D4.1

MAT 2784 A
D4. SOLUTIONS

Rémi Vaillancourt
2006.10.13

3.12 - $y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = \cosh x$

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh x \\ e^x & -e^{-x} & \sinh x \\ e^x & e^{-x} & \cosh x \end{vmatrix}$$

$$\ell_3 - \ell_1 \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh x \\ e^x & -e^{-x} & \sinh x \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Det W = 0 Donc les fonctions sont linéairement dépendantes ~~puisqu'elles~~ sont sol. de $y'' = y$.

Vérification. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$a y_1 + b y_2 + c y_3 = 0$

$a e^x + b e^{-x} + c \cdot \cosh x = 0$

Soit $a = b = 1$ et $c = -2$

$e^x + e^{-x} - 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = 0$

$0 = 0$ ✓

Comme $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, les solutions sont dépendantes.

résol. plus directe

3.16 — $x, \quad x\ln x, \quad x^2\ln x \qquad 0<x<\infty$

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2\ln x \\ 1 & \ln x+1 & 2x\ln x + x \\ 0 & 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix}$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & \ln x & x\ln x \\ 1 & \ln x+1 & 2x\ln x + x \\ 0 & 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix} \; l_2 - l_1$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & \ln x & x\ln x \\ 0 & 1 & x\ln x + x \\ 0 & 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix}$$

$$x \cdot \det\begin{vmatrix} 1 & x\ln x + x \\ 1/x & 2\ln x + 3 \end{vmatrix} = (2\ln x + 3 - \ln x + 1)\, x$$

$$= x(\ln x + 2)$$

$\det W = 0$ lorsque $x = 0$ et $x = e^{-2}$.
$x = e^{-2}$ se situe entre les bornes $0<x<\infty$ donc les fonctions sont linéairement indépendantes sur $(e^{-2}, +\infty)$

Il faut dire que y_1, y_2 et $y_3 \in C^3[e^{-2}, \infty]$ et qu'elles sont solutions d'une même équ. différentielle par le Th. 3.5 (p. 50) :

$$-x(2+\ln x)\, y''' + (3+\ln x)\, y'' - \left(\frac{5}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) y' + \left(\frac{5}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}\right) y = 0$$

3.19 – $x(x-2)y'' - (x^2-2)y' + 2(x-1)y = 0$ ⊛

$y_1(x) = e^x$ est-elle solution de ⊛ ?

$y_1'(x) = e^x$

$y_1''(x) = e^x$

$x(x-2)e^x - (x^2-2)e^x + 2(x-1)e^x = 0$

$x^2 - 2x - x^2 + 2 + 2x - 2$

$= 0$

donc $y_1(x) = e^x$ est solution de ⊛

Autre solution :

Soit $y_2(x) = u(x)\,y_1(x)$

$y_2' = u'y_1 + uy_1'$

$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$

$Ly_2 = x(x-2)\left[y_1''u + 2u'y_1' + u''y_1\right] - (x^2-2)\left[y_1'u + u'y_1\right] + 2(x-1)y_1u = 0$

$= uLy_1 + x(x-2)\left[2u'y_1' + u''y_1\right] - (x^2-2)(u'y_1)$

$0 = (x^2-2x)(2u'e^x + u''e^x) + (-x^2+2)(u'e^x)$

$0 = 2x^2u'e^x + x^2u''e^x - 4xu'e^x - 2xu''e^x - x^2u'e^x + 2u'e^x$

$0 = u'(2x^2e^x - 4xe^x - x^2e^x + 2e^x) + u''(x^2e^x - 2xe^x)$

$0 = u'(x^2e^x - 4xe^x + 2e^x) + u''(x^2e^x - 2xe^x)$

Posons $v = u'$, $v' = u''$

$0 = v(x^2e^x - 4xe^x + 2e^x) + v'(x^2e^x - 2xe^x)$

$v'(2xe^x - x^2e^x) = v(x^2e^x - 4xe^x + 2e^x)$

$\frac{dv}{dx}(2xe^x - x^2e^x) = v(x^2e^x - 4xe^x + 2e^x)$

$$\frac{dv}{v} e^x(2x-x^2) = e^x(x^2-4x+2)\,dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{x^2-4x+2}{2x-x^2}\,dx$$

