MAT 3784A DEV 4 D4.1

Exercice #3.2 p 290

Rémi Vaillancourt

07.10.21

résoud l'équation

① $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

posons $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ et $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$.

① devient $e^{\lambda x}(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0$ $(e^{\lambda x} \neq 0)$

à l'aide de la division euclidienne et l'équation quadratique on arrive à :

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

donc on a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = -3$

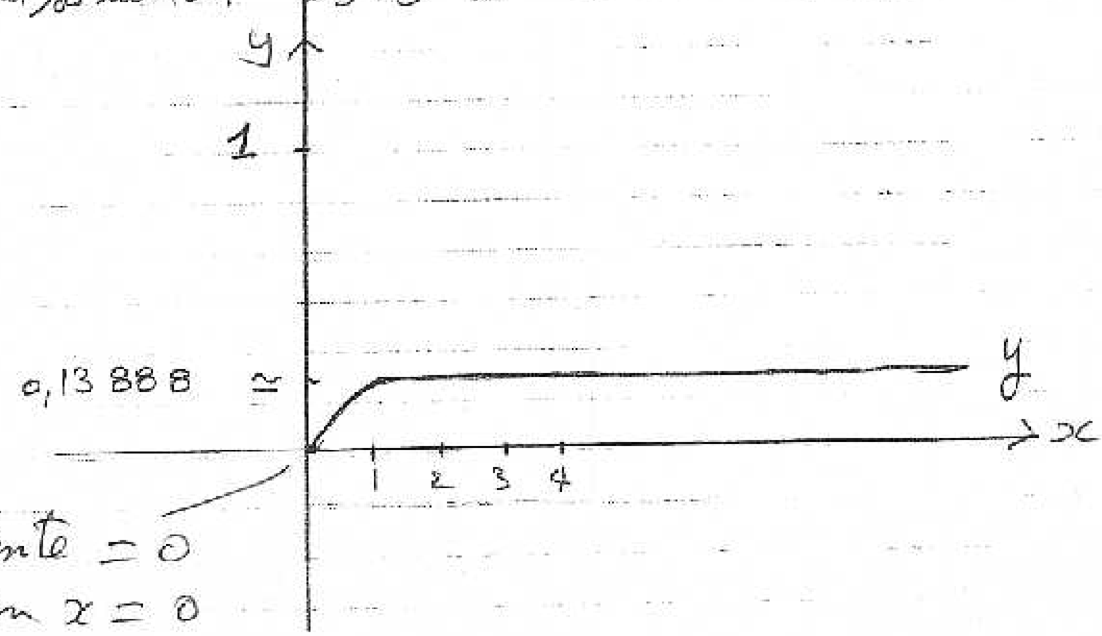
alors la solution générale est sous la forme

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x}$$

donc $\boxed{y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}}$

graphe de la solution 3.5

à $x \geq 0$



pente = 0

en $x = 0$

Exercice # 3.4 p.290

résoud l'équation

(1) $$y^{(4)}+y'''-3y''-y'+2y=0$$

Posons $y=e^{\lambda x}$ alors

$$y'=\lambda e^{x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x},\ y'''=\lambda^3 e^{\lambda x} \text{ et } y^{(4)}=\lambda^4 e^{\lambda x}$$

(1) devient $$e^{\lambda x}(\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+2)=0 \quad (e^{\lambda x}\neq 0)$$

a l'aide de la division euclidienne et l'équation quadratique on arrive a :

$$\lambda^4+\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+2=0$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=-1 \text{ et } \lambda_4=-2$$

la solution generale et de la forme :

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}+C_3e^{\lambda_3 x}+C_4e^{\lambda_4 x}$$

$$\boxed{y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{-x}+C_4e^{-2x}}$$

Exercice # 3.5 p. 290

Résoud l'équation

① $y''' + 12y'' + 36y' = 0$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = -7$

posons $y = e^{\lambda x}$

alors $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ et $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}$

① devient

$$e^{\lambda x}(\lambda^3 + 12\lambda^2 + 36\lambda) = 0 \qquad (e^{\lambda x} \neq 0)$$

$$\lambda^3 + 12\lambda^2 + 36\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 12\lambda + 36) = 0$$

$$\lambda(\lambda + 6)^2 = 0$$

donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = -6$

la solution générale est de la forme :

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 x e^{\lambda_2 x}.$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-6x} + C_3 x e^{-6x}$$

Calculons

$$y' = -6C_2 e^{-6x} + C_3 e^{-6x} - 6C_3 x e^{-6x}$$

$$y'' = 36C_2 e^{-6x} - 6C_3 e^{-6x} - 6C_3 e^{-6x} + 36C_3 x e^{-6x}$$

on

$y(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$. ②

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow -6C_2 + C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 1 + 6C_2$. ③

