MAT2784 A
2009.10.02

SOLUTIONS

Devoir #2

1.26 Résoudre l'équation différentielle

$$(x^2-2y)dx + xdy = 0$$

$M(x,y) = x^2-2y$ $\quad N(x,y) = x$

$M_y = -2$ $\quad N_x = 1$

$\Rightarrow M_y \neq N_x$, equation non-exact.

Nous cherchons un facteur d'intégration pour rendre l'équation exact.

$$\frac{M_y - N_x}{N(x,y)} = \frac{-2-1}{x} \quad ; f^n \text{ de } x \text{ seulement.}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{-3\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|^{-3}} = x^{-3}.$$

$$\mu(x) M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

$$x^{-3}(x^2-2y)dx + x^{-3}(x)dy = 0$$

$$(x^{-1}-2yx^{-3})dx + x^{-2}dy$$

$\tilde{M}(x,y) = x^{-1}-2yx^{-3}$; $\quad \tilde{N}(x,y) = x^{-2}$

$\tilde{M}_y = -2x^{-3}$ $\quad \tilde{N}_x = -2x^{-3}$

$\Rightarrow \tilde{M}_y = \tilde{N}_x$, equation exact.

$$u(x,y) = \int \tilde{N}(x,y)\,dy + T(x) = C$$

$$= \int x^{-2}dy + T(x)$$

$$= yx^{-2} + T(x)$$

$$u_x(x,y) = -2yx^{-3} + T'(x)$$

$$\tilde{M}(x,y) = -2yx^{-3} + x^{-1}$$

$$\Rightarrow \int T'(x) = \int x^{-1}dx$$

$$T(x) = \ln|x|$$

Sol. générale : $\dfrac{y}{x^2} + \ln|x| = C$

MAT 2784 A

2009.10.02

D2.2

Devoir #2

1.29 Résoudre l'équation différentielle.

$$(1-xy)y' + y^2 + 3xy^3 = 0$$
$$(y^2 + 3xy^3)\,dx + (1-xy)\,dy = 0$$
$$M(x,y) = y^2 + 3xy^3 \quad ; \quad N(x,y) = 1-xy$$
$$M_y = 2y + 9xy^2 \quad ; \quad N_x = -y$$
$\Rightarrow M_y \neq N_x$, l'équation n'est pas exacte.

Cherchons un facteur d'intégration

$$\frac{M_y - N_x}{M(x,y)} = \frac{2y + 9xy^2 - (-y)}{y^2 + 3xy^3}$$
$$= \frac{3(y + 3xy^2)}{y(y+3xy^2)}$$
$$= 3y^{-1} \quad ; \quad f^{n} \text{ de } y \text{ seulement}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{-\int g(y)\,dy}$$
$$= e^{-3\int \frac{1}{y}\,dy}$$
$$= e^{\ln|y|^{-3}}$$
$$= y^{-3}$$

Multiplions l'équation avec le facteur d'intégration.

$$\mu(y)M(x,y)\,dx + \mu(y)N(x,y)\,dy = 0$$
$$y^{-3}(y^2 + 3xy^3)\,dx + y^{-3}(1-xy)\,dy = 0$$
$$(y^{-1} + 3x)\,dx + (y^{-3} - xy^{-2})\,dy = 0$$
$$\tilde{M}(x,y) = y^{-1} + 3x \quad ; \quad \tilde{N}(x,y) = y^{-3} - xy^{-2}$$
$$\tilde{M}_y = -y^{-2} \quad ; \quad \tilde{N}_x = -y^{-2}$$
$\Rightarrow \tilde{M}_y = \tilde{N}_x$, équation exacte

D 2 3

MAT 2784 A
2009. 10. 02.

Devoir # 2

1.29 cont'd.