$$e^{\ln|v|} = e^{\ln|x|} e^{-x} + e^{\ln|x-2|}$$

$$V = x(x-2)e^{-x}$$ mais $V=u'$ donc:

$$u' = x(x-2)e^{-x}$$

$$\int du = \int (x^2-2x)e^{-x}\,dx$$

$$u(x) = -x^2e^{-x}$$

$$y_2(x) = y_1(x)\cdot u(x)$$

$$= e^x \cdot -x^2e^{-x}$$

$y_2(x) = -x^2$ est deuxième solution

Puisque l'éq. est homogène
on peut prendre

$$y_2(x) = +x^2$$

3,22 - $y'' + 3y' + 2y = 5e^{-2x}$

$r(x) = 5e^{-2x}$
$r'(x) = -10e^{-2x}$ } dim 1

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$

$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$

$y_p(x) = Axe^{-2x}$

$y'_p = Ae^{-2x} - 2Axe^{-2x}$

$y''_p = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x}$

$\cancel{4Axe^{-2x}} - 4Ae^{-2x} + 3Ae^{-2x} - \cancel{6Axe^{-2x}} + \cancel{2Axe^{-2x}} = 5e^{-2x}$

$-Ae^{-2x} = 5e^{-2x}$

$A = -5$

$y_p(x) = -5xe^{-2x}$

$\boxed{y_g(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - 5xe^{-2x}}$

3,29 - $y'' + y = 3x^2 - 4\sin x$ $\quad y(0)=0 \quad y'(0)=1$

$$\left.\begin{array}{l} r_1(x) = 3x^2 \\ r_1'(x) = 6x \\ r_1''(x) = 6 \\ r_1'''(x) = 0 \end{array}\right\} \text{dim } 3 \qquad \left.\begin{array}{l} r_2(x) = -4\sin x \\ r_2'(x) = -4\cos x \\ r_2''(x) = 4\sin x \end{array}\right\} \text{dim } 2$$

Dimension déterminés, donc méthode de coefficients indéterminées

Pose
$$y = e^{\lambda x}$$
$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y_h(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$$
$$e^{\lambda x}(\lambda^2+1) = 0$$
$$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

$$y_h(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$ ⊛

$$y_{p_1} = ax^2 + bx + c$$
$$y'_{p_1} = 2ax + b$$
$$y''_{p_1} = 2a$$

$$y''_{p_1} + y_{p_1} = r_1(x)$$
$$ax^2 + bx + (2a+c) = 3x^2$$

$$a = 3 \quad b = 0 \quad c = -2a = -6$$

$$y_{p_1}(x) = 3x^2 - 6$$ ⊛

D4.7

$$y_{p2} = ax\sin x + bx\cos x$$
$$y'_{p2} = a\sin x + ax\cos x + b\cos x - bx\sin x$$
$$y''_{p2} = a\cos x + a\cos x - ax\sin x - b\sin x - b\sin x - bx\cos x$$

$$y''_{p2} + y_{p2} = r_2(x)$$

$$a\cos x + a\cos x - b\sin x - b\sin x = -4\sin x$$
$$2a\cos x - 2b\sin x = -4\sin x$$

$$a = 0 \qquad b = 2$$

$$y_{p2} = 2x\cos x$$ ⊛

$$y_g(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

$$y_g(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 3x^2 - 6 + 2x\cos x$$

