SOLUTIONS

Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

MAT 2784 A

Test mi-session 1
Durée: 80 min
Place: LPR 155
12 octobre 2007
10:00–11:20

Midterm 1
Time: 80 min
Place: LPR 155
12th of October 2007
10:00–11:20

Prof.: Rémi Vaillancourt

Instructions:

(a) *À livre fermé. Tout type de calculatrices autorisé.*
Closed book. All types of calculators are allowed.
(b) *Répondre sur le questionnaire. Réponses numériques dans les boîtes.*
Answer on the question sheets. Fill-in boxes with numerical answers.
(c) *Les 6 questions sont d'égale valeur.*
All 6 questions have the same value.
(d) *Donner le détail de vos calculs.*
Show all computation.
(e) *Une feuille couleur de tables sera distribuée.*
A one-page table on colored paper will be distributed.
(f) *Tous les angles sont en RADIANS. Tester et ajuster votre calculatrice.*
All angles are in RADIAN measures. Test and adjust your calculators.

1	/10
2	/10
3	/10
4	/10
5	/10
6	/10
TOTAL	/60

$$\sin 1.123456789 = 0.90160112364453$$

L'équation différentielle homogène du 1er ordre,
The first order homogeneous differential equation,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

admet un facteur d'intégration
admits an integrating factor

$$\mu(x) \quad \text{ou/or} \quad \mu(y)$$

selon que
according to

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x) \Longrightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx},$$

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g(y) \Longrightarrow \mu(y) = e^{-\int g(y)\,dy}.$$

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Qu. 1. *Trouver un facteur d'intégration, rendre l'équation différentielle exacte et résoudre le problème à valeur initiale.*

Find an integration factor, make the differential equation exact and solve the initial value problem.

$$(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

$(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2+y^2)dy = 0 \qquad y(1) = 2$

$\Rightarrow \quad M_y = 3x^2 + 2x + 3y^2 \qquad N_x = 2x$

$M_y \neq N_x$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x^2 + \cancel{2x} + 3y^2 - \cancel{2x}}{(x^2+y^2)} = \frac{3\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} = 3$$

$\Rightarrow \quad \mu = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

$\left(3x^2y\,e^{3x} + 2xy\,e^{3x} + y^3e^{3x}\right)dx + \left(e^{3x}x^2 + y^2e^{3x}\right)dy = 0$

$du = 0$

$\Rightarrow \quad u = C$

avec $u = \int u_y dy + T(x)$

$\Rightarrow \quad = \int \left(e^{3x}x^2 + y^2e^{3x}\right)dy + T(x)$

$= e^{3x}x^2y + \frac{1}{3}y^3e^{3x} + T(x)$

$\Rightarrow u_x = \cancel{3e^{3x}x^2y} + \cancel{2xe^{3x}y} + \cancel{y^3e^{3x}} + T'(x) = M = \cancel{3x^2ye^{3x}} + \cancel{2xye^{3x}} + \cancel{y^3e^{3x}}$

$\Rightarrow \quad T'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(x) = 0$

$\Rightarrow$ la solution générale est :

$\Rightarrow \quad u = e^{3x}x^2y + \frac{1}{3}y^3e^{3x} = C$

$\Rightarrow \quad e^3 \times (1)^2 \times 2 + \frac{1}{3}(2)^3 \times e^3 = C$

$\Rightarrow \quad e^3\left(2 + \frac{1}{3}\times 8\right) = e^3\left(\frac{6}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{14e^3}{3} = C \quad \Rightarrow \quad C_1 = 14e^3$

solution unique :

$\Rightarrow \quad \boxed{3e^{3x}x^2y + y^3e^{3x} = 14e^3}$

Qu. 2. *Résoudre le problème à valeur initiale.*

Solve the initial value problem.