Nous cherchons $u(x,y)$ tel que

$$u(x,y) = \int \tilde{N}(x,y)\,dy + T(x) = c$$
$$= \int (y^{-3} - xy^{-2})\,dy + T(x)$$
$$= \int y^{-3}dy - x\int y^{-2}dy + T(x)$$
$$= -\frac{1}{2}y^{-2} + xy^{-1} + T(x)$$
$$u_x(x,y) = y^{-1} + T'(x)$$
$$M(x,y) = y^{-1} + 3x.$$
$$\Rightarrow \int T'(x) = \int 3x\,dx$$
$$T(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}y^{-2} + xy^{-1} + \frac{3}{2}x^2 = c.$$

Solution generale:

$$3x^2y^2 + 2xy - 1 = 2cy^2$$

MAT 2784 A
2009.10.02

Devoir #2

1.32 Résoudre l'équation différentielle

$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y\, dy = 0$$

$M(x,y) = x + \sin x + \sin y$; $N(x,y) = \cos y$

$M_y = \cos y$ $\qquad$ $N_x = 0$

$\Rightarrow M_y \neq N_x$, équation non-exacte

Cherchons un facteur d'intégration.

$$\frac{M_y - N_x}{N(x,y)} = \frac{\cos y}{\cos y} = 1$$

Posons $f(x) = 1$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^x$$

En multipliant l'équation par le facteur $\mu(x)$

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0$$

$$e^x(x + \sin x + \sin y)dx + e^x\cos y\,dy = 0$$

$\tilde{M}(x,y) = e^x(x + \sin x + \sin y)$; $\tilde{N}(x,y) = e^x\cos y$

$\tilde{M}_y = e^x\cos y$; $\tilde{N}_x = e^x\cos y$

$\Rightarrow \tilde{M}_y = \tilde{N}_x$, équation exacte

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int \tilde{N}(x,y)\,dy + T(x) \\ &= \int e^x\cos y\,dy + T(x) \\ &= e^x\sin y + T(x) \end{aligned}$$

$U_x(x,y) = e^x\sin y + T'(x)$

$\tilde{M}(x,y) = e^x x + e^x\sin x + e^x\sin y$

$\Rightarrow \int T'(x) = \int(e^x x + e^x\sin x)\,dx$

D2.5

MAT 2784 A
2009.10.02

Devoir #2

1.32 cont'd.

$$\int T'(x) = \int (e^x x + e^x \sin x)\,dx.$$
$$T(x) = \int e^x x\,dx + \int e^x \sin x\,dx$$

①: $\int e^x x\,dx$; posons $u = x$ et $dv = e^x dx$.
donc $du = dx$ et $v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$
$$\int xe^x = xe^x - \int e^x dx.$$
$$= xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

②: $\int e^x \sin x$; posons $u = \sin x$ et $dv = e^x dx$
donc $du = \cos x\,dx$ et $v = e^x$

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx. \quad ; \quad u = \cos x \quad dv = e^x dx$$
$$= e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x); \quad du = -\sin x \quad v = e^x$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x$$
$$2\int e^x \sin x = e^x \sin x - e^x \cos x.$$
$$\int e^x \sin x = \tfrac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x)$$
$$= \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\Rightarrow T(x) = e^x(x-1) + \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

$$u(x,y) = e^x \sin y + e^x(x-1) + \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) = c.$$

Solution générale :
$$2e^x\left[2\sin y + 2(x-1) + (\sin x - \cos x)\right] = c.$$

D2.6

MAT2784 A
2009.10.02

Devoir #2.

1.33 Résoudre l'équation différentielle

$$y' + \frac{2}{x} y = 12.$$

L'équation est linéaire en y. On cherche $\mu(x)$ qui rend l'équation exacte.

$f(x) = \frac{2}{x}$; $r(x) = 12$; $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \\ &= e^{\ln|x|^2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

On peut tout de suite appliquer la solution.

$$\begin{aligned} \int (\mu(x) y)' &= \int \mu(x) r(x) \, dx \\ x^2 y &= \int x^2 \cdot 12 \, dx \\ x^2 y &= 4x^3 + c \\ y(x) &= 4x + cx^{-2} \end{aligned}$$

D2. 7

MAT2784A
2009. 10. 02

Devoir #2

1.39. Résoudre le problème à valeur initiale

$$y' + y\cos x = \cos x \quad ; \quad y(0) = 1.$$

L'équation est linéaire en y. On cherche $\mu(x)$ qui rend l'équation exacte.