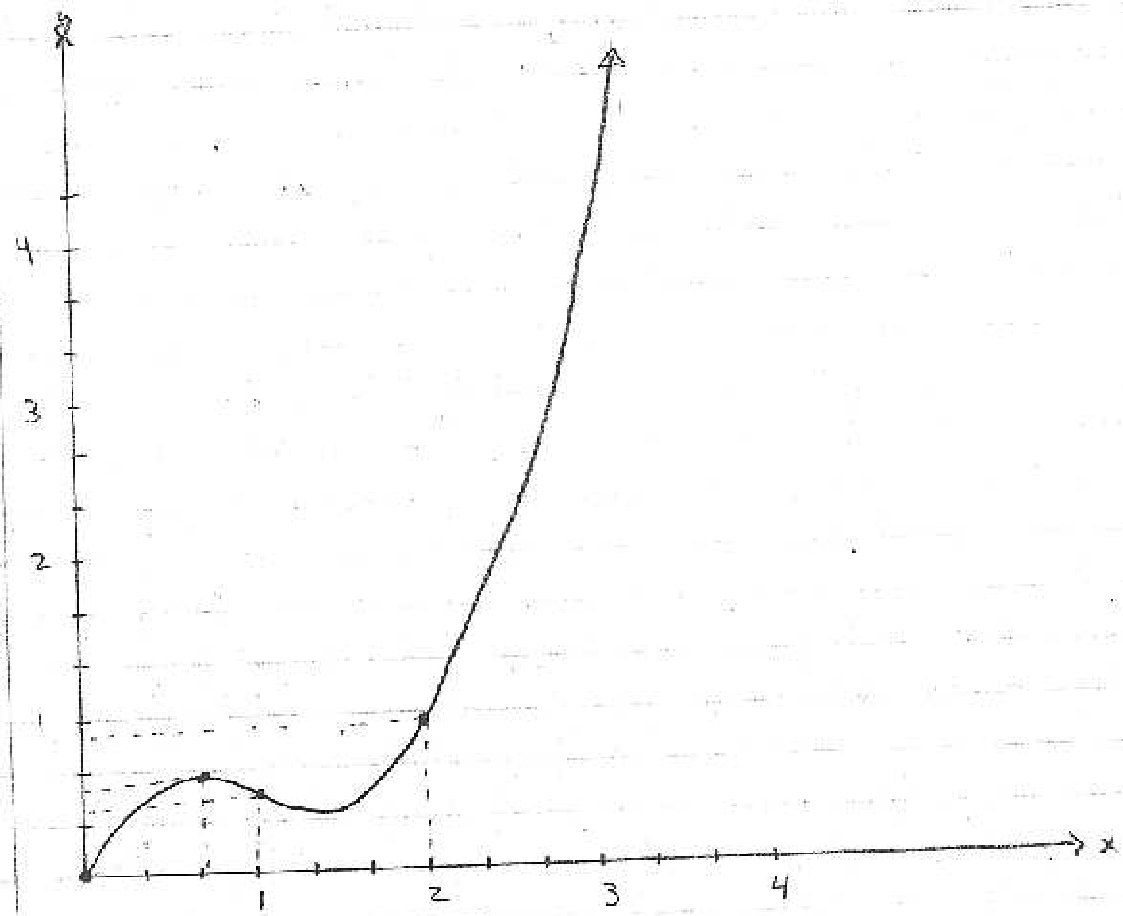
$$y(0) = C_1 - 6 = 0$$
$$C_1 = 6$$

$$y'_g(x) = -C_1\sin x + C_2\cos x + 6x + 2\cos x - 2x\sin x$$
$$y_g'(0) = C_2 + 2 = 1$$
$$C_2 = -1$$

Solution unique :

$$y_g(x) = 6\cos(x) - \sin(x) + 3x^2 - 6 + 2x\cos(x)$$

04.8



3,32 - $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}$

$r(x) = e^{-3x} x^{-3}$
$r'(x) = -3x e^{-3x} x^{-3} - 3x^{-4} e^{-3x}$
$r''(x) = \dots$

Dim ∞ donc méthode de variation des paramètres.

$y_h(x) = e^{\lambda x}(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$
$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -3$

$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$
$y_p(x) = C_1(x) e^{3x} + C_2(x) x e^{3x}$

$$\begin{bmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}(3x+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3x} x^{-3} \end{bmatrix}$$

$C_1' e^{3x} + C_2' x e^{3x} = 0$
$C_1' = -x C_2'$

$3C_1' e^{3x} + e^{3x}(3x+1) C_2' = e^{-3x} x^{-3}$
$-3x C_2' e^{3x} + e^{3x}(3x+1) C_2' = e^{-3x} x^{-3}$
$C_2' (-3xe^{3x} + e^{3x}(3x+1)) = e^{-3x} x^{-3}$
$C_2' e^{3x}(\cancel{-3x} + \cancel{3x} + 1) = e^{-3x} x^{-3}$
$C_2' = x^{-3}$

$C_1' = -x^{-2}$

$C_1 = \frac{1}{x} \qquad C_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$

$y_p(x) = \frac{e^{-3x}}{x} - \frac{e^{-3x}}{2x} = \frac{e^{-3x}}{2x}$

Sol. gén. : $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{2x}$.

