D C

MAT 27 4A SOLUTION
Devoir 6
06.11 07

Ben Vallaubert

52

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{2}{n3^{n+3}} x$$

$$a_n \frac{2}{n3^{n+3}} \qquad a \quad = \frac{2^n}{(n+1)3^{n+4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{a_n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)3^n} \quad \frac{n3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{n}{(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{1}{1+\cancel{1/n}}\Big|_{\to 0}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{\cdot}{R}$$

$$R = \frac{3}{2}$$ p u un x centré à O

R doit être le même pour la dérivée
Vérification

dérivée est $\sum^{\infty} \frac{\cancel{n}2^n}{\cancel{n}3^{n+3}} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+3}} x^n$

$$\frac{2^n}{3^{n+3}} \qquad a_{n+} \quad \frac{2^{n+}}{3^{n+4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+}}{a_n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+}}{3^{n+4}} \quad \frac{3^{n+}}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \qquad \frac{2}{3}$$

DG 2

$\frac{2}{3} = \frac{1}{R}$

$R = \frac{3}{2}$ centré à $x = 0$

#55 $\sum_{3} \frac{n(n-1)(n-2)}{4} x$

$a_n \; \frac{n(n-1)(n-2)}{4}$ $\quad a_n \; \frac{(n+1)n(n-1)}{4^n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{n}\cancel{(n-1)}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2)}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{n+1}{n-2}\right)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1+1/n}{1-2/n}\right)$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{R}$

$R \; 4$ centré à x 0

R doit être le même pour la dérivée

Vérification

la dérivée est $\sum_{n=3} \frac{n^2(n-1)(n-2)}{4^n} x$

$a_n \; \frac{n^2(n-1)(n-2)}{4^n}$ $\quad a_n \; \frac{(n+1)^2 n(n-1)}{4}$

D6,3

$$\lim_{n\to} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \lim_{\to} \left| \frac{(n+1)^2 n (n\ 1)}{4} \quad \frac{4^n}{n^2(n\ \ )(n-2} \right.$$

$$\lim_{\to} \left| \frac{1}{4} \left(\frac{(n+1)^2}{n-2} \right) \right.$$

$$\lim_{\infty} \ 4 \left(\frac{(1+1/n)^2}{1\ \ 2/n} \right)$$

4

$\frac{1}{4}$ R

$R = 4$ centré a x 0

#58 $\sum_n \frac{(4n)!}{(n!)^4}$

$a_n \ \frac{(4n)}{n\ )^4}$ $\quad a_n \ \frac{(4(n+1))!}{((n+1)!)^4}$

$$\lim_{n\ \infty} \frac{a_{n+.}}{a_n} \quad \lim_{n} \frac{(4(n+1))!}{((n+1)!)^4} \ \frac{(n!)^4}{(4n)}$$

$$\lim_{n} \left| \frac{4(n+1)\cdot(4(n+1)-1)\cdot(4(n+1)-2)\cdot(4(n+1)-3)(4n)!(}{((n+1)n!)^4 \quad (4n)!} \right.$$

$$\lim_{\to} \left| \frac{4(n+1)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(n!)^4}{(n+1)^4 \quad (n!)^4} \right|$$

$$\lim_{n} \left| \frac{4(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^3} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4(4+3/n)(4+2/n)(4+1/n)}{(1+1/n)^3} \right|$$

4^4

256

256 R $\Rightarrow$ R $\underline{\underline{256}}$ tré x 0

R doit être le même pour la dérivée
Vérification

la dérivée est $\sum^{\infty} \frac{n\,(4n)!}{(n!)} x^n$

$a : \frac{n\,(4n)}{n\;)^4}$ $\qquad a_{n+}$ $\frac{(n+1}{((n+}$ $4(n+$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(4(n+1))!}{((n+1)!)^4} \cdot \frac{(n!)^4}{n(4n)!} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cdot 4(n+1)\cdot(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!(n!)^4}{((n+1)n!)^4 \cdot n\;(4n)!} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4\;(n+1)^2\;(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^4 \cdot n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4\;(4n+3)(4n+2)(4n+1)}{(n+1)^2 \cdot n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{4\;(4+3/n)(4+2/n)(4+1/n)}{(1+1/n)^2 \cdot 1} \right|$$

