Nom / Name : SOLUTIONS

No d'ét. / Stud. No.:

Test mi-session 1
Durée: 90 min
Place: FTX 351
23 octobre 2009
10:00–11:30

Prof.: Rémi Vaillancourt

MAT 2784 A

Midterm 1
Time: 90 min
Place: FTX 351
23 October 2009
10:00–11:30

Instructions:

(a) *À livre fermé. Tout type de calculatrices permis.*
Closed book. Any type of calculators is allowed.
(b) *Répondre sur le questionnaire.*
Answer on the question sheets.
(c) *Les 6 questions sont d'égale valeur.*
All 6 questions have the same value.
(d) *Donner le détail de vos calculs.*
Show all computation.
(e) *Un formulaire sera distribué.*
Formulae will be distributed.

1	/10
2	/10
3	/10
4	/10
5	/10
6	/10
Total	/60

L'équation différentielle homogène du 1er ordre,
The first order homogeneous differential equation,

$$(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

admet un facteur d'intégration / admits an integrating factor

$$\mu(x) \quad \text{ou/or} \quad \mu(y)$$

selon que / according to

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx},$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y) \Longrightarrow \mu(y) = e^{-\int g(y)\,dy}.$$

Qu. 1. *Trouver un facteur d'intégration, rendre l'équation différentielle exacte et résoudre le problème à valeur initiale.*

Find an integration factor, make the differential equation exact and solve the initial value problem.

$$(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0, \qquad y(1) = 2.$$

$M_y = 2y \qquad N_x = -2y$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2\cancel{y}}{-2x\cancel{y}} = \frac{-2}{x} = f(x)$

$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx}$

$= e^{-2\int \frac{1}{x}\,dx}$

$= e^{-2\ln|x|}$

$= e^{\ln x^{-2}}$

$= x^{-2}$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right) dx - \left(\frac{2y}{x}\right) dy = 0$

$u(x,y) = \int -\frac{2y}{x}\,dy + T(x)$

$= -\frac{2}{x}\int y\,dy + T(x)$

$= -\frac{\cancel{2}}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}y^2 + T(x)$

$= -y^2/x + T(x)$

$u_x(x,y) = y^2/x^2 + T'(x)$

$= \frac{1}{x} + y^2/x^2$

$T'(x) = 1/x$

$T(x) = \ln|x|$

Solution générale:

$-\frac{y^2}{x} + \ln(x) = C$

$-\frac{(2)^2}{1} + \ln(1) = C$

$-4 = C$

$\boxed{\text{Solution unique} \quad \ln(x) - \frac{y^2}{x} = -4}$

✓

Qu. 2. *Résoudre l'équation linéaire à valeur initiale.*

Solve the linear equation with given initial value.

$$\cancel{x}y' + \frac{6y}{x} = \frac{3x+1}{x}, \qquad y(1) = 2.$$

$b(x) = \frac{6}{x}$

$r(x) = \frac{3x+1}{x}$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{6}{x}dx} = e^{6\cdot \ln x} = x^6$$

$$[\mu(x)\, y]' = \mu(x)\, r(x)$$

$$x^6 y = \int 3x^6 + x^5 \, dx + C$$

$$x^6 y = \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + C$$

$$y = \frac{3x^{\cancel{7}}}{7\cancel{x^6}} + \frac{1\cancel{x^6}}{6\cancel{x^6}} + \frac{C}{x^6}$$

sol générale: $y = \frac{3x}{7} + \frac{1}{6} + \frac{C}{x^6}$

$$2 = \frac{3}{7} + \frac{1}{6} + \frac{C}{1}$$

$$\frac{84}{42} - \frac{18}{42} - \frac{7}{42} = C$$

$$\frac{59}{42} = C$$

$$\boxed{\therefore \text{ sol Unique est } \; y = \frac{3x}{7} + \frac{1}{6} + \frac{59}{42x^6}}$$

✓

Qu. 3. *Résoudre le problème aux valeurs initiales.*

Solve the initial value problem.