#9.2) $f(8.1) = 16.94410$
$f(8.3) = 17.56492$
$f(8.6) = 18.50515$
$f(8.7) = 18.82091$

$f(8.4) = ?$

Polynôme de lagrange de degré 1
Pour $n=1$ prenons $f(8.3)$ et $f(8.6)$

$L_0 = \frac{(x-8.6)}{(x_0-8.6)}$ $L_1 = \frac{(x-8.3)}{(x_1-8.3)}$

$P_1(x) = 17.56492 \frac{(8.4-8.6)}{(8.3-8.6)} + 18.50515 \frac{(8.4-8.3)}{(8.6-8.3)}$
$\approx 11.70995 + 6.16838$

$f(8.4) \approx 17.87833$

Polynôme de lagrange de degré 2
Pour $n=2$, prenons $f(8.1)$, $f(8.3)$ et $f(8.6)$

$L_0 = \frac{(x-8.3)(x-8.6)}{(x_0-8.3)(x_0-8.6)}$ $L_1 = \frac{(x-8.1)(x-8.6)}{(x_1-8.1)(x_1-8.6)}$

$L_2 = \frac{(x-8.1)(x-8.3)}{(x_2-8.1)(x_2-8.3)}$

$P_2(x) = 16.94410 \frac{(8.4-8.3)(8.4-8.6)}{(8.1-8.3)(8.1-8.6)} + 17.56492 \frac{(8.4-8.1)(8.4-8.6)}{(8.3-8.1)(8.3-8.6)}$

$+ 18.50515 \frac{(8.4-8.1)(8.4-8.3)}{(8.6-8.1)(8.6-8.3)} \approx 17.87713$

Pour $n=3$, on a.

$$L_0 = \frac{(x-8.3)(x-8.6)(x-8.7)}{(x_0-8.3)(x_0-8.6)(x_0-8.7)}$$

$$L_1 = \frac{(x-8.1)(x-8.6)(x-8.7)}{(x_1-8.1)(x_1-8.6)(x_1-8.7)}$$

$$L_2 = \frac{(x-8.1)(x-8.3)(x-8.7)}{(x_2-8.1)(x_2-8.3)(x_2-8.7)}$$

$$L_3 = \frac{(x-8.1)(x-8.3)(x-8.6)}{(x_3-8.1)(x_3-8.3)(x_3-8.6)}$$

$$P_3(x) = 16.94410\,\frac{(8.4-8.3)(8.4-8.6)(8.4-8.7)}{(8.1-8.3)(8.1-8.6)(8.1-8.7)}$$

$$+\ 18.50513\,\frac{(8.4-8.1)(8.4-8.3)(8.4-8.7)}{(8.6-8.1)(8.6-8.3)(8.6-8.3)}$$

$$+\ 18.82091\,\frac{(8.4-8.1)(8.4-8.3)(8.4-8.6)}{(8.7-8.1)(8.7-8.3)(8.7-8.3)}$$

$$\simeq -1.69441 + 13.17369 + 11.10308 - 4.70523$$

$$f(8.4) \simeq 17.87713.$$

#9,6

n	x_n	$f(x_n)$	1ère différence divisée	2e différence divisée	3e différence divisée
0	-1	2			
			-2		
1	0	0		0,533	
			-0,667		1,600
2	1,5	-1		5,334	
			10.		
3	2	4			

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{0-2}{0-(-1)} = -2$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-0}{1,5-0} = -0,667$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{4-(-1)}{2-1,5} = 10$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0,667-(-2)}{1,5-(-1)} = 0,533$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{10-(-0,667}{2-0} = 0,533$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$
$$= \frac{5{,}334 - 0{,}533}{2-(-1)}$$
$$= 1{,}600$$

$$p_3(x) = f_0 + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$
$$= 2 + (x+1) \cdot -2 + (x+1)x \cdot 0{,}533 + (x+1)x(x-1{,}5) \cdot 1{,}600$$
$$= \cancel{2} - 2x - \cancel{2} + 0{,}533x^2 + 0{,}533x + (x^2+x)(x-1{,}5) \cdot 1{,}600$$
$$= 0{,}533x^2 - 1{,}467x + 1{,}6x^3 + 1{,}6x^2 - 2{,}4x^2 - 2{,}4x$$
$$p_3(x) = 1{,}6x^3 - 0{,}267x^2 - 3{,}867x$$

Graphique de $p_3(x)$: