Université d'Ottawa · University of Ottawa

Faculté des sciences
Mathématiques et statistique

Faculty of Science
Mathematics and Statistics

Nom / Name : SOLUTIONS

No d'ét. / Stud. No.:

MAT 2784 A

Examen final
Durée: 3h
Place: GYM F
9 décembre 2010
14:00–17:00
Prof.: Rémi Vaillancourt

Final Exam
Time: 3h
Place: GYM F
9 December 2010
14:00–17:00

Instructions:

(a) *À livre fermé. Tout type de calculatrices permis.*
Closed book. Any type of calculators is allowed.

(b) *Répondre sur le questionnaire.*
Answer on the question sheets.

(c) *Les 8 questions sont d'égale valeur.*
The 8 questions have the same value.

(d) *Donner le détail de vos calculs.*
Show all computation.

(e) *Tables* / Tables p. 13–14.

(f) *Angles en RADIANS* / Angles in RADIAN measures.
Test: $\sin 1.123456789 = 0.90160112364453$

1	/10
2	/10
3	/10
4	/10
5	/10
6	/10
7	/10
8	/10
Total	/80

Vecteurs propres multiples et vecteurs propres généralisés
Multiple eigenvalues and generalized eigenvectors

Soit une matrice A qui admet une valeur propre λ de multiplicité r et un *seul* vecteur propre associé $\boldsymbol{u}_1$. On construit les vecteurs propres généralisés $\{\boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r\}$ solutions des systèmes

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1, \quad (A-\lambda I)\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2, \quad \dots, \quad (A-\lambda I)\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_{r-1}.$$

Le vecteur propre $\boldsymbol{u}_1$ et les vecteurs propres généralisés engendrent r solutions linéairement indépendantes de $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{y}_1(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = e^{\lambda x}(x\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2), \quad \boldsymbol{y}_3(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{2}\boldsymbol{u}_1 + x\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3\right), \quad \dots.$$

585, av. King-Edward
Ottawa (Ontario) K1N 6N5 Canada

585 King Edward Avenue
Ottawa, Ontario K1N 6N5 Canada

(613) 562-5864 • Téléc./Fax (613) 562-5776
Courriel/Email: uomaths@science.uottawa.ca

Qu. 1. *Résoudre le problème à valeur initiale.* / Solve the initial value problem.

$$(1-xy)y' + y^2 + 3xy^3 = 0, \qquad y(0) = 1.$$

$(1-xy)\,dy = (-y^2 - 3xy^3)\,dx$

$(1-xy)\,dy + (y^2+3xy^3)\,dx = 0$

$(y^2+3xy^3)\,dx + (1-xy)\,dy = 0 \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 9xy^2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -y$

On cherche un facteur d'intégration pour rendre l'équation exacte.

$f(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{2y+9xy^2+y}{(1-xy)} = \dfrac{3y+9xy^2}{(1-xy)} = \dfrac{3y(1+9xy)}{(1-xy)} \neq f(x)$

$g(y) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \dfrac{3y+9xy^2}{y^2+3xy^3} = \dfrac{3y(1+3xy)}{y^2(1+3xy)} = \dfrac{3}{y} = g(y)$

Le facteur d'intégration est donc $e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3}$

On peut maintenant rendre l'équation exacte

$\frac{1}{y^3}(y^2+3xy^3)\,dx + \frac{1}{y^3}(1-xy)\,dy = 0$

$\left(\frac{1}{y}+3x\right)dx + \left(\frac{1}{y^3} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0 \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$ Donc EXACTE

$u(x,y) = \int\left(\frac{1}{y}+3x\right)dx + T(y) \qquad T'(y) = y^{-3} \qquad T(y) = \int y^{-3}\,dy$

$= \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} + T(y) \qquad T(y) = \frac{y^{-2}}{-2}$

Donc, $C = \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2y^2}$

Avec $y(0)=1$, $C = 0 + 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

La solution est donc,

$\boxed{-\frac{1}{2} = \frac{x}{y} + \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2y^2}}$

Qu. 2. *Résoudre le problème à valeur initiale.* / Solve the initial value problem.

$$x^2y'' + \frac{7}{2}xy' - \frac{3}{2}y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Équation d'Euleur - Cauchy :

On pose $y = x^m$, $y' = m x^{m-1}$, $y'' = (m-1) m x^{m-2}$

$$x^2 (m-1) m x^{m-2} + \frac{7}{2}(x m x^{m-1}) - \frac{3}{2}x^m = 0$$

$$(m^2-m) x^m + \frac{7}{2} m x^m - \frac{3}{2} x^m = 0$$

$$\left(m^2 + \frac{5}{2}m - \frac{3}{2}\right) = 0$$ on cherche les valeurs de m

On trouve : $m_1 = \frac{1}{2}$ et $m_2 = -3$ $\quad m_1 \neq m_2$

On a donc

$$y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-3}$$

$$y'(x) = \frac{C_1 x^{-1/2}}{2} - 3C_2 x^{-4}$$

Avec $y(1) = 1$ et $y'(1) = 0$, on a

$$1 = C_1 + C_2 \qquad C_2 = 1 - C_1 \quad (1)$$

$$0 = \frac{C_1}{2} - 3C_2 \quad (2)$$

(1) dans (2)

$$0 = \frac{C_1}{2} - 3(1 - C_1) \Rightarrow 3 = \frac{7}{2}C_1$$

$$C_1 = 6/7$$

$$C_2 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

La solution est donc.

$$\boxed{y(x) = \frac{6}{7}x^{1/2} + \frac{1}{7}x^{-3}}$$

Qu. 3. *Trouver la solution générale.* / Find the general solution.