4^4

$256 \qquad \Longrightarrow \quad \underline{R = 256}$

$\bar{R}$

centre à $x=0$

#5 $\qquad y'' + x^2 = \quad + xy \quad 0$

On sait que

$y(x) \quad a_0 + a \quad + a_2x^2 \quad a_3x^3 \quad a_4x \quad + a_5x^5 \quad a_6x^6$

$y'(x) \quad a \quad + 2a_2x + 3a_3x^2 \quad 4a_4x^3 + 5a_5x^4 \quad 6a_6x^5$

$y''(x) \quad 2a_2 + 6a_3x + \quad 2a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 +$

D6

$$+\begin{cases} xy(x) & a_0x + a\,x^2 \quad a_2x \quad a_3x \quad a_4x^5 + a_5x^6 \quad a_6x^7 + \\ x^2y'(x) = a\,x^2 & 2a_2 \quad 3a_3x^4 \quad 4a_4 \quad 5a_5x^6 \quad 6a_6x^7 \\ y''(x) = 2a_2 & 6a_3x \quad 2a_4 \ ^2 + 20a_5x \quad 30a_6x' \quad 42a \quad 5 \end{cases}$$

$0 \quad Ly \quad 2a_2 + \quad a_0 + (6a_3)x + \quad 2a \quad 2a_4\ x^2 \quad 3a_2 + 20a_5)$
$+ \quad 4a_3 + 30a\ )x \ + (5a \quad + 42 \quad 7 \quad x^5 +$

Tous les coeff cients sont nuls

$x \qquad 2a_2 \quad 0 \longrightarrow a_2 \quad 0$

$x \qquad a \quad + 6a_3 \quad 0$ indéterminé)

$\Longrightarrow a_3 \quad a\ /6 \quad \frac{1}{2\ 3}a$

$x^2 \qquad 2a \ + 12a_4 \quad 0$ (a indéterminé

$\Longrightarrow a \quad a\ /6 \quad \frac{2}{3\ 4}a$

$x^3 \qquad 3a_2 \quad 20a_5 \quad 0 \Longrightarrow 20a_5 \quad 0 \Longrightarrow a_5 \quad 0$

$x \qquad 4a_3 \quad 30a_6 \quad 0 \Longrightarrow a_6 \quad \frac{4a_3}{30} \quad \frac{2a_3}{5}$

$\frac{2}{5}\left(\frac{a_0}{6}\right) = \frac{4}{5\ 6}\left(\frac{a_0}{6}\right)$

$x^5 \qquad 5a_4 + 42a_7 = 0 \Longrightarrow a_7 \quad \frac{5a_4}{42}$

$\frac{5}{42}\left(\frac{a_1}{6}\right) \quad \frac{5}{6\ 7}\left(\frac{a_0}{6}\right)$

$x^6 \qquad 6a_5 + 56a_8 \quad 0 \Longrightarrow a_8 \quad 0$

$$7a_6 + 72a_9 \quad 0 \Rightarrow a_9 \quad \frac{7a_6}{8\ 9}$$

$$\frac{7}{8\ 9}\left(\frac{4}{5\cdot 6}\left(\frac{a_0}{6}\right)\right)$$

$$8a_7 + 90a \quad 0 \Rightarrow a \quad \frac{8a_7}{9\ 10}$$

$$\frac{8}{9\ 10}\left(\frac{5}{6\cdot 7} \quad \frac{a_1}{6}\right)\right)$$

Donc on a deux solutions indépendantes

$$y \quad x \quad a_0 + a_3x^3 + a_6x^6 + a_9x \quad +$$

$$y\ (x) = \frac{a_0}{6}\left[6 \quad \left(\frac{}{2\cdot 3}\right)x^3 + \left(\frac{4}{5\cdot 6}\right)x^6 \quad \left(\frac{7}{8\cdot 9}\right)x^9 + \quad \right]$$

$$y_2 \quad x \quad a \quad x + a_4x \quad + a_7x^7 + a \quad x \quad +$$

$$y_2 \quad x \quad \frac{a}{6}\left[6 \quad \left(\frac{2}{3\ 4}\right)x^4 + \left(\frac{5}{6\cdot 7}\right)x^7 \quad \left(\frac{8}{9\cdot 10}\right)x \quad + \right.$$

