D5.1

mat2784
10 novembre 2009

devoir 5

3.34 Résoudre les équations différentielle

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$$

$Ly: y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$

$R(x)=\frac{e^x}{x}=e^x\cdot x^{-1}$

$R'(x)=e^x\cdot -x^{-2}+e^x\cdot x^{-1}=-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x}$

$R''(x)=\frac{2e^x}{x^3}-\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x}$

dimension infinie

$\Rightarrow$ méthode de variation des paramètres

équation homogène $Ly=0$

polynôme caractéristique :

$\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=1$

solution générale $y_h(x)$ de $Ly=0$

$y_h(x)=c_1e^x+c_2xe^x$

on cherche une solution particulière ~~à~~ de la forme

$y_p(x)=c_1(x)e^x+c_2(x)xe^x$

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x/x \end{bmatrix}$$

$L_2 - L_1$

$$\sim \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x/x \end{bmatrix}$$

$e^x \cdot c_1' + xe^x c_2' = 0$ ②

$\cancel{e^x} c_2' = \frac{\cancel{e^x}}{x} \qquad c_2' = \frac{1}{x}$ ①

① → ② $e^x \cdot c_1' + \frac{\cancel{x}e^x}{\cancel{x}} = 0$

$e^x(c_1' + 1) = 0$

$c_1' = -1$

$c_1 = \int c_1' = \int -1 = -x$

$c_2 = \int c_2' = \int 1/x = \ln x$

$y_p(x) = -xe^x + x \ln x e^x$

solution générale de l'équation non-homogène :

$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x - xe^x + x \ln x e^x$

4.3 résoudre le système d'équations différentielles $y' = Ay$ pour A donné

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} y$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 \cdot 4 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda + 3)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -3$$

vecteur propre pour λ_1:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-2U_1 + U_2 = 0$ on pose $U_1 = 1$

$4U_1 - 2U_2 = 0$ $U_2 = 2$

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vecteur propre pour λ_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$2V_1 + V_2 = 0$ on pose $V_1 = -1$

$4V_1 + 2V_2 = 0$ $V_2 = 2$

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = e^{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y_2 = e^{-3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

solution générale: $y(x) = C_1 e^{x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3x} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

4.5 Résoudre le système d'équations différentielles $y' = Ay$ pour A donné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} y$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)+4$$

$$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4$$

$$= \underline{\lambda^2 - 2\lambda + 5}$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i \qquad \lambda_2 = 1 - 2i$$

vecteur propre pour λ_1:

$$\begin{bmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-2iU_1 + U_2 = 0$ on pose $U_1 = 1$

$-4U_1 - 2iU_2 = 0$ $U_2 = +2i$

$-4 + 4 \cdot i^2 = 0$ ✓

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

vecteur propre pour λ_2

$$\begin{bmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$2iV_1 + V_2 = 0$ on pose $V_1 = -1$

$-4V_1 + 2iV_2 = 0$ $V_2 = 2i$

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$U(x) = e^{(1+2i)x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = e^x e^{2ix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix} = e^x(\cos 2x + i \sin 2x) \begin{bmatrix} 1 \\ 2i \end{bmatrix}$$

$$U(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^x(\cos 2x + i\sin 2x) + 2i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^x(\cos 2x + i\sin 2x)$$

$$U(x) = e^x\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2x - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2x\right)$$
$$+ ie^x\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin 2x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2x\right)$$

$$U(x) = e^x\begin{bmatrix} \cos 2x \\ -2\sin 2x \end{bmatrix} + ie^x\begin{bmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$y_1(x) = e^x\begin{bmatrix} \cos 2x \\ -2\sin 2x \end{bmatrix}$$
$$y_2(x) = e^x\begin{bmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{bmatrix}$$

solution générale:

$$y(x) = C_1e^x\begin{bmatrix} \cos 2x \\ -2\sin 2x \end{bmatrix} + C_2e^x\begin{bmatrix} \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{bmatrix}$$

4.6 Résoudre le système d'équations différentielle $y' = Ay + F(x)$ pour A et $F(x)$ donnés

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F(x) = \begin{bmatrix} 2e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

solution générale du système homogène

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(-\lambda) - (-2)$$

$$= +3\lambda + \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+1)$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$$

vecteur propre pour λ_1:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-U_1 - 2U_2 = 0$ on pose $U_1 = -2$

$U_1 + 2U_2 = 0$ $U_2 = 1$

$$U = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vecteur propre pour λ_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$-2V_1 - 2V_2 = 0$ on pose $V_1 = 1$

$V_1 + V_2 = 0$ $V_2 = -1$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$F(x) = \begin{bmatrix} 2e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix} = e^{-x} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y_p(x)$ et $y_h(x)$ ont une partie commune $\Rightarrow$
$y_p(x) = \vec{a} x e^{-x} + \vec{b} e^{-x}$

on dérive:
$y_p'(x) = \vec{a} e^{-x} - \vec{a} x e^{-x} - \vec{b} e^{-x}$

$y' = Ay + F(x)$

$\vec{a} \cancel{e^{-x}} - \vec{a} x \cancel{e^{-x}} - \vec{b} \cancel{e^{-x}} = A(\vec{a} x \cancel{e^{-x}} + \vec{b} \cancel{e^{-x}}) + \cancel{e^{-x}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{a} - \vec{a} x - \vec{b} = A(\vec{a} x + \vec{b}) + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

coefficients de x doiventêtre égaux
$-\vec{a} x = A \vec{a} \cancel{x}$
$-\vec{a} = A\vec{a}$
$\lambda x = Ax \qquad x = \vec{a}$
$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{a}$ est vecteur propre de $\lambda = -1$
$\vec{a} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} \qquad a = ?$

coefficients constants doivent être égaux
$\vec{a} - \vec{b} = A\vec{b} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{a} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = A\vec{b} + \vec{b}$

$\begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = A\vec{b} + I\vec{b}$

$\begin{bmatrix} a-2 \\ -a+1 \end{bmatrix} = (A+I)\vec{b}$

$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 \\ -a+1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \cdot \frac{-1}{2} = L_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-2}{-2} \\ -a+1 \end{bmatrix} \quad L_2 - L_1 = L_2$$

$$-a+1-\frac{a-2}{-2} = \frac{2a-\cancel{2}}{\cancel{-2}} \; \frac{-a-\cancel{2}}{\cancel{-2}} = \frac{a}{-2} = \frac{-a}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-2}{-2} \\ -a/2 \end{bmatrix}$$

① $b_1 + b_2 = \dfrac{a-2}{-2}$

② $\dfrac{-a}{2} = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b_1 + b_2 = \dfrac{0-2}{-2} \qquad b_1 + b_2 = 1$

on pose $b_1 = 1 \Rightarrow b_2 = 0$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

solution de la partie non-homogène

$$y_p(x) = \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} xe^{-x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-x}$$

solution générale de l'équation non-homogène

$$y(x) = c_1 e^{-2x}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.11 Résoudre le système d'équations différentielles $y' = Ay$ avec $y_0(0) = y_0$ pour A et y_0 donnés

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$y' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} y$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) + 3$$
$$= 5 - 6\lambda + \lambda^2 + 3$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8$$
$$= (\lambda - 4)(\lambda - 2)$$

$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2$

vecteur propre pour λ_1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0$$

$U_1 - U_2 = 0$ on pose $U_1 = 1$

$3U_1 - 3U_2 = 0$ $U_2 = 1$

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vecteur propre pour λ_2

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$3V_1 - V_2 = 0$ on pose $V_1 = 1$

$3V_1 - V_2 = 0$ $V_2 = 3$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

solution générale:

$$y(x) = C_1 e^{4x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

on pose la condition:

$$y_0(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$C_1 + C_2 = 2$ $\qquad C_1 = 2 - C_2$ ①

$C_1 + 3C_2 = -1$ ②

① → ② $\quad 2 - C_2 + 3C_2 = -1$

$2C_2 = -3 \quad C_2 = -3/2$

$C_1 = 2 - C_2 = 4/2 - -3/2 = 7/2$

solution particulière:

$$y(x) = \frac{7}{2} e^{4x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

9.11 Approcher F(0.05) par un polynôme de Gregory-Newton prograde (avant) de degré 4 qui interpole les données

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$F(x)$	1.000000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0.0	1.00000				
			0.22140			
1	0.2	1.22140		0.04902		
			0.27042		0.01086	
2	0.4	1.49182		0.05988		0.00238
			0.33030		0.01324	
3	0.6	1.82212		0.07312		
			0.40342			
4	0.8	2.22554				

on pose $R = \frac{x - 0.0}{0.2} = \frac{x}{0.2}$

$x_i = x_0 + ih$

$x_1 - x_0 = 1 \cdot h$

$0.2 - 0.0 = h \Rightarrow h = 0.2$

$$p_4(R) = 1.00000 + R \cdot 0.22140 + \frac{R(R-1)}{2} \cdot 0.04902 + \frac{R(R-1)(R-2)}{6} \cdot 0.01086 + \frac{R(R-1)(R-2)(R-3)}{24} \cdot 0.00238$$

$x = 0.05 \Rightarrow R = 0.25$

$p_4(0.25) = 1 + 0.05535 - 0.004596 + 0.0005939 - 0.00008948$

$p_4(0.25) = 1.05126$

$p_4(0.25) = F(0.05) = 1.05126$

9.13 Construire un polynôme d'Hermite de degré 3 qui interpole les données

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

z	$f(z)$	1ères d.d.	2e d.d.	3e d.d
8.3	17.56492			
		3.116256		
8.3	17.56492		0.05948	
		3.13410		-0.002023
8.6	18.50515		0.058873	
		3.151762		
8.6	18.50515			

$$p(x) = 17.56492 + (x-8.3)\cdot 3.116256$$
$$+ (x-8.3)^2 \cdot 0.05948 + (x-8.3)^2(x-8.6)\cdot(-0.002023)$$

10.2 soit $F(x) = x^2 \ln x$. utiliser l'extrapolation de Richardson avec $h=0.4$, $h/2$ et $h/4$ pour affiner la valeur de $F'(1,4)$ obtenue par la différence centrée (DN.5)

on doit trouver

$N_1(h)$

$N_1(h/2)$ $N_2(h)$

$N_1(h/4)$ $N_2(h/2)$ $N_3(h)$

$$N_1(0.4) = N(0.4) = \frac{1}{2h}(F(x_0+h) - F(x_0-h))$$

$$N_1(0.4) = \frac{1}{0.8}(1.904429 - 0) = 2.380536$$

$$N_1(0.2) = \frac{1}{0.4}(1.203209 - 0.262543) = 2.351665$$

$$N_1(0.1) = \frac{1}{0.2}(0.912296 - 0.443396) = 2.3445$$

$$N_2(0.4) = N_1(0.2) + \frac{N_1(0.2) - N_1(0.4)}{3} = 2.342041$$

$$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \frac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = 2.342112$$

$$N_3(0.4) = N_2(0.2) + \frac{N_2(0.2) - N_2(0.1)}{15} = 2.342117$$

$N_1(0.4) = 2.380536$

$N_1(0.2) = 2.351665$ $N_2(0.4) = 2.342041$

$N_1(0.1) = 2.3445$ $N_2(0.2) = 2.342112$ $N_3(0.4) = 2.342117$