D7.1

mat2784

27 novembre 2009

devoir 7

Laplace nom propre

6.3 trouver la transformée de laplace de $f(t) = \cos(\omega t + \theta)$

selon une formule trigonométrique:

$\cos(\omega t + \theta) = \cos\omega t \cos\theta - \sin\omega t \sin\theta$

par la linéarité de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t+\theta)) = \mathcal{L}(\cos\omega t\cos\theta) - \mathcal{L}(\sin\omega t\sin\theta)$$
$$= \cos\theta\,\mathcal{L}(\cos\omega t) - \sin\theta\,\mathcal{L}(\sin\omega t)$$
$$= \cos\theta\,\frac{s}{s^2+\omega^2} - \sin\theta\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t+\theta)) = \frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

6.8 transformée de laplace de $f(t) = 2e^{-2t}\sin t$

$$\mathcal{L}(2e^{-2t}\sin t) = 2\mathcal{L}(e^{-2t}\sin t)$$
$$= 2\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} \qquad a=-2,\ \omega=1$$
$$= \frac{2}{(s+2)^2+1}$$

6.15 transformée inverse de laplace de $F(s) = \dfrac{4(s+1)}{s^2-16}$

$$f(t) = 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2-16}\right) = 4\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-16}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-16}\right)\right)$$
$$= 4\left(\cosh 4t + \frac{1}{4}\sinh 4t\right)$$
$$= 4\cosh 4t + \sinh 4t$$

6.32 transformée de laplace de

$$F(t)=\begin{cases} t & 0\leq t<1 \\ 1 & t\geq 1 \end{cases}$$

Heaviside

nom propre

Fonction d'Heaviside:

$$\cancel{F}f(t)=t-u(t-1)t+u(t-1)\cdot 1$$
$$=t-tu(t-1)+u(t-1)$$
$$=t-u(t-1)(t-1)$$

petite lettre pour les fonctions de t : $f(t)$

et majuscules pour les fonctions de s : $F(s)$ ou $F(S)$

$$F(s)\cancel{\mathcal{L}}=\mathcal{L}(t)-\mathcal{L}(u(t-a)\cancel{F}f(t-a))(s)$$
$$=\mathcal{L}(t)-e^{-as}\mathcal{L}(\cancel{F}f(t+a)s)$$
$$F(s)\cancel{\mathcal{L}}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\cdot\mathcal{L}(t+1)$$
$$F(s)\cancel{\mathcal{L}}=\frac{1}{s^2}-e^{-s}\cdot\frac{1}{s^2}$$
$$F(s)\cancel{\mathcal{L}}=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})$$

6.42 résoudre par transformation de laplace et tracer la courbe.

$$y''+y=\sin 3t \qquad y(0)=0 \qquad y'(0)=0$$

on pose $\mathcal{L}(y)(s)=Y(s)$

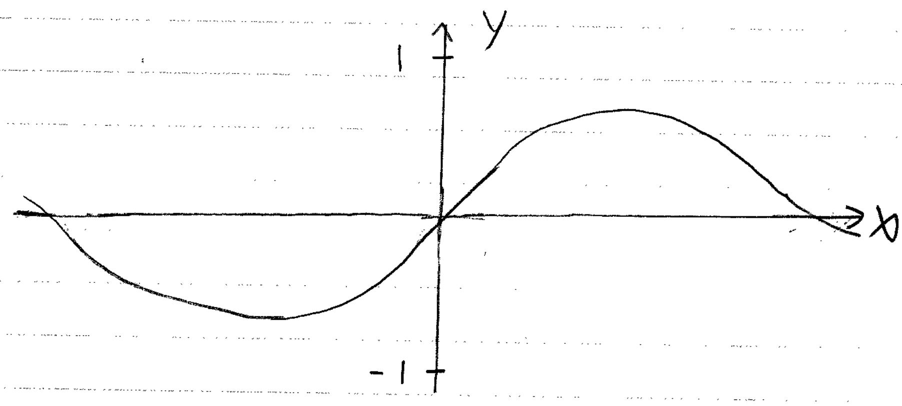
$$\mathcal{L}(y'')+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(\sin 3t)$$
$$s^2\mathcal{L}(y)-sF(y)-y'(0)+\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(\sin 3t)$$
$$s^2Y(s)-s\,\cancel{y(0)}^{0}-\cancel{y'(0)}^{0}+Y(s)=\mathcal{L}(\sin 3t)$$
$$s^2Y(s)+Y(s)=\frac{3}{s^2+3^2}$$
$$Y(s)(s^2+1)=\frac{3}{s^2+9}$$
$$Y(s)=\frac{3}{(s^2+9)(s^2+1)}=\frac{A}{(s^2+9)}+\frac{B}{s^2+1}$$

$$3 = A(s^2+1) + B(s^2+9)$$
$$3 = As^2 + A + Bs^2 + 9B$$
$$3 = (A+B)s^2 + (A+9B)$$
$$A+B=0 \Rightarrow A = -B$$
$$A+9B=3 \Rightarrow -B+9B=3 \Rightarrow 8B=3 \Rightarrow B = 3/8$$
$$A = -3/8$$

$$Y(s) = \frac{-1}{8}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

s ou s pas δ (delta)

$$y\ \cancel{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{-1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + \frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$
$$y\ \cancel{x}(t) = \frac{-1}{8}\sin(3t) + \frac{3}{8}\sin t$$
$$y\ \cancel{x}(t) = \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{8}\sin 3t$$



