s-1)^2}$$

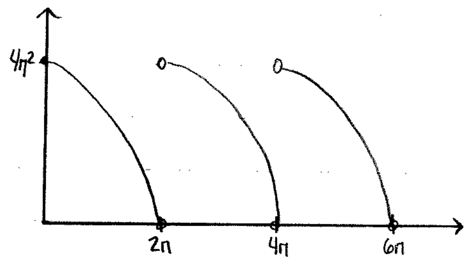
$$Y(s) = \frac{(s-1)}{(s-3)(s-1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{(s-1)(s-3)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s-3)}\right] = \frac{1}{3-1}\left[e^{3t} - e^{t}\right]$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{3t} - e^{t}\right]}$$

6.61 Tracer 3 périodes des fonctions 2π-périodiques et trouver leurs transformées de Laplace : $f(t) = 4\pi^2 - t^2,\ 0<t<2\pi$



$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st}(4\pi^2 - t^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\int_0^{2\pi}(e^{-st}\cdot 4\pi^2)dt - \int_0^{2\pi}(e^{-st}\cdot t^2)dt\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{4\pi^2\cdot e^{-st}}{-s}\Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{t^2 e^{-st}}{-s} - \int \frac{t e^{-st}}{-s}dt\right)\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$u_1 = t^2,\ du_1 = 2t\,dt,\ dv_1 = e^{-st}dt,\ v_1 = e^{-st}/-s$ et $u_2 = t,\ du_2 = dt,\ dv_2 = e^{-st}dt,\ v_2 = \frac{e^{-st}}{-s}$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{4\pi^2}{-s}(e^{-2\pi s}-1) - \left(\frac{t^2e^{-st}}{-s} + \frac{2}{s}\left(\frac{te^{-st}}{-s} - \int \frac{e^{-st}}{-s}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{4\pi^2 e^{-2\pi s}}{-s} - \frac{4\pi^2}{-s} - \left(\frac{t^2e^{-st}}{-s} + \frac{2}{s}\left(\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{4\pi^2 e^{-2\pi s}}{-s} + \frac{4\pi^2}{s} - \left(\frac{4\pi^2 e^{-2\pi s}}{-s} + \frac{2}{s}\left(\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{-s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}\right)\right) + \frac{2}{s}\left(\frac{-1}{s^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{4\pi^2}{s} + \frac{4\pi e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{2e^{-2\pi s}}{s^3} \quad \frac{-2}{s^3}\right]$$

6.63 Tracer 3 périodes des fonctions 2π-périodiques et trouver leurs transformées de Laplace : $f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0<t<\pi \\ \pi - t, & \text{si } \pi<t<2\pi \end{cases}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}\cdot t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st}\cdot(\pi - t)\,dt\right]$$

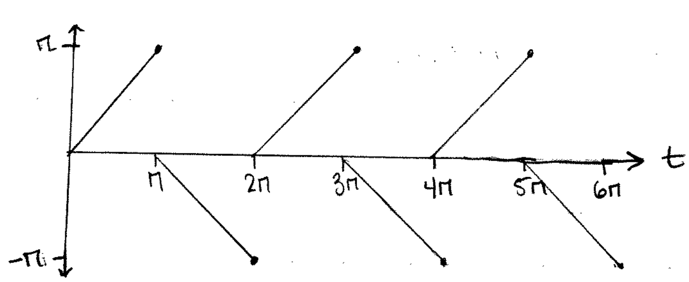
$$= \frac{1}{(1-e^{-2\pi s})}\left[\int_0^{\pi} e^{-st}\cdot t\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\pi e^{-st}dt - \int_{\pi}^{2\pi} t e^{-st}dt\right]$$

$u = t \quad du = dt$
$dv = e^{-st}dt \quad v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2\pi s})}\left[\left(\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi e^{-st}}{-s}\Big|_{\pi}^{2\pi} - \left(\frac{te^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{\pi e^{-\pi s}}{-s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right] + \left[\cancel{\frac{\pi e^{-2\pi s}}{-s}} - \frac{\pi e^{-\pi s}}{-s}\right] - \left[\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{-s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} - \frac{\pi e^{-\pi s}}{-s} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(1-e^{-2\pi s})}\left[\frac{-\pi e^{-\pi s}}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{\pi e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}\right]$$



10.6 Évaluer $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$ par la méthode de Simpson (composée) avec $n = 2m = 10$.

$h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(1-0)}{10} = 0{,}1$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0{,}3$;
$x_4 = 0{,}4$; $x_5 = 0{,}5$; $x_6 = 0{,}6$; $x_7 = 0{,}7$;
$x_8 = 0{,}8$; $x_9 = 0{,}9$; $x_{10} = 1{,}0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{1}{30}\left(1 + \frac{4}{1{,}02} + \frac{2}{1{,}08} + \frac{4}{1{,}18} + \frac{2}{1{,}32} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}72} + \frac{4}{1{,}98} + \frac{2}{2{,}28} + \frac{4}{2{,}62} + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 0{,}67551019 2$$

10.12 Employer l'intégration de Romberg pour calculer $R_{3,3}$ pour l'intégrale $\int_1^{1,6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$

$I = \int_1^{1,6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx \qquad h = (b-a) = 1{,}6 - 1 = 0{,}6$

$\Rightarrow h_1 = 0{,}6 \quad , \quad h_2 = \frac{h}{2} = 0{,}3 \quad , \quad h_3 = \frac{h}{4} = 0{,}15$

$R_{1,1}$ est obtenu par la méthode des trapèzes avec un pas $h = 0{,}6$

$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}\left[f(1) + f(1{,}6)\right] = 0{,}3\left[\frac{-2}{3} - \frac{20}{9}\right] = \frac{-78}{90} = -0{,}866666667$ ✓

$R_{2,1}$ est obtenu avec pas $h = 0{,}3$

$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}3) + f(1{,}6)\right] = -0{,}770995671$ ✓

$R_{3,1}$ est obtenu avec $h = 0{,}15$

$R_{3,1} = \frac{h_3}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}15) + 2f(1{,}3) + 2f(1{,}45) + f(1{,}6)\right]$

$= -0{,}743598388$ ✓

$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = -0{,}739105339$ ✓

$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = -0{,}73446596$ ✓

VOIR VERSO

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{R_{3,2} - R_{2,2}}{15} = -0,734156668$$

$$\Rightarrow I \approx R_{3,3} = \boxed{-0,734156668}$$ ✓

TABLE D'INTÉGRATION DE ROMBERG

i	$R_{i,1}$	$R_{i,2}$	$R_{i,3}$
1	-0,866666667		
2	-0,770995671	-0,739105339	
3	-0,743598388	-0,73446596	-0,734156668