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}\, y = x, \qquad y(0) = 3.$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1} y = x \qquad y(0)=3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x - \frac{2x}{x^2+1} y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{x^2+1} y - x\right) dx + dy = 0$$

$$\Rightarrow M_y = \frac{2x}{x^2+1} \neq N_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2+1$$

$$\Rightarrow \left((x^2+1)\frac{2x}{x^2+1} y - x^3 - x\right) dx + (x^2+1) dy = 0$$

$$\Rightarrow du\,(2xy - x^3 - x)\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$$

$$du = 0$$

$$\Rightarrow u = C$$

$$\Rightarrow u = \int u_y\, dy + T(x) = \int (x^2+1)\,dy + T(x)$$

$$= x^2y + y + T(x)$$

$$u_x = 2xy + T'(x) = 2xy - x^3 - x$$

$$\Rightarrow T'(x) = -x^3 - x$$

$$\Rightarrow \int T'(x) = T(x) = -\int (x^3+x)\,dx = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

solution générale est

$$\Rightarrow u = x^2y + y - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = C$$

$$\Rightarrow 0 + 3 - 0 - 0 = C \Rightarrow C = 3$$

- Sol^n unique $\boxed{x^2y + y - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^2 = 3}$

ÉQ. LIN. EN y

$$y' + f(x)\,y = r(x)$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx}$$

$$= e^{\ln(x^2+1)}$$

$$= x^2+1$$

$$(\mu(x)\,y)' = \mu(x)\,r(x)$$

$$[(x^2+1)\,y]' = \int (x^3+x)\,dx + C$$

$$(x^2+1)\,y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$y(0) = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{3 = C}$$

Sol. unique

$$\boxed{(x^2+1)\,y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 3}$$

Qu. 3. *Résoudre le problème aux valeurs initiales.*
Solve the initial value problem.

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

on pose

$y = e^{\lambda x}$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$\Rightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 + 9) = 0$ on a que $e^{\lambda x} \neq 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 9 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 = -9$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3i$ et $\lambda_2 = -3i$

la solution générale est

$\Rightarrow y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ $\Rightarrow y(0) = 2 = C_1$

$y' = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x)$ $\Rightarrow y'(0) = 3C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ la solution unique est

$$\boxed{y = 2\cos(3x) + \frac{1}{3}\sin(3x)}$$

Qu. 4. *Résoudre le problème aux valeurs initiales*

Solve the initial value problem.

$$x^2y'' - xy' + y = 0, \qquad x > 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -5.$$

on pose $y = x^m$

$y' = m x^{m-1}$

$y'' = m(m-1) x^{m-2}$

$\Rightarrow x^m \left(m(m-1) - m + 1 \right) = 0$ on a que $x > 0 \Rightarrow x \neq 0$ $\Rightarrow x^m \neq 0$

$\Rightarrow m^2 - m - m + 1 = 0$

$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0$

$\Rightarrow (m-1)^2 = 0$

$\Rightarrow (m-1) = 0$

$\Rightarrow m = 1$

on a que $m_1 = m_2 = m = 1$

$\Rightarrow y_1 = x$

$y_2 = x \ln(x)$

la solution générale est

$y = C_1 x + C_2 x \ln(x)$ $y(1) = 2 = C_1$

$y' = C_1 + C_2 \ln(x) + C_2 x \cdot \frac{1}{x}$ $y'(1) = -5 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -5 - C_1 = -5 - 2 = -7$

la solution unique est

$\Rightarrow \boxed{y = 2x - 7x\ln(x)}$

✓

Qu. 5. *Trouver les trajectoires orthogonales de la famille de courbes donnée et tracer quelques courbes des deux familles sur le même repère.*

Find the orthogonal trajectories of the given family of curves and plot a few curves from both families on the same system of axes.

$$x^2 - \frac{1}{4}y^2 = c.$$

ono $x^2 - \frac{1}{4}y^2 = c$

$\Rightarrow 2x\,dx - \frac{1}{4}\times 2y\,dy = 0$

$\Rightarrow 2x\,dx - \frac{1}{2}y\,dy = 0$

$\Rightarrow 2x\,dx = \frac{1}{2}y\,dy$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\frac{1}{2}y} = 4\frac{x}{y} = y' = m$