$f(x) = \cos x$; $r(x) = \cos x$; $\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$

$$\mu(x) = e^{\int \cos x \, dx} = e^{\sin x}.$$

On peut immédiatement appliqué la solution

$$\int (\mu(x) y)' = \int \mu(x) r(x)\, dx$$
$$y e^{\sin x} = \int e^{\sin x} \cos x \, dx$$

Posons $u = \sin x$, donc $du = \cos x\, dx$.

$$y e^{u} = \int e^{u} du.$$
$$y e^{u} = e^{u} + c$$
$$y = 1 + c e^{-u}$$
$$y(x) = 1 + c e^{-\sin x}$$

Résolvant pour c.

$$1 = 1 + c e^{-\sin(0)}$$
$$1 = 1 + c e^{-0}$$
$$1 = 1 + c.$$
$$\Rightarrow c = 0.$$

Solution unique:

$$y(x) = 1$$

MAT2784 A
2009.10.02.

D2.8

Devoir # 2.

1.41 Trouver les trajectoires orthogonale de la famille de courbes. Tracer quelques courbes des deux familles sur le même repère.

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = c.$$
$$(x^2 + \frac{1}{4}y^2)' = (c)'$$
$$2x + \frac{1}{2}yy' = 0$$
$$2x + \frac{1}{2}yy' = 0$$
$$y' = -2x \cdot (\frac{1}{2}y)^{-1}$$
$$y' = -4xy^{-1} = m.$$

Nous avons trouvé la formule de la pente pour la famille de courbe. Trouvons celle de la famille de courbe orthogonale à la première

$$y'_{orth} = -(y')^{-1}$$
$$y'_{orth} = -(-4xy^{-1})^{-1}$$
$$y'_{orth} = \frac{1}{4}yx^{-1}$$
$$dx = \frac{1}{4}yx^{-1}dy.$$
$$4x\,dx = y\,dy$$
$$4x\,dx - y\,dy = 0$$
$$M(x,y) = 4x \quad ; \quad N(x,y) = -y$$
$$M_y = 0 \quad ; \quad N_x = 0$$
$\Rightarrow M_y = N_x$, l'équation est exacte!
$$U(x,y) = \int M(x,y)\,dx + T(y).$$
$$= \int 4x\,dx + T(y)$$
$$= 2x^2 + T(y)$$
$$U_y(x,y) = T'(y)$$
$$N(x,y) = -y$$
$$\Rightarrow \int T'(y) = \int -y\,dy$$
$$T(y) = \frac{1}{2}y^2$$

MAT2784 A
2009. 10. 02

Devoir #2

1.41 cont'd.

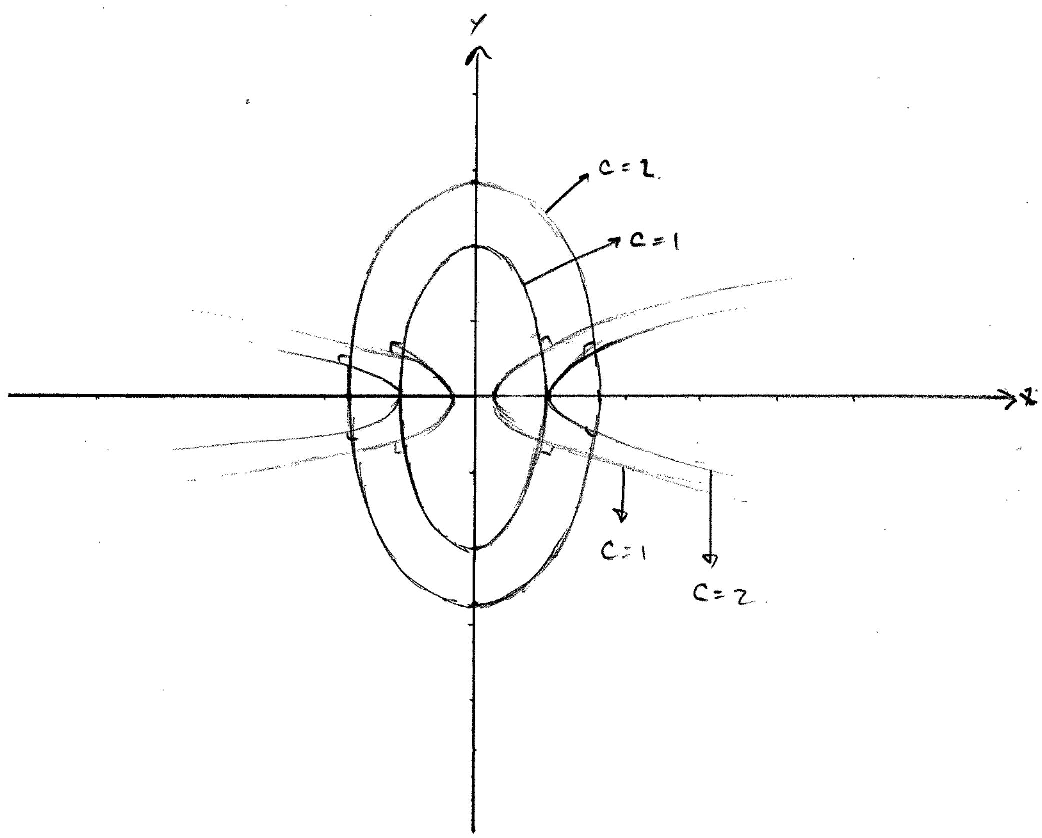
$$u(x,y) = 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 = c.$$