Solution générale $y(x \quad y \quad x) + y_2(x)$

$$y(x) = \frac{a_0}{6}\left[6\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)x + \left(\frac{4}{5\cdot 6}\right)x \quad \left(\frac{7}{8\cdot 9} \quad x^9\right.\right] + \frac{a_1}{6}\left[6\left(\frac{2}{3\cdot 4} \quad x\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5}{6\cdot 7} \quad x^7 \quad \left(\frac{8}{9\cdot 10}\right)x \quad + \quad \right]$$

D 7

#5 4 $\quad x)y \quad y + xy \quad 0$

$y \quad a \quad + a \quad x \quad a_2x^2 \quad a_3x^3 \quad a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 +$

$y'(x \quad a \quad + 2a_2x + 3a_2x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5$

$y''(x \quad 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 \quad 20a_5x^3 + 30a_6x^4 \quad 42a_7x^5$

$xy \quad x \quad a \quad x + a \quad x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + a_5x^6 + a_6x^7$

$y(x) \quad a \quad + 2a_2x \quad 3a_3x^2 \quad 4a_4x^3 \quad 5a_5x \quad 6a_6x^5$

$y'' \quad x) \quad 2a_2 + 6a_3x + 2a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5$

$\cdot xy''(x) = -2a_2x - 6a_3x^2 - 12a_4x^3 - 20a_5x^4 - 30a_6x^5 - 42a_7x^6$

$0 \quad Ly = (-a_1 + 2a_2) + (a_0 - 4a_2 + 6a_3)x + (a \quad 9a_3 + 12a_4)x$
$+ (a_2 \quad 16a \quad 20a_5 \quad x^3 + (a_3 \quad 25a_5 \quad 30a_6)x$
$+ \quad a \quad 36a_6 \quad 42a_7)x^5 +$
$+ \left[(s+2)(s+ \quad)a_{s+2} \quad (s+ \quad)^2 a_{s+} \quad + a_{s-1}\right] x^s$

Tous les coefficients sont nuls

$x^0 \quad 1 \quad a \quad + 2a_2 \quad 0 \Rightarrow a_2 \quad \frac{a_1}{2}$ (a indéterminé)

$x \quad 3 \quad 2a_3 \quad 4a_2 + a \quad 0 \Rightarrow a_3 \quad \frac{2a_1 - a}{3}$

(a indéterminé)

$x^2 \quad 4 \quad 3a_4 \quad 9a_3 + a \quad 0 \Rightarrow a_4 \quad \frac{a_1 + 9a_3}{4 \cdot 3}$

$a_4 \quad \frac{a_1 + 9\left(\frac{-a_0 + 2a_1}{6}\right)}{4 \cdot 3} \quad \frac{6a_1 - 9a_0 + 18a}{6 \quad 4 \quad 3}$

$a_4 \quad \frac{4a_1 \quad 3a_0}{4}$

D 8

$$5\ 4a_5 \quad 6a \quad + a_2 \quad 0 \Rightarrow a_5 \quad \frac{16a_4 - a_2}{5 \cdot 4}$$

$$a_5 \quad \frac{\frac{64a_1 - 48a}{4 \cdot 6} \qquad \frac{a_1}{2}}{5\ 4} = \frac{\frac{52a_1 - 48a_0}{4\ 6}}{5\ 4}$$

