NOM/NAME SOLUTIONS

Nº d'ét/st. #

Université d'Ottawa · University of Ottawa

1/10

Faculté des sciences
Mathématiques et de statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Test mi-session 1
Durée: 80 min
Place: LMX 219
17 octobre 2006
11:30–12:50

MAT 2784 A

Midterm 1
Time: 80 min
Place: LMX 219
17th of October 2006
11:30–12:50

Prof.: Rémi Vaillancourt

Instructions:

(a) *À livre fermé. Tout type de calculatrices autorisé.*
Closed book. All types of calculators are allowed.

(b) *Répondre sur le questionnaire. Réponses numériques dans les boîtes.*
Answer on the question sheets. Fill-in boxes with numerical answers.

(c) *Les 7 questions sont d'égale valeur.*
All seven questions have the same value.

(d) *Donner le détail de vos calculs.*
Show all computation.

(e) *Une feuille ~~couleur~~ de tables ~~sera distribuée~~.* à la fin
A one-page table ~~on colored paper will be distributed~~. at the back

(f) *Tous les angles sont en RADIANS. Tester et ajuster votre calculatrice.*
All angles are in RADIAN measures. Test and adjust your calculators.

$$\sin 1.123456789 = 0.90160112364453$$

1	/10
2	/10
3	/10
4	/10
5	/10
6	/10
7	/10
TOTAL	/70

Signature :

MOYENNES
D1 : 85,39 %
D2 : 76,39 %
TMS1 : 74,29 %

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

2/10

Qu. 1. *Trouver un facteur d'intégration, rendre l'équation différentielle exacte et résoudre le problème à valeur initiale.*

Find an integration factor, make the differential equation exact and solve the initial value problem.

Ex 1.27 $$(x^2 - y^2 + x)\,dx + 2xy\,dy = 0, \qquad y(1) = 2.$$

$M_y = -2y \quad , \quad N_x = 2y$

$\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{-4y}{2xy} = -\dfrac{2}{x}$

$\mu(x) = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{-\ln x^{-2}} = x^{-2}$

$\left(1 - \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{1}{x}\right)dx + \dfrac{2y}{x}\,dy = 0$

$u(x,y) = \int \dfrac{2}{x}\,y\,dy + T(x)$

$= \dfrac{y^2}{x} + T(x)$

$u_x = -\dfrac{y^2}{x^2} + T'(x) = 1 - \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

$T'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \quad , \quad T(x) = x + \ln x$

$u(x,y) = \dfrac{y^2}{x} + x + \ln x = c$

$\dfrac{2^2}{1} + 1 = c = 5 \qquad \boxed{\dfrac{y^2}{x} + x + \ln x = 5}$

3/10

Qu. 2. *Résoudre le problème à valeur initiale.*

Solve the initial value problem.

Ex 1.33

$$y' + \frac{2}{x}y = 12, \qquad y(1) = 5.$$

$$\mu(x) = e^{2\int \frac{1}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$(x^2 y)' = 12x^2$$

$$x^2 y = 12\int x^2\,dx + c$$

$$= 4x^3 + c$$

$$y = 4x + \frac{c}{x^2} \qquad y(1) = 5$$

$$5 = 4 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\boxed{y(x) = 4x + \frac{1}{x^2}}$$

Qu. 3. *Résoudre le problème aux valeurs initiales.*
Solve the initial value problem.

Ex 1.33, $y'' + 2y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3.$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$= -1 \pm i$

$y_1 = e^{-x} \cos x, \quad y_2 = e^{-x} \sin x$

$y(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$

$y'(x) = -c_1 e^{-x} \cos x - c_1 e^{-x} \sin x$
$\qquad + c_2 e^{-x} \cos x - c_2 e^{-x} \sin x$

$y(0) = c_1 = 2$

$y'(0) = -c_1 + c_2 = -3$

$c_2 = -3 + c_1 = -1$

$y(x) = 2 e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

Qu. 4. *Résoudre le problème aux valeurs initiales*

Solve the initial value problem.

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0, \qquad x > 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -5.$$

Ex. 2.18

$m(m-1) + 5m + 3 = 0$

$m^2 + 4m + 3 = 0$

$(m+1)(m+3) = 0$ $\qquad m_1 = -1,\ m_2 = -3$

$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-3}$

$y'(x) = -c_1 x^{-2} - 3c_2 e^{-4}$

$y(1) = c_1 + c_2 = 1$

$y'(1) = -c_1 - 3c_2 = -5$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

$c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{-2} = -1$

$c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$y(x) = -x^{-1} + 2x^{-3}$

Qu. 5. *Trouver la solution générale.*

Find the general solution.