$y''(0) = -7 \Leftrightarrow 36C_2 - 12C_3 = -7$ ④

Subst ③ dans ④

$$36C_2 - 12 - 72C_2 = -7 \Leftrightarrow \boxed{C_2 = -\frac{5}{36}}$$

$$\boxed{C_3 = 1 - \frac{30}{36} = \frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \boxed{C_1 = \frac{5}{36}}$$

alors la solution generale est :

$$\boxed{y = \frac{5}{36} - \frac{5}{36} e^{-6x} + \frac{x}{6} e^{-6x}}$$

suite p

VOIR GRAPHIQUE p. D4.1

Exercice # 3.9 p 290

Determinons si les fonctions sont linéairement dépendantes ou indépendantes sur $-\infty < x < +\infty$

On a: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = 2x - 5x^2$

$y_1'(x) = 1$, $y_2'(x) = 2x$, $y_3'(x) = 2 - 10x$

$y''(x) = 0$, $y_2''(x) = 2$, $y_3''(x) = -10$

Calculons le Wronskien de ces solutions.

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & 2x-5x^2 \\ 1 & 2x & 2-10x \\ 0 & 2 & -10 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2x & 2-10x \\ 2 & -10 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} x^2 & 2x-5x^2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= x\left(-\cancel{20x} - 4 + \cancel{20x}\right) - 1\left(-\cancel{10x^2} - 4x + \cancel{10x^2}\right)$$

$$= -4x + 4x = 0$$

Alors $W = 0$ donc les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$ et $y_3(x)$ sont linéairement dépendantes suite au Théorème 3.3

méthode 2

$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 x + c_2 x^2 + 2c_3 x - 5c_3 x^2 = 0$

$(c_1 + 2c_3)x + (c_2 - 5c_3)x^2 = 0$

donc $c_1 = -2c_3$, $c_2 = +5c_3$ prenons $c_3 = a$ alors $\begin{cases} c_1 = -2a \\ c_2 = 5a \\ c_3 = a \end{cases}$

donc elles sont linéairement dépendantes

Exercice #3.15 p.290

Montrons au moyen de Wronskien que les fonctions sont linéairement indépendantes

on a $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{4}}$ sur $0 < x < +\infty$

Calculons W avec $f_1 = x^{\frac{1}{3}}$ et $f_2 = x^{\frac{1}{4}}$

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{3}} & x^{\frac{1}{4}} \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{3}} x\, x^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$W = \frac{1}{4}x^{-5/12} - \frac{1}{3}\, x^{\frac{-5}{12}} = x^{-5/12}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

donc $W = -\frac{1}{12}\, x^{-5/12} \neq 0$

alors $x^{\frac{1}{3}}$ et $x^{\frac{1}{4}}$ sont linéairement indépendantes

suivant théorème qui dit que les fonctions sont linéairement indépendante lorsque leur $W \neq 0$ et qu'elles satisfont les hypothèses des Corollaire 3.2 (p. 46)

En effet, il faut que les 2 fonctions soit solution d'une même eq. diff.

Exercice #3.21 p 291

Trouvons la seconde solution avec $y_1(x)$ est une solution.

on a :

① $(1+2x)y''+4xy'-4y=0$ avec $y_1(x)=e^{-2x}$ solution de ①

Trouvons la seconde solution. $y_1'(x)=-2e^{-2x}$

$y_1''(x)=4e^{-2x}$.

posons
$$\begin{cases} y_2(x)=u(x)\,y_1(x). \\ y_2'=u'y_1+uy_1' \\ y_2''=u''y_1+u'y_1'+uy_1''+u'y_1'=u''y_1+2u'y_1'+uy_1'' \end{cases} \quad ②$$

Sub ② dans ①

$$(1+2x)(u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+4x(u'y_1+uy_1')-4(uy_1)=0$$

③ $y_1(1+2x)u''+\left(2y_1'(1+2x)+4xy_1\right)u'+\left(y_1''(1+2x)+4xy_1'-4y_1\right)u=0$

$y_1(1+2x)=e^{-2x}(1+2x)$

$2y_1'(1+2x)+4xy_1=e^{-2x}(-4-8x+4x)=e^{-2x}(-4-4x)$

$y_1''(1+2x)+4xy_1'-4y_1=e^{-2x}(4+8x-8x-4)=0$

$e^{-2x}\neq 0$ donc ③ devient $(1+2x)u''-(4+4x)u'=0$

Posons $u''=0 \Leftrightarrow u'=k_1 \Rightarrow u=k_1x+k_2$.

donc la seconde solution et $y_2(x)=(k_1x+k_2)e^{-2x}$

si on prend $k_1=1$ et $k_2=0$

alors $y_2(x)=xe^{-2x}$

donc la solution generale et

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

$$\boxed{y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}}$$

Exercice # 9.1 p.301

Construisons les polynômes de Lagrange de degré 1 et 2

on a $f(x) = \ln(x+1)$ avec $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ et $x_2 = 0.9$.