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 1.$$

Pose $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$

$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1 \cdot \frac{1}{4})}}{2}$

$\lambda = -\frac{1}{2}$

Solution générale: $y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$

① $1 = C_1 e^{-1} + C_2 \cdot 2 e^{-1}$

$y' = +C_1\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}\right)x C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

② $1 = -0{,}5C_1 e^{-1} \cancel{+ C_2 e^{-1}} \cancel{- C_2 e^{-1}}$

$C_1 = -2e$ $\quad$ $1 = -2 + 2C_2 e^{-1}$

$\frac{3e}{2} = C_2$

Solution unique: $y = -2e^1 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{3e e^{-\frac{1}{2}x} \cdot x}{2}$

$$\boxed{y = -2e^{1-\frac{1}{2}x} + \frac{3x}{2} \cdot e^{1-\frac{1}{2}x}}$$

Qu. 4. *Résoudre le problème aux valeurs initiales.*

Solve the initial value problem.

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

pose $y = x^m \quad y' = mx^{m-1} \quad y'' = m(m-1)\,x^{m-2}$

$$\cancel{x^2} \cdot m(m-1)\cancel{x^{m-2}} + 4\cancel{x}\, m\cancel{x^{m-1}} + 2\cancel{x^m} = 0$$

$$m^2 - m + 4m + 2 = 0$$

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

$$(m+1)(m+2) = 0$$

$$m = -1, \; m = -2.$$

Solution générale $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = -c_1x^{-2} - 2c_2x^{-3}$

$1 = c_1(1)^{-1} + c_2(1)^{-2}$ $\qquad 2 = -c_1(1)^{-2} - 2c_2(1)^{-3}$

$1 = c_1 + c_2$ $\qquad 2 = -c_1 - 2c_2$

$\Rightarrow c_1 = 1 - c_2$

$2 = -1 + c_2 - 2c_2$

$c_1 = 4$ $\qquad 3 = -c_2$

$c_2 = -3$

Solution unique : $\boxed{y = 4x^{-1} - 3x^{-2}}$ ✓

Qu. 5. *Itérer 5 fois la récurrence de point fixe à 6 décimales près. Trouver l'ordre de convergence.*

Iterate 5 times the fixed point recurrence. Use at least 6 decimals. Find the order of convergence of the method.

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 = 2.5, \quad \text{avec / with} \quad g(x) = \frac{5}{x^2} + 2.$$

n	x_n
0	2.5
1	2.8
2	2.637755
3	2.718623
4	2.676507
5	2.697965 $\approx p$

$g'(x) = \dfrac{-10}{x^3}$

$g'(p) = \dfrac{-10}{(2.697965)^3}$

$= -0.5092$

$0 < |g'(p)| < 1$

$g'(p) \neq 0$

So converge d'ordre 1

Qu. 6. *Compléter le tableau pour la récurrence de point fixe :*

Fill the boxes for the fixed point iteration:

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 2} \equiv g(x_n).$$

n	x_n	Δx_n	$\Delta^2 x_n$
1	$x_1 = \boxed{3.0000}$		
		$\boxed{0.31662479}$	
2	$x_2 = \boxed{3.31662479}$		$\boxed{-0,176390547}$
		$\boxed{0.140234243}$	
3	$x_3 = \boxed{3.456859033}$		

Accélérer la convergence par la méthode d'Aitken.

Accelerate the convergence by Aitken's process.

$$a_1 = x_1 - \frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta^2 x_1} = \boxed{3.568348244}$$

3- (

Accélérer la convergence par la méthode de Steffensen

Accelerate the convergence by Steffensen's process.

$$A \quad s_1 = a_1,$$

$$B \quad z_1 = g(s_1) = \boxed{3.564413659}$$

$$C \quad z_2 = g(z_1) = \boxed{3.562757496}$$

$$s_2 = s_1 - \frac{(z_1 - s_1)^2}{z_2 - 2z_1 + s_1} = \boxed{3.561553647}$$