$$a_5 \quad \frac{13a_1 - 12a}{5}$$

$$(s+2)(s+1 \quad a_s \ 2 + a_{s-} \qquad (s+\ )^2 a_{s+}$$

$$a_{s+2} \quad \frac{(s+1)^2 a_{s+1} - a_{s-1}}{(s+1)(s+2)}$$

Donc

$$y(x) \quad a_0 + a\ x + \frac{a}{2!}\ x^2 + \frac{2a_1 - a}{3} x^3$$

$$+ \frac{4a_1\ 3a_0}{4} x^4 + \frac{13a_1 - 12a_0}{5} x^5$$

$$+ \qquad + \frac{(s+1)^2 a_{s+1} - a_{s-1}}{(s+1)(s+2)}$$

5.28 $\quad f\ x \quad e^{2} \qquad\qquad < x <$

On pose $f\ x \quad \sum_{m=0} a_m P_m\ x) \qquad < x <$

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int f(x) P_m\ x\ dx$$

<u>Si $m = 0$</u>

$$a \quad 2 \int f(x\ P_0(x)\, dx \qquad \text{ou} \quad P\ (x$$

$$2 \int e^{2}\ dx$$

$$2 \left(\frac{1}{2} e^{2x}\right)\Big|$$

$$\frac{e^{2x}}{4}$$

$$\frac{e^{2} \quad e^{\ 2}}{4}$$

$$a_0 \quad \frac{e^{2} \quad e^{\ 2}}{4} \qquad 813$$

Si $m \quad 1$

$$a = \frac{3}{2} \int f\ x\ P\ \ x\ dx \qquad \text{ou} \quad P\ \ x \quad X$$

$$\frac{3}{2} \int e^{2x}\ \ x\, dx$$

$$u \quad x \implies du \quad dx$$
$$dv \quad e^{2}\, dx \implies v = \frac{e^{2x}}{2}$$

$$\int u\,dv \quad uv \ \int v\,du$$

donc $\int xe^{2} dx \quad \frac{xe^{2}}{2} - \int \frac{e^{2}}{2} dx$

$$\frac{xe^{2x}}{2} \quad \frac{e^{2}}{4}$$

$$2\left(xe^{2x} \quad \frac{e^{2x}}{2} \right)$$

$$a = \frac{3}{2} \; 2 \left[xe^{2x} \quad \frac{e^{2}}{2} \right]_{-1}$$

$$\frac{3}{4}\left[e^{2} \quad \frac{e^{2}}{2} \quad \left(e^{2} \quad \frac{e^{-2}}{2} \right) \right]$$

$$\frac{3}{4}\left[\frac{e^{2}}{2} + \frac{3}{2} e^{2} \right]$$

$$a \quad \frac{3}{8}\left(e^{2} + 3e^{2} \right) \approx 2923$$

Sim 2

$$a_2 \quad \frac{5}{2} \int_{-1} f(x)\, P_2 \quad x) dx \qquad \text{ou} \quad P_2(x \quad \frac{1}{2}\, 3x^{2} \;)$$

$$\frac{5}{2} \int_{-1} e^{2} \quad \frac{1}{2} \quad 3x^{2} \;) dx$$

$$\frac{5}{4} \int_{-1} \quad 3x^{2} e^{2} \quad e^{2} \;) dx$$

$$\underbrace{\frac{5}{4} \int_{-1} 3x^{2} e^{2}} \quad - \underbrace{\frac{5}{4} \int_{-1}^{1} e^{2x} dx}$$

$$\frac{5}{4} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}$$

$$\frac{5}{8} \left[e^{2} \right]_{-} \qquad \frac{5}{8} \; e^{2} \cdot e^{-2})$$

$$u \quad 3x^{2} \Longrightarrow d \quad 6x\,dx$$

$$dv \quad e^{2} \Longrightarrow v \quad \frac{e^{2}}{2}$$

D6 /

$$\int 3x^2e^2\,dx \qquad \frac{3x^2e^{2x}}{2} \qquad \int \frac{6xe^{2x}}{2}\,dx$$

$$\frac{3}{2}x^2e^2 \qquad 3\int xe^{2x}\,dx$$

$$\frac{3}{2}x^2e^{2x} \qquad 3\left(\frac{1}{2}\left(xe^2 \quad \frac{e^{2x}}{2}\right)\right)$$

$$a_2 \quad \frac{5}{4}\;\frac{3}{2}\left[x^2e^2 \quad xe^2 + \frac{e^{2x}}{2}\right] \quad \frac{5}{8} \quad e^2 \quad e^2$$

$$\frac{15}{8}\left(e^2 \; e^2 + \frac{e^2}{2} \quad \left(e^{-2} + e^{2} + \frac{e^{2}}{2}\right)\right) \quad \frac{5}{8}\left(e^2 \quad e^{-2}\right)$$

$$\frac{15}{8}\left(\frac{e^2}{2} \quad \frac{5}{2}e^{2} \quad \frac{5}{8}\left(e^2 \quad e^{2}\right)\right.$$

$$= \frac{15}{6}e^2 \quad \frac{75}{6}e^{2} \quad \frac{5}{8}e^2 + \frac{5}{8}e$$

$$\frac{5}{16}e^2 \quad \frac{65}{6}e^{2}$$

$$a_2 = \frac{5}{16}\left(e^2 \quad 13e^{2}\right) \approx \quad 759$$

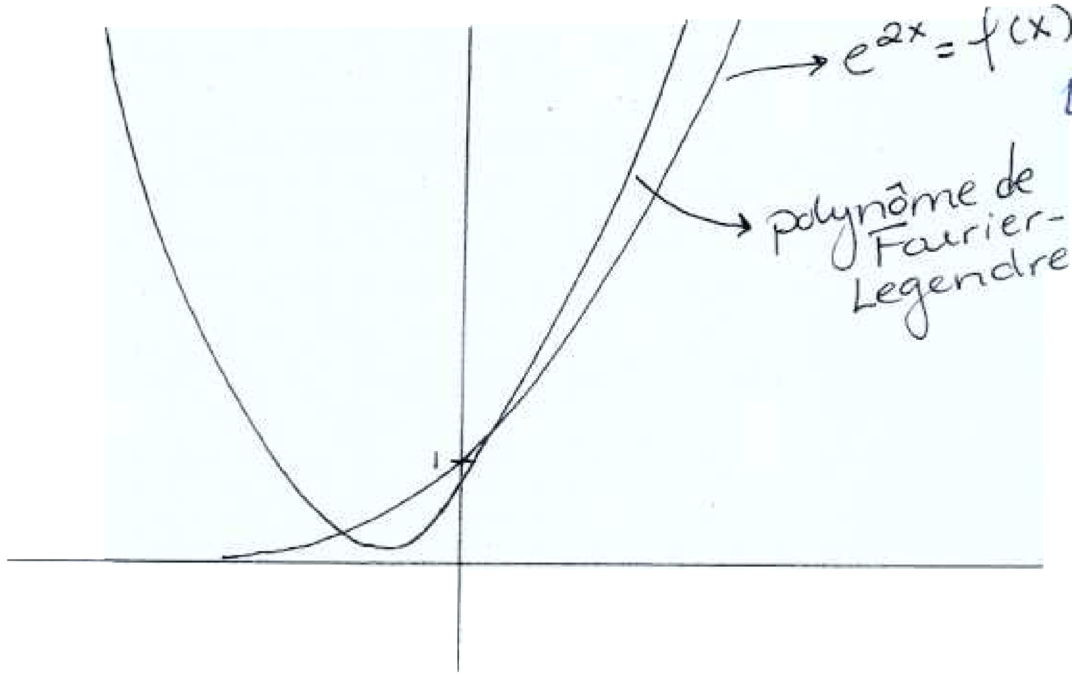
Donc $f(x \approx a P_0\, x) + a_1P_1(x) + a_2P_2\, x)$