* poly de degré 1 est de forme $P_1(x) = f(x_0) L_0(x) + f(x_1) L_1(x)$

avec

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 0,6}{0 - 0,6} = 1 - \frac{5}{3}x.$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{0,6} = \frac{5}{3}x.$$

$$f(x_0) = f(0) = \ln 1 = 0$$
$$f(x_1) = f(0,6) = \ln 1,6 = 0.47.$$

donc

$$P_1(x) = 0 \times \left(1 - \frac{5}{3}x\right) + 0,47\left(\frac{5}{3}x\right)$$

$$\boxed{P_1(x) = 0,783\,x}$$

* poly de degré 2 est de forme $P_2(x) = \underbrace{f(x_0) L_0(x)}_{=0} + f(x_1) L_1(x) + f(x_2) L_2(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{x(x - 0,9)}{0.6(0,6 - 0,9)} = \frac{x^2 - 0,9x}{-0,18} = 5x - \frac{50x^2}{9}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x(x - 0,6)}{0,9(0,9 - 0,6)} = \frac{x^2 - 0,6x}{0,27} = \frac{100x^2}{27} - \frac{20x}{9}$$

$$f(x_1) = 0,47$$
$$f(x_2) = \ln(1,9) = 0,6418$$

donc

$$P_2(x) = 0,47\left(5x - \frac{50}{9}x^2\right) + 0,6418\left(\frac{100}{27}x^2 - \frac{20}{9}x\right)$$

$$= 2.35x - 2,611x^2 + 2,377x^2 - 1,426x$$

$$\boxed{P_2(x) = 0,924x - 0,234x^2}$$

Evaluons les 2 poly à 0,45

$P_1(0,45) = 0,45 \times 0,783$

$P_1(0,45) = 0,352$

$P_2(0,45) = 0,924(0,45) - 0,234 \times 0,45^2$

$P_2(0,45) = 0,368$

Suite →

on $f(0,45) = Ln(1+0,45) = 0.372$ arrondi à 3 décimales.

donc l'erreur absolue pour les 2 polynomes.

polynome de degré ①

$$\varepsilon_1 = f(0,45) - P_1(0,45) = 0.372 - 0352$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = 0.02}$$

polynome de degré ②

$$\varepsilon_2 = f(0,45) - P_2(0,45) = 0372 - 0,368$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = 0,004}$$

et l'erreur actuelle entre les 2 polynomes.

$$\varepsilon_{ac} = P_2(0,45) - P_1(0,45) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\boxed{\varepsilon_{ac} = 0.016}$$

Exercice#9.7 p 301

répétons l'exercice 9.1 avec des polynomes de Newton aux différences divisées.

où $f(x) = Ln(x+1)$ et $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ et $x_2 = 0.9$.

* polynôme de degré ① et de la forme $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$
avec $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

$a_0 = f(x_0) = f(0) = Ln\,1 = 0$. et $f(x_1) = f(0.6) = Ln\,1.6 = 0.47$

$a_1 = \frac{0,47 - 0}{0,6 - 0} = 0.783$

alors $P_1(x) = 0 + 0,783(x - 0)$

$\boxed{P_1(x) = 0,783\,x}$

* polynôme de degré ② et de la forme $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$
avec $f(x_2) = f(0,9) = Ln(1,9) = 0.6418$

$a_0 = 0$

$a_1 = 0.783$

$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{0.6418 - 0.783(0,9 - 0)}{(0,9 - 0)(0,9 - 0,6)}$.

$= \frac{0.6418 - 0.7047}{0,27} = -0,233$.

donc $P_2(x) = 0 + 0,783(x - 0) - 0,233(x - 0)(x - 0,6)$

$= 0,783x - 0,233x^2 + 0,1398x$.

$\boxed{P_2(x) = 0,923x - 0,233x^2}$

$P_1(0,45) = 0,352$ $\qquad P_2(0,45) = 0,368$

et l'erreur actuelle

$\boxed{E_{a_c} = 0.368 - 0.352 = 0.016}$