Ex 3.25

$$y'' - y' = e^x \sin x.$$

$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$

$y_h = A + Be^x$

$y_p = a e^x \cos x + b e^x \sin x$

$y_p' = a e^x \cos x - a e^x \sin x$
$\quad + b e^x \cos x + b e^x \sin x$

$= (a+b) e^x \cos x + (b-a) e^x \sin x$

$y_p'' = (a+b) e^x \cos x - (a+b) e^x \sin x + (b-a) e^x \sin x$
$\quad + (b-a) e^x \cos x$

$= 2b e^x \cos x - 2a e^x \sin x$

$y'' - y' = (b-a) e^x \cos x - (b+a) e^x \sin x$

$= 0 e^x \cos x + e^x \sin x$

$b - a = 0$ $\qquad b = a$

$-b - a = 1$ $\qquad -2a = 1 \Rightarrow a = -1/2$

$b = -1/2$

$y(x) = A + Be^x - \frac{1}{2} e^x \cos x - \frac{1}{2} e^x \sin x$

Qu. 6. *Trouver la solution générale.*

Find the general solution.

Ex. 3.35 $$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$

$y_h(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$

$\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix}$ $\ell_2 + \ell_1$

$\begin{bmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ 0 & -e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{bmatrix}$

$c_2' = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$e^{-x} c_1' = -e^{-2x} c_2'$

$c_1' = -e^{-x} c_2' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

$\boxed{\begin{aligned} u &= e^x \\ du &= e^x dx \end{aligned}}$

$c_1(x) = \int \dfrac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x)$

$c_2(x) = -\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = -\int \dfrac{u\,du}{1+u} = -\int \dfrac{(1+u)-1}{1+u}\,du$

$= -u + \ln u = -e^x + \ln(1+e^x)$

$c_2(x) = -e^x + \ln(1+e^x)$

$y_p = \ln(1+e^x)e^{-x} - (e^x - \ln(1+e^x))e^{-2x}$

$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x)$

$- e^{-2x}(e^x - \ln(1+e^x))$

$= \tilde{A}e^{-x} + Be^{-2x} + \ln(1+e^x)[e^{-x} + e^{-2x}]$

8 → 9/10

Qu. 7. *Soit la récurrence :* / Consider the fixed point iteration:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x_n^3} := f(x_n).$$

(a) *Si le point fixe est* / If the fixed point is

$$p = 1.36523001341410,$$

montrer que la convergence est d'ordre 1 / show that the order of convergence is 1.

$$f'(x) = -\frac{3}{4}\,\frac{1}{\sqrt{10 - x^3}} \qquad 0 < |-0.57| < 1 \Rightarrow \boxed{\text{conv. d'ordre } 1}$$

$$f'(p) = -\frac{3}{4}\,\frac{1.3^2}{\sqrt{10 - (1.3)^3}} \cong -0.57 \neq 0 \Rightarrow$$

(b) *De votre réponse en* **(a)**, *déduire l'ordre de convergence de l'accélération de Steffensen.* From your answer in **(a)**, what is the order of convergence of Steffensen's acceleration.

conv. d'ordre 1 en (a) $\Rightarrow$
convergence d'ordre 2 de l'accélération
de Steffensen.

L'accélération d'Aitken est / The Aitken acceleration is

$$a_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} := x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

L'accélération de Steffensen est / Steffensen's acceleration is

$$s_0 = x_0,$$

et pour / and for $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$z_1 = g(s_n),$$
$$z_2 = g(z_1),$$
$$s_{n+1} = s_n - \frac{(z_1 - s_n)^2}{z_2 - 2z_1 + s_n}.$$

TABLE 1. Tableau de résultats pour la question 7. $\epsilon_n = s_n - s_4$.

n	x_n	a_n	s_n	$\epsilon_{n+1}/\epsilon_n^2$
0	1.50000000000000	1.36188648104418	1.50000000000000	0.175187
1	1.28695376762338	1.36432913238998	1.36188648104418	0.159094
2	1.40254080353959	1.36499912802003	1.36522823675708	0.159472
3	1.34545837402329	1.36516894262993	1.36523001341359	
4	1.37517025281603	1.37517025281604	1.36523001341409	$\downarrow$
5	1.36009419276173		NaN	const
6	1.36784696759213	1.36522891821816	NaN	
7	1.36388700388402		NaN	
8				

(c) *Utiliser la table pour calculer x_8 à 10 décimales.*
Use table to compute x_8 to 10 decimal places.

$x_8 = f(x_7)$

$x_8 =$ 1.365 916 733 390 04

(d) *Utiliser la table pour calculer* / Use table to compute a_5.

$$a_5 = x_5 - \frac{(\Delta x_5)^2}{\Delta^2 x_5}$$

$a_5 =$ 1.365 225 829 344 69

(e) *Expliquer la correspondance entre le rapport des erreurs dans la dernière colonne de la table et votre réponse en* (b) ?
Explain whether the ratio of the errors in the last column of the table agrees with your answer in part (b) ?

bonne correspondance p.c.q.

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \rightarrow \text{constante}$$

Le 2 dans ε_n^2 indique conv. d'ordre 2