6.47 Résoudre par transformation de laplace et tracer la solution

$$y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t} \quad y(0)=0 \quad y'(0)=0$$

on pose $\mathcal{L}(y)(s) = Y(s)$

$$s^2\mathcal{L}(y) - s\,\cancel{y(0)}^{\,0} - \cancel{y'(0)}^{\,0} - 4(s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)}^{\,0}) + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(t^3e^{2t})$$

$$s^2\mathcal{L}(y) - 4s\mathcal{L}(y) + 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{2t}t^3)$$

$$s^2 Y(s) - 4s\,Y(s) + 4\,Y(s) = \mathcal{L}(t^3e^{2t})$$

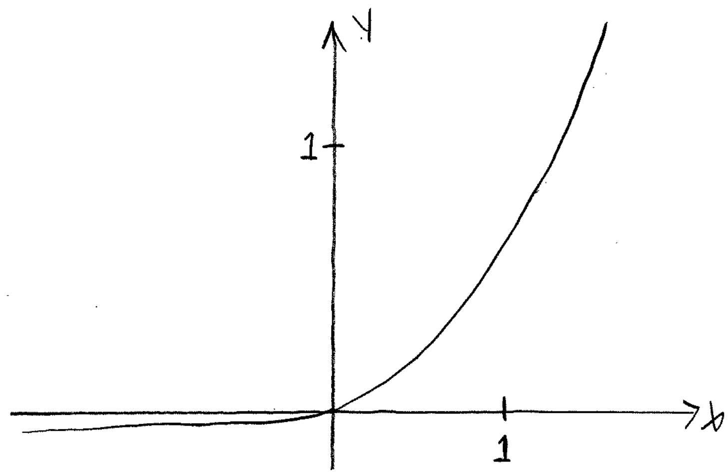
$$Y(s)(s^2 - 4s + 4) = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$Y(s)(s-2)(s-2) = \frac{6}{(s-2)^4}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s-2)^6}$$

$$y\,\cancel{y}(t) = \frac{1}{5!}\,t^5e^{2t}$$

$$y\,\cancel{y}(t) = \frac{1}{20}\,t^5e^{2t}$$



12.2 approcher à 4 décimales près la solution sur $0 \leq x \leq 1$ par la méthode d'Euler avec $h = 0.1$ et 4 pas et tracer la solution

$y' = x + \sin y \quad y(0) = 0$

$x_0 = 0 \quad x_N = 1 \quad y_0 = 0 \quad F(x, y) = x + \sin y$

$N = \dfrac{1-0}{0.1} = 10$

$x_n = x_0 + hn = 0 + 0.1n = 0.1n$

$y_{n+1} = y_n + 0.1(0 + 0.1n + \sin y_n)$ avec $y_0 = 0$

$y_{n+1} = y_n + 0.1(0.1n + \sin y_n)$ avec $y_0 = 0$

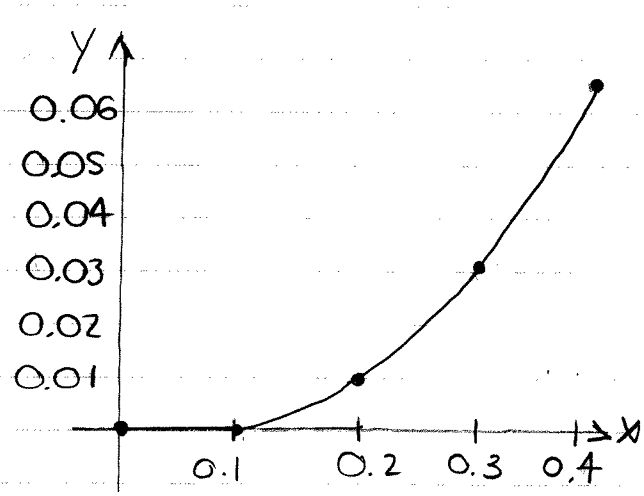
n	x_n	y_n
0	0	0
1	0.1	0
2	0.2	0.01
3	0.3	0.030999983
4	0.4	0.064099484

$x_4 = 0.1 \cdot 4 = 0.4$

$y_4 = y_3 + 0.1(0.1 \cdot 3 + \sin y_3)$

$y_4 = 0.030999983 + 0.1(0.1 \cdot 3 + \sin 0.030999983)$

$y_4 = 0.064099484$



D7.6

12.7 approcher à 4 décimales près sur $0 \leq x \leq 1$ par la méthode d'Euler améliorée avec $h = 0.1$ et tracer

Euler nom propre

$y' = x + \sin y \quad y(0) = 0$

$x_n = x_0 + hn = 0 + 0.1n = 0.1n \qquad F = x + \sin y$

$y_0^c = 0$

n	x_n	y_n^p	y_n^c
0	0	0	0
1	0.1	0	0.005
2	0.2	0.0155	0.021025
3	0.3	0.043127	0.049232
4	0.4	0.084153	0.090895

$y_3^p = 0.021025 + 0.1F(0.2, 0.021025)$

$y_3^p = 0.021025 + 0.1(0.2 + \sin 0.021025)$

$y_3^p = 0.043127$

$y_3^c = 0.021025 + 0.05(F(0.2, 0.021025) + F(0.3, 0.043127))$

$y_3^c = 0.049232$