Donc la famille de courbes est:

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 = c \quad \text{(ellipses)}$$

et sa famille de courbes orthogonales est.

$$2x^2 - \frac{1}{2}y^2 = c \quad \text{(hyperboles)}$$

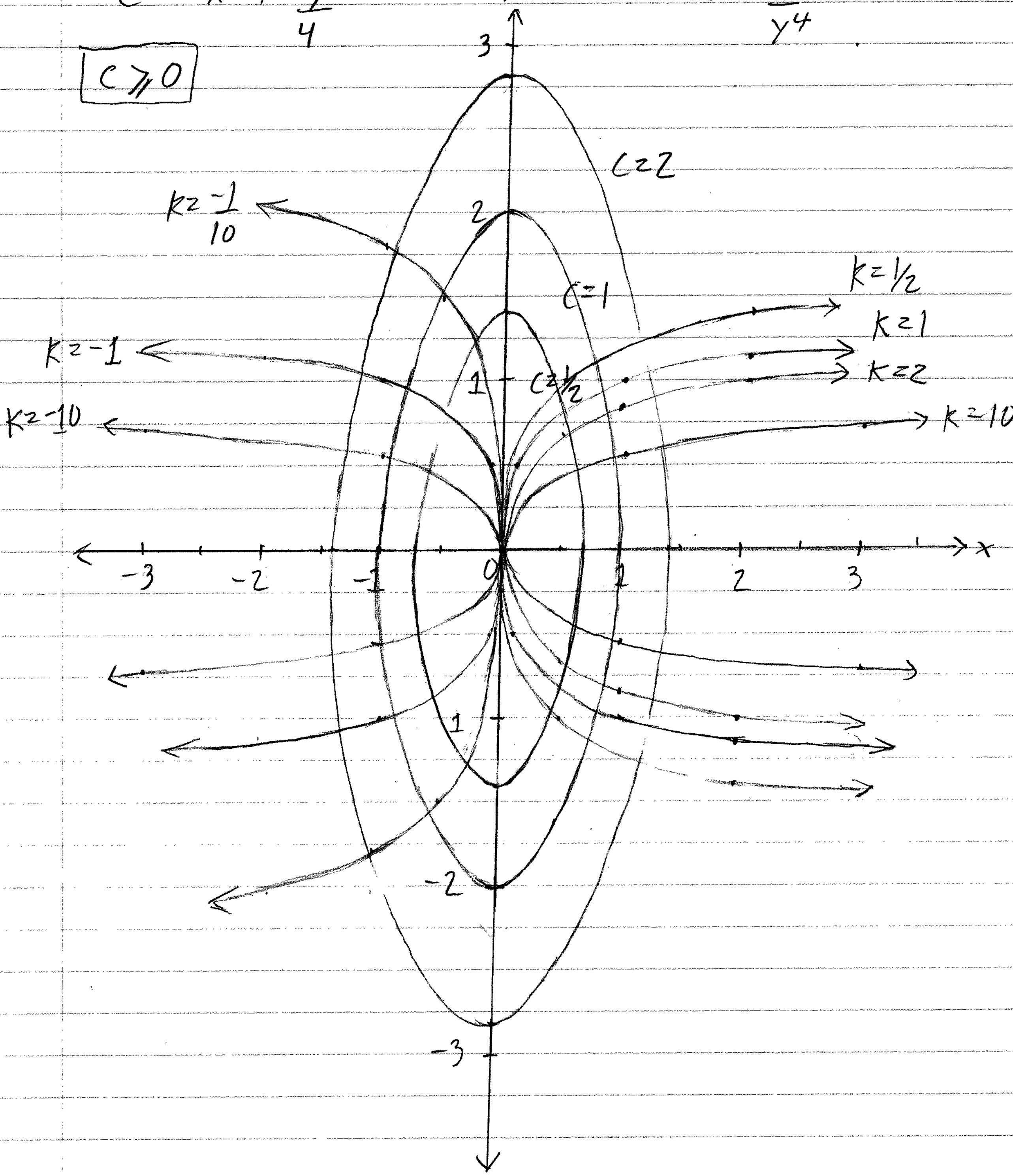


D2.9 bis

équation originale — équation orthogonale

$C = x^2 + \frac{y^2}{4}$ — $k = \frac{x}{y^4}$

$\boxed{C \geqslant 0}$

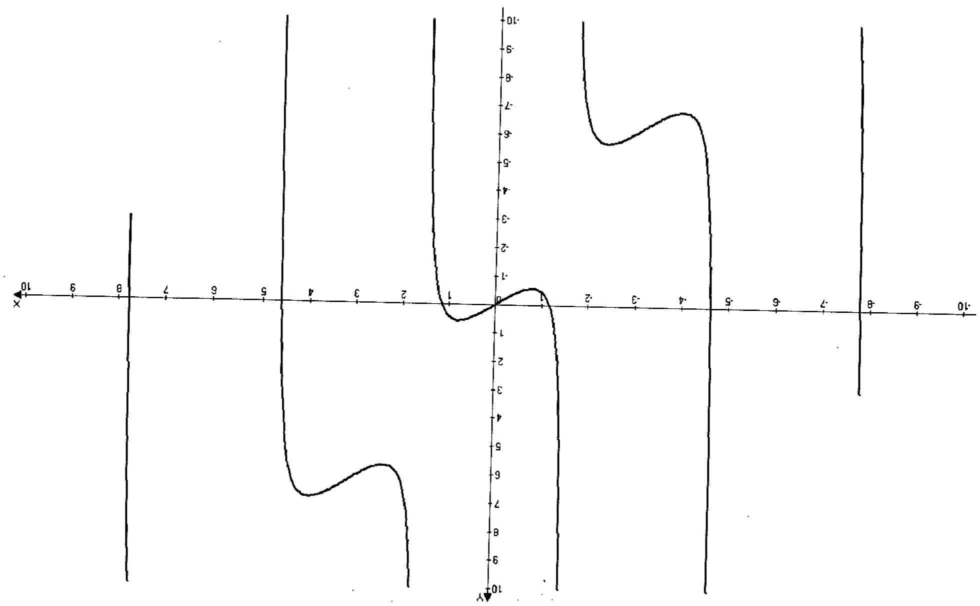


D2.10

MAT2784 A
2009.10.02

Devoir#2

8.10 Tracer la fonction $f(x) = 2x - \tan x$ et calculer une racine de $f(x) = 0$ à 6 decimales près par la methode de Newton. Demarrer en $x_0 = 1$. Trouver l'ordre de convergence de la méthode



La methode de Newton est utilise pour trouver des racines par iteration avec la formule suivante.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- $f(x_n) = 2x_n - \tan x_n$
- $f'(x_n) = 2 - \sec^2 x_n$
- $f''(x_n) = -2\sec^2 x_n \cdot \sec x_n \cdot \tan x_n$
  $= -2\sec^3 x_n \cdot \tan x_n$

MAT2784 A
2009.10.02

D 2.11

Devoir #2.

8.10 cont'd.

n	x_n	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$\lvert \text{Erreur} \rvert = \lvert x_n - p \rvert$
0	1.000 000	1.310 478...	0.165 561
1	1.310 478	1.223 929...	0.144 917
2	1.223 929	1.176 050...	0.058 368
3	1.176 050	1.165 926...	0.010 489
4	1.165 926	1.165 561...	0.000 365
5	1.165 561	1.165 561...	0.000 000

En tenant compte que des six premières décimale, trouvons l'ordre de convergence.

$$f(p) = 2p - \tan p = 0$$
$$f'(p) = 2 - \sec^2 p = -4.434\,126$$
$$f''(p) = -2\sec^3 x_n \cdot \tan x_n = -76.090\,280$$

Étant donné que $f'(p) \neq 0$ et que $f''(p)$ existe, la méthode de newton converge au moins d'ordre 2.