$$\approx 813 + 2923x + 1{,}759\;\frac{1}{2}\;3x^2 \;)$$

$$813 + 2923x + 2\,639x^2 \quad 0\,880$$

$$f(x \approx 2\,639x^2 + 2\,923x + 0\,933$$

graph que au verso ⟶ / D6



te du 10 2 D6

$$N_3(h) \quad N_2 \; h \; 2 \quad + \quad \frac{N_2(h/2) - N_2(h)}{15}$$

$$N_3(0, \quad N_2 \;\; 0,2 \quad + \quad \frac{N_2(0,2) - N_2(0,4)}{15}$$

$$N_3(0,4) \quad 0 \;\; 24660853$$

D6.13

#10,2

$N_1(0{,}4) = -0{,}253225691$		
$N_1(0{,}2) = -0{,}248244235$	$N_2(0{,}4) = -0{,}24658375$	
$N_1(0{,}1) = -0{,}2470081664$	$N_2(0{,}2) = -0{,}24659614$	$N_3(0{,}4) = -0{,}24660853$

$$N(h) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right]$$

$h =$

$\frac{h}{2} = 0\ 2$

$\frac{h}{4} = 0{,}$

$$N_1(h) = N_1(0{,}4) = \frac{1}{0{,}8}\left[f(1{,}8) - f(1{,}0)\right]$$

$$= -0{,}253225691$$

$$N\ (h/2) = N_1\ (0{,}2) = \frac{}{0{,}4}\left[f(1{,}6) - f(\ {,}2)\right]$$

$$= -0{,}248244235$$

$$N\ (h/4) = N_1(0{,}1) = \frac{1}{0{,}2}\left[f(1{,}5) - f(\ 3)\right]$$

$$-0{,}247008164$$

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1(h/2) - N_1(h)}{3}$$

$$N_2(h) = N_2(0{,}4) = N_1(0{,}2) + \frac{N_1(0{,}2) - N_1(0{,}4)}{3}$$

$$= -0{,}24658375$$

$$N_2(h/2) = N_2(0{,}2) = N_1(0{,}1) + \frac{N_1(0{,}1) - N_1(0{,}2)}{3}$$

$$= -0{,}24659614$$

→ fin à la p. D6,12

Exercice n° 10.1

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

(a) Calcul numérique de la valeur de $df_n = f'(1.2)$ en omettant l'erreur de méthode.

L'erreur de méthode est $-\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$

$\Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$

$$df_n = f'(1.2) = \frac{1}{2h}\left[f(1.2+h) - f(1.2-h)\right]$$

$$\frac{1}{2(0.1)}\left(f(1.3) - f(1.1)\right) \quad \text{avec } h = 0.1$$

$$\frac{1}{0.2}\left(0.2725317930340 1 - 0.3328710836980 8\right)$$

$$= 5(-0.0603392906640 7)$$

$$= -0.3016964533203 5$$

$$df_n = -0.3016964533203 5$$

(b) Calcul de $df_e = f'(1.2)$

$$f(x) = \cosh x - \sinh x$$

$$f'(x) = \sinh(x) - \cosh(x)$$

$$df_e = f'(1.2) = \sinh(1.2) - \cosh(1.2)$$

$$= \frac{e^{1.2} - e^{-1.2}}{2} - \frac{e^{1.2} + e^{-1.2}}{2}$$

$$= -e^{-1.2}$$

$$-0.30119421 1$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

MAT 2784A

06.15

$\boxed{df_e = -0.30119421 1}$

(c) calcul de l'erreur

$$\varepsilon = df_n - df_e$$

$$301169645332035 \quad (-0.30119421 1)$$

$$= -0.000502242 32035$$

$\boxed{\varepsilon = -0.000502242 32035}$

(d) $$|\varepsilon| \le \frac{h^2}{6} f^{(3)}(x_0 - h)$$

$$\le \frac{(0.1)^2}{6} e^{-1.1}$$

$$\le \frac{0.01}{6} e^{-1.1}$$

$$\le 0,00054785 1395$$

Nous avons bien

$$|-0.000502242 32035| \le 0,00054785 1395$$

$$0.000502242 32035 \le 0.00054785 395$$