Pour la partie homogène: $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x^3}$.

On pose $y = e^{\lambda x}$, on obtient le polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

$$y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$$

Pour la ~~partie~~ solution particulière:

$y_p = A(x)\, e^{-3x} + B(x)\, x e^{-3x}$ on trouve par variation des paramètres

$$\begin{bmatrix} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{e^{-3x}}{x^3} \end{bmatrix}$$

$$A' e^{-3x} + B' x e^{-3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad A' = -B'x \quad (1)$$

$$-3A'e^{-3x} + B'(e^{-3x} - 3xe^{-3x}) = \frac{e^{-3x}}{x^3} \quad (2)$$

(1) dans (2)

$$-3(-B'x)e^{-3x} + B'e^{-3x} - 3xe^{-3x}B' = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

$$3B'xe^{-3x} + B'e^{-3x} - 3B'xe^{-3x} = \frac{e^{-3x}}{x^3} \quad \Rightarrow \quad B'e^{-3x} = \frac{e^{-3x}}{x^3}$$

$$B' = \frac{1}{x^3}$$

$$A' = -\frac{1}{x^2}$$

$$A = \int A'\,dx = \int -\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x}$$

$$B = \int B'\,dx = \int \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{-2x^2}$$

On a donc, $y_p = \dfrac{e^{-3x}}{x} - \dfrac{1\, \cancel{x} e^{-3x}}{2x^2} = \dfrac{e^{-3x}}{x} - \dfrac{1\, e^{-3x}}{2x} = \dfrac{1 e^{-3x}}{2x}$

On sait que

$y_g = y_h + y_p$

$$\boxed{y_g = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{2x}}$$

Qu. 4. *Résoudre* / Solve :

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

n.b. : *Voir page titre* / See front page.

$y' = Ay$ où $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (3-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)$$

on a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$

$(A - \lambda I)u = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posons $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ $\quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

on sait que $(A - \lambda I)V = u \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad V_2 = 1$, $V_3 = 0$, $V_1 = 0 \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

on sait que $(A - \lambda I)W = V \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad W_2 = 0$, $W_3 = 1$, $W_1 = 0 \Rightarrow W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

on a donc

$$y = C_1 e^{3x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{3x}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + C_3 e^{3x}\left(\frac{x^2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

avec $y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \\ C_3 = 2 \end{matrix}$$

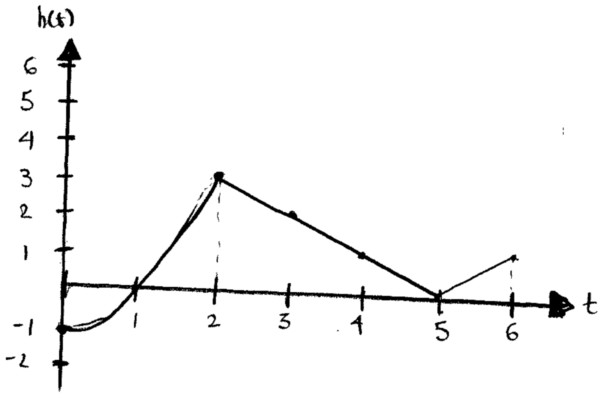
$$\boxed{y = 2e^{3x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - e^{3x}\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 2e^{3x}\left(\frac{x^2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}$$

Qu. 5. *Tracer $h(t)$ sur $[0,6]$ (2/10), développer $h(t)$ suivant la fonction $u(t-a)$ d'Heaviside (3/10) et trouver la transformée de Laplace de $h(t)$ (5/10).*

Sketch the graph of $h(t)$ on $[0,6]$ (2/10), expand $h(t)$ in terms of Heaviside's function $u(t-a)$ (3/10) and find the Laplace transform of $h(t)$ (5/10).

$$h(t) = \begin{cases} -1+t^2, & 0 \le t < 2, \\ 5-t, & 2 \le t < 5, \\ t-5, & 5 \le t. \end{cases}$$

n.b. : $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$.



