D6.1

Mat 2784
17 novembre 200[illegible]

devoir 6

5.1 trouver l'intervalle de convergence de la série et de sa première dérivée terme à terme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-1(2n+1)}{2n+3} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}(2+1/n)}{\cancel{n}(2+3/n)}$$

$$= \frac{2}{2}$$

$$\frac{1}{R} = 1 \quad \Rightarrow R = 1$$

intervalle de convergence: $-1 < x < 1$

$$F'(x) = \frac{(-1)^n n x^{n-1}}{2n+1} = \frac{(-1)^n n x^n}{x(2n+1)} \qquad a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{x(2n+1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{x(2n+3)}$$

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}(n+1)}{\cancel{x}(2n+3)} \quad \frac{\cancel{x}(2n+1)}{\cancel{(-1)^n} \cdot n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+2n+1}{2n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}$$

D 6.2

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}(2 + 3/n + 1/n^2)}{\cancel{n^2}(2 + 3/n)}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Longrightarrow R' = 1$$

intervalle de convergence : $-1 < x < 1$

5.5 trouver l'intervalle de convergence de la série et de sa 1ère dérivée terme à terme

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{4^n} x^n$$

$$a_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{4^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)(n)(n-1)}{4^{n+1}}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}}{4^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{4^n}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2)} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{4(n-2)} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left| \frac{\cancel{n}(1+1/n)}{\cancel{n}(1-2/n)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \frac{1+1/n}{1-2/n}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{4} \qquad R=4$$

intervalle de convergence: $-4<x<4$

$$F'(x) = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{4^n} x^{n-1} = \frac{n^2(n-1)(n-2)x^n}{x4^n}$$

$$a_n = \frac{n^2(n-1)(n-2)}{x\cdot 4^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n)(n-1)}{x\cdot 4^{n+1}}$$

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2\cancel{(n)}\cancel{(n-1)}}{\cancel{x}\cdot 4^{\cancel{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{4^n}}{n^{\cancel{2}}\cancel{(n-1)}(n-2)} \right|$$

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{4n(n-2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{4(n^2-2n)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{\cancel{n^2}(1+2/n+1/n^2)}{\cancel{n^2}(1-2/n)} \right|$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{4} \qquad R'=4$$

intervalle de convergence: $-4<x<4$

5.11 trouver la solution série de l'équation différentielle

$y'' + x^2 y' + xy = 0$

posons: $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$
$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$
$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots$

$$\left.\begin{matrix} y'' \\ x^2 y' \\ xy \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 \\ a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 3a_3 x^4 \\ a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 \end{matrix}\right.$$

somme nulle:
$0 = 2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + a_1 + a_1)x^2 + (20a_5 + 2a_2 + a_2)x^3 + (30a_6 + 3a_3 + a_3)x^4 + \dots$
$0 = 2a_2 + (6a_3 + a_0)x + (12a_4 + 2a_1)x^2 + (20a_5 + 3a_2)x^3 + (30a_6 + 4a_3)x^4 + \dots$

les coefficients sont nuls
$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$
$6a_3 + a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = 1/6 a_0$ * a_0 indéterminé
$12a_4 + 2a_1 = 0 \Rightarrow a_4 = 1/6 a_1$ * a_1 indéterminé
$20a_5 + 3a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = 0$
$30a_6 + 4a_3 = 0 \Rightarrow a_6 = 2/15 a_3 = 2/90 a_0$

on a deux solutions (a_0 et a_1 indéterminés)
$y_1(x) = a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + \dots$
$y_1(x) = \frac{a_0}{6}\left[6 + x^3 + \frac{x^6}{15} + \dots\right]$
$y_2(x) = a_1 x + a_4 x^4 + a_7 x^7 + \dots$
$y_2(x) = \frac{a_1}{6}\left[6x + x^4 + \frac{5}{42}x^7 + \dots\right]$

DQ.5

solution générale:

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

$$y(x) = \frac{a_0}{6}\left[6 + x^3 + \frac{x^6}{15} + \dots\right] + \frac{a_1}{6}\left[6x + x^4 + \frac{5}{42}x^7 + \dots\right]$$

5.16 trouver la solution en série de l'équation différentielle

$$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$
$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$
$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + 30a_6 x^4 + \ldots$$

① $y''(x) = \cancel{2a_2} + \cancel{6a_3 x} + \cancel{12a_4 x^2} + \cancel{20a_5 x^3} + \cancel{30a_6 x^4} + \ldots$

② $(-2x+2)y'(x) = \cancel{-2a_1 x} + \cancel{2a_1} \cancel{-4a_2 x^2} + \cancel{4a_2 x} \cancel{-6a_3 x^3} + \cancel{6a_3 x^2}$
$\cancel{-8a_4 x^4} + \cancel{8a_4 x^3} \cancel{-10a_5 x^5} + \cancel{10a_5 x^4} + \ldots$

③ $2y(x) = \cancel{2a_0} + 2a_1 x + \cancel{2a_2 x^2} + \cancel{2a_3 x^3} + \cancel{2a_4 x^4} + 2a_5 x^5 + \ldots$

① + ② + ③

$$0 = (2a_2 + 2a_1 + 2a_0) + (6a_3 - 2a_1 + 4a_2 + 2a_1)x$$
$$+ (12a_4 - 4a_2 + 6a_3 + 2a_2)x^2 + (20a_5 - 6a_3 + 8a_4 + 2a_3)x^3$$
$$+ (30a_6 - 8a_4 + 10a_5 + 2a_4)x^4$$
$$+ (42a_7 - 10a_5 + 12a_6 + 2a_5)x^5$$

coefficients sont égaux à 0:

x^0: $2a_2 + 2a_1 + 2a_0 = 0$ $\quad$ a_0 et a_1 indéterminés.

$a_2 = -a_1 - a_0$

x: $6a_3 + 4a_2 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3}(a_0 + a_1)$

x^2: $12a_4 + 6a_3 - 2a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{6} a_2 - \frac{1}{2} a_3$

$a_4 = \frac{1}{6}(-a_1 - a_0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(a_0 + a_1) = -\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_0$

x^3: $20a_5 + 8a_4 - 4a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{5} a_3 - \frac{2}{5} a_4$

$a_5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}(a_0 + a_1) - \frac{2}{5} \cdot -\frac{1}{2}(a_1 + a_0) = \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{3} a_1$

solution générale:

$$y(x) = a_0 + a_1 x - (a_0 + a_1)x^2 + \frac{2}{3}(a_0 + a_1)x^3 - \frac{1}{2}(a_0 + a_1)x^4$$
$$+ \frac{1}{3}(a_0 + a_1)x^5 + \ldots$$

$$y(x) = a_0\left[1 - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \ldots\right]$$
$$+ a_1\left[x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \ldots\right]$$

5.17

$$\sin\theta \frac{d^2y}{d\theta^2} + \cos\theta \frac{dy}{d\theta} + n(n+1)\sin\theta\, y = 0$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{d\theta^2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}$$

$x = \cos(x)$, $\quad \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$, $\quad \frac{d^2x}{d\theta^2} = -\cos x$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = y''(\sin^2\theta) - y'\cos\theta = y''(1-\cos^2\theta) - y'\cos\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -y'\sin\theta$$

$$\cancel{\sin\theta}\left[y''(1-\cos^2\theta) - y'\cos\theta\right] + \cos(-y'\cancel{\sin\theta}) + n(n+1)\cancel{\sin\theta}\, y = 0$$

$$y''(1-\cos^2\theta) - y'\cos\theta - y'\cos\theta + n(n+1)y = 0$$

$$y''(1-x^2) - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

5.22

$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\, P_n(x) - n P_{n-1}(x)$

Pour P_4, $n=3$

$$(3+1)P_4(0.7) = (2(3)+1)(0.7)\,P_3(0.7) - P_2(0.7)(3)$$
$$4P_4(0.7) = 4.9\,P_3(0.7) - P_2(0.7)(3)$$
$$= 4.9 \cdot \frac{1}{2}(5\cdot 0.7^3 - 3(0.7)) - \frac{3}{2}\cdot(3(0.7)^2 - 1)$$

$$4P_4(0.7) = -0.94325 \quad -0.705$$

$$P_4(0.7) = -0.41206$$

$$P_4(0.7) = \frac{1}{8}(35(0.7)^4 - 30(0.7)^2 + 3)$$

$$= -0.41206$$

les 2 réponses sont égales.

10.6 évaluer $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$ par la méthode de simpson (composée) avec $n=2m=10$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$

$x_0 = 0 \quad x_1 = 0.1 \quad x_2 = 0.2$
$x_3 = 0.3 \quad x_4 = 0.4 \quad x_5 = 0.5$
$x_6 = 0.6 \quad x_7 = 0.7 \quad x_8 = 0.8$
$x_9 = 0.9 \quad x_{10} = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{1}{30}\left(1 + \frac{4}{1.02} + \frac{2}{1.08} + \frac{4}{1.18} + \frac{2}{1.32} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.72} + \frac{4}{1.98} + \frac{2}{2,28} + \frac{4}{2.62} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2} = 0.675510192$$

~~t02~~
06.10

MAT2784 A
2009.11.17

Skander Soussi
4660021

Devoir # 6

10.7 Approcher l'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ à 10^{-4} près par la méthode des trapèzes (composée).

Puisque $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ et $f''(x) = \frac{12x^4 - 6x}{(1+x^3)^3}$

Alors $0 \leq f''(x) \leq \frac{6}{64}$

À l'aide de $f'''(x)$, nous trouvons que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = f''(0.402\,387) = 1.737\,507$$

Donc $|\epsilon_T| \leq \frac{h^2}{12}(1.737\,507)$, où $\epsilon_T = 10^{-4}$

C'est-à-dire : $h = 0.026\,280$

On prend $h^{-1} = 38.05 < n = 39$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

$I \approx \frac{1}{2}h[0 + 2f(h) + 2f(2h) + \cdots + 2f(38h) + 2f(39h)]$.

$I \approx 0.8356$