$y'_{orth} = \frac{-1}{m} = -\frac{y}{4x}$

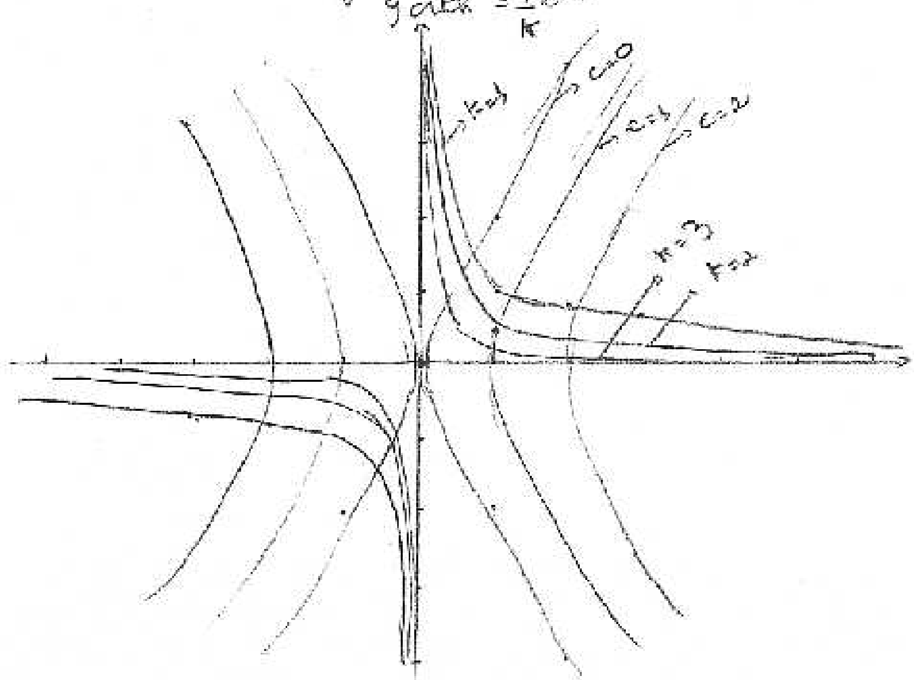
$\Rightarrow \frac{dy_{orth}}{dx} = \frac{-y}{4x}$

$\Rightarrow \int \frac{dy_{orth}}{-y} = \int \frac{dx}{4x}$ $\Rightarrow -\ln|y_{orth}| = \frac{1}{4}\ln(x) + c^{te}$

$\Rightarrow \ln y_{orth}^{-1} = \ln x^{\frac{1}{4}} + c^{te}$

$\Rightarrow \frac{1}{y_{orth}} = k x^{\frac{1}{4}}$ avec $k = e^{c^{te}}$

$\Rightarrow y_{orth} = \frac{1}{k}x^{-\frac{1}{4}}$



Qu. 6. *Compléter le tableau pour la récurrence de point fixe :*

Fill the boxes for the fixed point iteration:

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} \equiv g(x_n).$$

$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

$\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$

$\to x_{n+2} - 2(x_{n+1}) + x_n$

n	x_n	Δx_n	$\Delta^2 x_n$
1	$x_1 = \boxed{4.0000}$		
		$\boxed{-0{,}6834}$	
2	$x_2 = \boxed{3{,}3166}$		$\boxed{0{,}4705}$
		$\boxed{-0{,}2129}$	
3	$x_3 = \boxed{3{,}1037}$		

Accélérer la convergence par la méthode d'Aitken.

Accelerate the convergence by the Aitken process.

$$a_1 = x_1 - \frac{(\Delta x_1)^2}{\Delta^2 x_1} = \boxed{3{,}0073633}$$

$$4 - \frac{(-0{,}6834)^2}{0{,}4705}$$

Accélérer la convergence par la méthode de Steffensen

Accelerate the convergence by the Steffenseen process.

$$s_1 = a_1,$$

$$z_1 = g(s_1) = \boxed{3{,}0024534}$$

$$z_2 = g(z_1) = \boxed{3{,}0008177}$$

$$s_2 = s_1 - \frac{(z_1 - s_1)^2}{z_2 - 2z_1 + s_1} = \boxed{3{,}0000004}$$

$$z_1 = \sqrt{2(3{,}0073633) + 3}$$
$$= 3{,}00245343$$
$$z_2 = \sqrt{2(3{,}00245343) + 3}$$
$$= 3{,}000817699$$

$$s_2 = 3{,}0073633 - \frac{(3{,}0024534 - 3{,}007363}{(3{,}000817699) - 2(3{,}00245340) + 3{,}0073}$$
$$= 3{,}0000004$$