D2.12

MAT2784A
2009.10.02

Devoir #2.

8.13 Refaire l'exercice 8.12 par la méthode de la position fausse. Trouver l'ordre de convergence.
$f(x) = 2x - \tan x$; $a_0 = 1$ et $b_0 = 1.5$

Validation

$$f(a_0)f(b_0) = [2(1) - \tan(1)] \cdot [2(1.5) - \tan(1.5)]$$
$$= (0.442\,592\,276)(-11.101\,419\,95)$$
$$= -4.913\,402\,721$$
$$< 0$$

Itération.

$$x_1 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

$$= \frac{(1)(-11.101\,419\,95) - (1.5)(0.442\,592\,276)}{(-11.101\,419\,95) - (0.442\,592\,276)}$$

$$= 1.019\,175\,339.$$

$$f(x_1)f(a_0) = 0.182\,891\,038 > 0$$
$$\Rightarrow a_1 = x_1 \quad , \quad b_1 = b_0$$

$$x_2 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

$$= \frac{(1.019\,175\,339)(-11.101\,419\,95) - (1.5)(0.413\,236\,036)}{(-11.101\,419\,95) - (0.413\,236\,036)}$$

$$= 1.036\,425\,731.$$

$$f(x_2)f(a_1) = 0.158\,310\,879 > 0$$
$$\Rightarrow a_2 = x_2 \quad , \quad b_2 = b_1$$

$$x_3 = \frac{a_2 f(b_2) - b_2 f(a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}$$

$$= 1.051\,889\,631.$$

$$f(x_3)f(a_2) = 0.135\,160\,192 > 0$$
$$\Rightarrow a_3 = x_3 \quad , \quad b_3 = b_2$$

MAT2784A

2009.10.02

Devoir #2.

8.13 cont'd.

$$x_4 = \frac{a_3 f(b_3) - b_3 f(a_3)}{f(b_3) - f(a_3)}$$

$$= 1.065\,692\,058$$

$$f(x_4)\,f(a_3) = 0.113\,920\,451 > 0.$$

$$\Rightarrow a_4 = x_4 \quad , \quad b_4 = b_3.$$

$$x_5 = \frac{a_4 f(b_4) - b_4 f(a_4)}{f(b_4) - f(a_4)}$$

$$= 1.077\,967\,382$$

... etc.

Voici un tableau resumant les calculs.

n.	x_n.	a_n.	b_n
0.	—	1.000 000	1.500 000
1	1.019 175 3.	1.019 175	1.500 000
2	1.036 425 7.	1.036 425	1.500 000
3	1.051 889 6.	1.051 889	1.500 000
5	1.077 967 3	1.077 967	1.500 000
10	1.120 970 1.	1.120 970	1.500 000
20	1.154 591 1.	1.154 5911	1.500 000
30	1.162 925 9.	1.162 925	1.500 000
40	1.164 931 8	1.164 931	1.500 000
50	1.165 411 1.	1.165 411	1.500 000
60	1.165 525 4	1.165 525	1.500 000
70	1.165 552 7.	1.165 552	1.500 000
74	1.165 556 4.	1.165 556	1.500 000
75	1.165 557 0	1.165 557	1.500 000
77.	1.165 557 6.		

D2.13

L'ordre de conv. $= \dfrac{\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_{n-1})}{\ln(\varepsilon_{n-1}) - \ln(\varepsilon_{n-2})}$

$$= \frac{\ln(\varepsilon_9) - \ln(\varepsilon_8)}{\ln(\varepsilon_8) - \ln(\varepsilon_7)}$$

$$= \frac{\ln\left(\varepsilon_9/\varepsilon_8\right)}{\ln\left(\varepsilon_8/\varepsilon_7\right)}$$

$$= \frac{\ln(-0{,}0074635708/-0{,}0084828910)}{\ln(-0{,}0084828910/-0{,}0096200716)}$$

$$= \frac{-0{,}128017326}{-0{,}125800438}$$

$$= 1{,}017622264$$

$$\simeq \underline{1}$$