D3.1

MAT2784 A
2009.10.09

Devoir #3

2.3. Résoudre l'équation différentielle.

$$y'' - 9y' + 20y = 0$$

Étant donné qu'elle est linéaire d'ordre 2,
Posons $y = e^{\lambda x}$,
donc $y' = \lambda e^{\lambda x}$
et $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

En substituant : $\lambda^2 e^{\lambda x} - 9\lambda e^{\lambda x} + 20 e^{\lambda x} = 0$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0$$

Vu que $e^{\lambda x}$ ne peut être égale à zéro, résolvons pour l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad , \quad \lambda_2 = 5$$

Les deux valeurs propres sont réelles et distincts.
La solution générale est donc de la forme suivante : $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
où $y_1 = c_1 e^{\lambda_1 x}$ et $y_2 = c_2 e^{\lambda_2 x}$

Donc la solution générale est :

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{5x}$$

D3. 2

MAT2784 A

2009. 10. 09.

Devoir#3

2.7 Résoudre le problème à valeur initiale $y(x_0) = y_0$ et tracer la solution $y(x)$ pour $x \geq x_0$

$$y'' - 2y' + 3y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 3$$

L'equation est linéaire d'ordre 2, donc

$$y = e^{\lambda x} \ , \ y' = \lambda e^{\lambda x} \ , \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Par substitution:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 2\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 3) = 0$$

Vu que $e^{\lambda x} \neq 0$, solutionnons pour l'équation caracteristique.

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (4)(1)(3)}}{2(1)}$$

$$= 1 \pm i\sqrt{2}$$

En passant par l'identite d'Euler, nous obtenons une solution generale de cette forme:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

où α et β sont definies par $\lambda = \alpha \pm i\beta$.

Donc la solution generale est:

$$y(x) = c_1 e^{x}\cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{x}\sin(\sqrt{2}x)$$

Il ne rest qu'à trouver les valeurs des deux constantes c_1 et c_2.

D 3.3

MAT2784 A
2009.10.09

Devoir#3

2.7 ~~contd.~~ suite

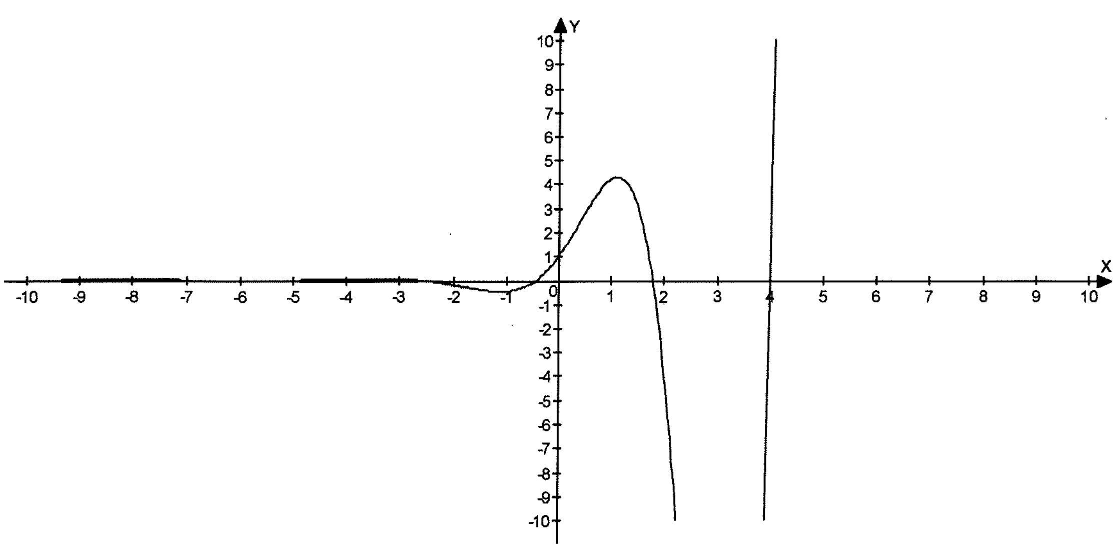
$$y(x) = c_1 e^x \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^x \sin(\sqrt{2}x).$$
$$y'(x) = c_1 e^x \cos(\sqrt{2}x) - c_1 e^x \sin(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}) + c_2 e^x \sin(\sqrt{2}x) + c_2 e^x \cos(\sqrt{2}x)(\sqrt{2})$$

À l'aide des valeurs données $y(0)=1$ et $y'(0)=0$

$$y(0) = c_1 e^0 \cos(0) + c_2 e^0 \sin(0) = 1$$
$$= c_1 = 1$$
$$y'(0) = c_1 e^0 \cos(0) - c_1 e^0 \sin(0)(\sqrt{2}) + c_2 e^0 \sin(0) + c_2 e^0 \cos(0)(\sqrt{2}) = 3$$
$$= c_1 + c_2(\sqrt{2}) = 3$$
$$\Rightarrow \quad c_2 = (3 - c_1)(\sqrt{2})^{-1}$$
$$c_2 = (3-1)(\sqrt{2})^{-1}$$
$$c_2 = (2^1)(2^{-\frac{1}{2}})$$
$$c_2 = 2^{\frac{1}{2}}$$
$$c_2 = \sqrt{2}$$

Donc la solution unique est:

$$y(x) = e^x \cos(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\, e^x \sin(\sqrt{2}x)$$



MAT2784 A
2009.10.09.

Devoir#3

2.9 Trouver l'amplitude et la periode de l'oscillateur non amorti

$$y'' + 4y = 0 \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2$$

L'equation caracteristique de cette equation, en posant $y = e^{\lambda x}$, est:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = \pm i2$$

Nous trouvons donc la solution generale:

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x$$

Trouvons la solution unique à l'aide des valeurs $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

$$y(0) = c_1 \cancel{\cos(0)}^{1} + c_2 \cancel{\sin(0)}^{0} = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = 1$$

$$y'(0) = -2(1) \cancel{\sin(0)}^{0} + 2c_2 \cancel{\cos(0)}^{1} = 2$$

$$\Rightarrow c_2 = 1$$

La solution unique est

$$y(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

L'amplitude est donne par

$$A = \sqrt{c_1 + c_2} \Rightarrow A = \sqrt{2}$$

La periode est donnee par

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{4/1}} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow P = \pi$$

03.5

MAT2784 A
2009.10.09.

Devoir #3

2.14. ~~Resoudre~~ l'equation différentielles d'Euler-Cauchy.

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

Les équations d'Euler-Cauchy se résoude en posant $y = x^m$ si $x > 0$.
~~Donc~~ $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$
En substituant ;

$$x^2(m(m-1)x^{m-2}) - x(mx^{m-1}) + x^m = 0$$
$$\cancel{x^2x^{-2}}x^m(m^2-m) - \cancel{xx^{-1}}x^m m + x^m = 0$$
$$x^m(m^2-m) - x^m m + x^m = 0$$
$$x^m(m^2-m-m+1) = 0$$
$$m^2 - 2m + 1 = 0 \quad , \quad x \neq 0$$

En résolvant cette équation, nous pouvons dès lors appliqué la solution générale respective.

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$$
$$(m-1)(m-1) = 0$$
$$(m-1)^2 = 0$$

Étant donné que les valeurs propre sont réelles et égales : $m = m_1 = m_2 = 1$, la solution est la suivante.

$$y(x) = c_1 x + c_2(\ln x)x$$

MAT2784 A
2009.10.09

Devoir #3

2.18 Resoudre le problèmes à valeur initiale $y(x_0) = y_0$ et tracer la solution $y(x)$ pour $x \geq x_0$

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0 \quad ; \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = -5$$

On resoud en suivant la méthode de résolution des équations d'Euler-Cauchy.

- On pose : $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$

- On substitue :

$$x^2(m(m-1))x^{m-2} + 5x(mx^{m-1}) + 3x^m = 0$$

$$x^m(m(m-1) + 5m + 3) = 0$$

- On résoud l'équation caractéristique

$$m^2 + 4m + 3 = 0$$

$$(m+1)(m+3) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = -1 \quad , \quad m_2 = -3$$

- La solution générale lorsque les racines sont réelles et différentes est :

$$y(x) = c_1x^{-1} + c_2x^{-3}$$

$$\Rightarrow y'(x) = -c_1x^{-2} - 3c_2x^{-4}$$

D3.7

MAT2784 A

2009.10.09

Devoir #3

2.18 ~~cont'd.~~ suite

- Il ne reste qu'à trouver les constantes.

$$y(1) = c_1(1)^{-1} + c_2(1)^{-3} = 1$$

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad ①$$

$$y'(1) = -c_1(1)^{-2} - 3c_2(1)^{-4} = -5$$

$$-c_1 - 3c_2 = -5 \qquad ②$$

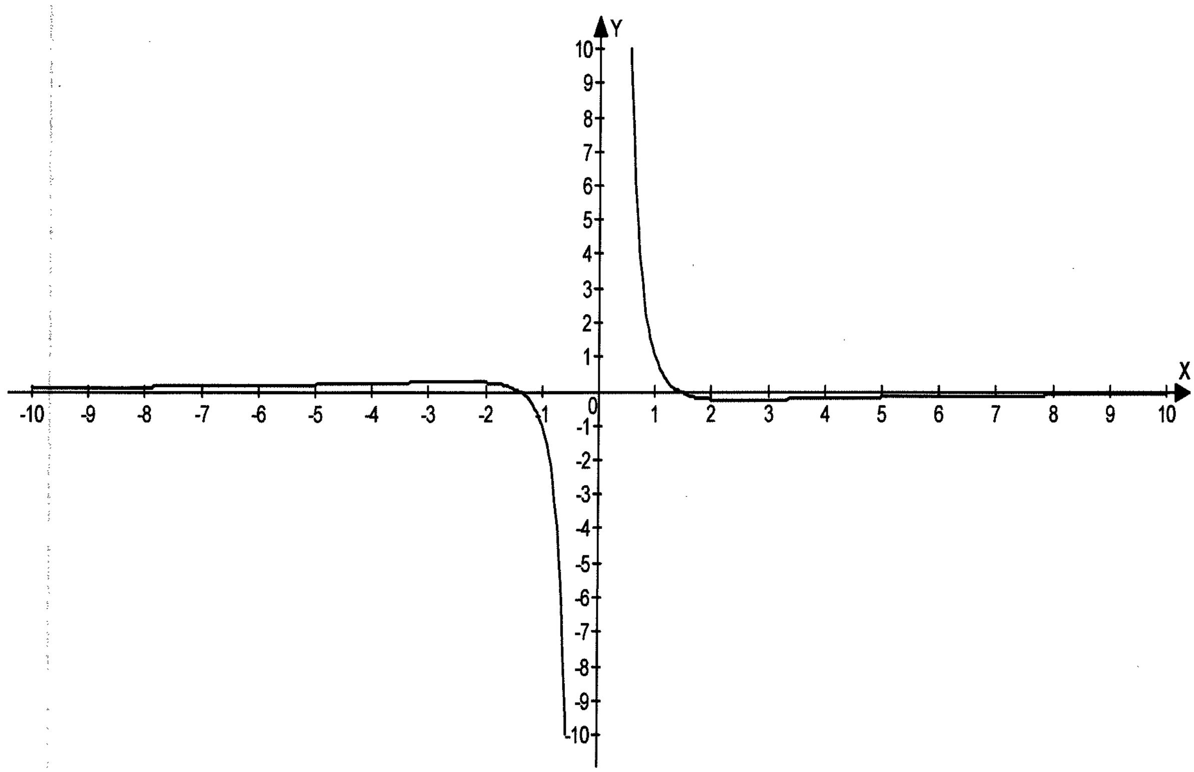
$$①+②: \qquad -2c_2 = -4$$

$$\Rightarrow c_2 = 2$$

$$\Rightarrow c_1 = -1$$

- La solution unique :

$$y(x) = -x^{-1} + 2x^{-3}$$



D3. 8

MAT2784 A

2009.10.09

Devoir #3

8.16 Soit la récurrence de point fixe de 8.5:

$$x_{n+1} = \sqrt{2}\, x_n + 3.$$

Compléter le tableau.

n	x_n	Δx_n	$\Delta^2 x_n$
1	$x_1 = 3.500000$		
		$\Delta x_1 = -0.337722$	
2	$x_2 = 3.162277$		$\Delta^2 x_1 = 0.229058$
		$\Delta x_2 = -0.108664$	
3.	$x_3 = 3.053613$		

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= x_2 - x_1 \\
&= 3.162277 - 3.500000 \\
&= -0.337722 \\
\Delta x_2 &= x_3 - x_2 \\
&= 3.053613 - 3.162277 \\
&= -0.108664. \\
\Delta^2 x_1 &= x_3 - 2x_2 + x_1 \\
&= 3.053613 - 2(3.162277) + 3.500000 \\
&= 0.229058
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= x_1 - \frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta^2 x_1} \\
&= (3.500000) - \frac{(-0.337722)^2}{(0.229058)} \\
&= 3.002063
\end{aligned}$$

D3. 9

MAT 2784 A
2009.10.09.

Devoir #8

8.17 Appliquer la methode de Steffonsen au resultat de l'exercice 8.9. Trouver l'ordre de convergence de la methode. ($x_{n+1} = g(x_n) = 1 + \sin^2 x_n$)

8.9.

$x_0 = 1.500\,000$
$x_1 = 1.994\,996$
$x_2 = 1.830\,592$
$x_3 = 1.934\,010$
$x_4 = 1.873\,775$
$x_5 = 1.910\,978$
$\vdots$
$p = 1.897194$

Note: La methode sera appliquée à partir de $x_0 = 1.500\,000$, et non à partir de $x_5 = 1.910978$.

Algorithme:

$S_0 = x_0$
$z_1 = g(S_n)$
$z_2 = g(z_1)$
$$S_{n+1} = S_n - \frac{(z_1 - S_n)^2}{(z_2 - 2z_1 + S_n)}$$

Méthode de Steffensen:

$S_0 = x_0 = 1.500\,000$

$z_{01} = g(S_0) = 1 + \sin^2(1.500\,000) = 1.994\,996$

$z_{02} = g(z_{01}) = 1 + \sin^2(1.994\,996) = 1.830\,592$

$S_1 = 1.871582 \Rightarrow z_{11} = 1.912223$
$z_{12} = 1.887\,887$

$S_2 = 1.897\,002 \Rightarrow z_{21} = 1.897\,311$
$z_{22} = 1.897\,123$

$S_3 = 1.897\,194 \Rightarrow z_{31} = 1.897194^*$
$z_{32} = 1.897194^*$

$S_4 = 1.897194 \Rightarrow z_{41} = 1.897\,194^*$
$\Rightarrow z_{42} = 1.897194^*$

S_5 est indéfini : division par zero!
↳ S_4, z_{41} et z_{42} sont identiques.

*Note : La methode à été appliquée avec au moins 9 decimales.

MAT2784 A
2009.10.09

Devoir #3.

8.17 cont'd.

L'ordre de convergence est déterminé par la première dérivée non nulle.

$$g(x) = 1 + \sin^2 x$$
$$\Rightarrow g'(x) = 2\sin x \cos x$$
$$g'(p) = 2\sin p \cos p = -0.607409 \neq 0$$

Donc l'ordre de convergence de la récurrence est de 1.

Il est dit (§8.6 P163) que le processus de Steffensen transforme une récurrence d'ordre 1 en une récurrence d'ordre 2.

Donc l'ordre de convergence est 2.