$(t) = (-1+t^2) - u(t-2)(-1+t^2) + u(t-2)(5-t) - u(t-5)(5-t) + u(t-5)(t-5)$

$(t) = -1+t^2 - u(t-2)(-1+((t-2)+2)^2) - u(t-2)(t-2) + 3u(t-2) + u(t-5)(t-5) + u(t-5)(t-5)$

$(t) = -1+t^2 - u(t-2)(-1+(t-2)^2+4(t-2)+4) - u(t-2)(t-2) + 3u(t-2) + 2u(t-5)(t-5)$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s^3} - e^{-2s}\left(\frac{3}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2}\right) - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{3e^{-2s}}{s} + \frac{2e^{-5s}}{s^2}$$

$$= -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} - \cancel{\frac{3e^{-2s}}{s}} - \frac{2e^{-2s}}{s^3} - \frac{4e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \cancel{\frac{3e^{-2s}}{s}} + \frac{2e^{-5s}}{s^2}$$

$$\boxed{= \frac{-1}{s} + \frac{2}{s^3} - \frac{2e^{-2s}}{s^3} - \frac{5e^{-2s}}{s^2} + \frac{2e^{-5s}}{s^2}}$$

Qu. 6. *Résoudre par transformation de Laplace.* / Solve by Laplace transforms.

$$y'' + 5y' + 6y = \delta(t-2), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

n.b. : $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}$.

$$s^2 Y(s) - sY(0) - Y'(0) + 5(sY(s) - Y(0)) + 6Y(s) = e^{-2s}$$

$$s^2 Y(s) - 1 + 5sY(s) + 6Y(s) = e^{-2s}$$

$$Y(s)(s^2+5s+6) = e^{-2s} + 1$$

$$Y(s) = \frac{e^{-2s}+1}{(s+2)(s+3)}$$

On utilise les fractions partielles :

$$\frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow 1 = (s+3)A + (s+2)B$$

$$1 = As + 3A + Bs + 2B$$

$$A + B = 0 \qquad A = -B$$

$$3A + 2B = 1$$

$$-3B + 2B = 1$$

$$B = -1 \qquad A = 1$$

Donc on a $\dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}$

$$Y(s) = e^{-2s}\left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}\right) + \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = u(t-2)\left(e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)}\right) + e^{-2t} - e^{-3t}$$

$$\boxed{y(t) = u(t-2)\left(e^{-2(t-2)} - e^{-3(t-2)}\right) + e^{-2t} - e^{-3t}}$$

Qu. 7. *Soit* / Let $f(x) = x \ln x$.

Par Richardson, extrapoler $f'(2)$ *obtenue par différence centrée avec* $h = 0.2, 0.1, 0.05$.
By Richardson, extrapolate $f'(2)$ obtained by central difference with $h = 0.2, 0.1, 0.05$.

$$N_1(0.2) = N(0.2) = \frac{1}{0.4}[f(2.2) - f(1.8)] = \boxed{1,69147549}$$

$$N_1(0.1) = N(0.1) = \frac{1}{0.2}[f(2.1) - f(1.9)] = \boxed{1,692730201}$$

$$N_1(0.05) = N(0.05) = \frac{1}{0.1}[f(2.05) - f(1.95)] = \boxed{1,693042994}$$

Ensuite / Next

$$N_2(0.2) = N_1(0.1) + \frac{N_1(0.1) - N_1(0.2)}{3} = \boxed{1,693148438}$$

$$N_2(0.1) = N_1(0.05) + \frac{N_1(0.05) - N_1(0.1)}{3} = \boxed{1,693147258}$$

Enfin / Finally

$$N_3(0.2) = N_2(0.1) + \frac{N_2(0.1) - N_2(0.2)}{15} = \boxed{1,693147179}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x \ln x\right) = \ln x + 1$$

Calculer $f'(2)$ *exactement et vérifier que* $N_3(0.2)$ *est exacte à 6 décimales près :*
Compute $f'(2)$ exactly and verify that $N_3(0.2)$ is exact to 6 decimals:

$$A := \frac{d}{dx}(x \ln x)\bigg|_{x=2} = \boxed{1,693147181}$$

$$\left|A - N_3(0.2)\right| = \boxed{1,5599 \times 10^{-9}} \leq 10^{-6}.$$

Qu. 8. MATLAB ode23 *pour* / for $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + (1/2)h, y_n + (1/2)k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + (3/4)h, y_n + (3/4)k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + (2/9)k_1 + (1/3)k_2 + (4/9)k_3), \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + (2/9)k_1 + (1/3)k_2 + (4/9)k_3,$$

avec estimation de l'erreur locale / with local error estimate:

$$E_{n+1} = -\frac{5}{72}k_1 + \frac{1}{12}k_2 + \frac{1}{9}k_3 - \frac{1}{8}k_4.$$

Compléter les 5 petites cases pour l'équadif et les 8 ***grandes cases à 6 décimales***:

Fill the 5 small boxes for the ode and the 8 **long boxes to six decimals**:

$$y' = y^2 - 2y + x, \qquad y(1) = 0, \qquad h = 0.1.$$

Pour / For $n = 0$:

$f(x,y) =$ y² - 2y + x $x_0 =$ 1 $y_0 =$ 0 $h =$ 0,1

$k_1 =$ 0,100000 $= 0{,}1(0 - 2.0 + 1)$

$k_2 =$ 0,095250 $= 0{,}1(0{,}05^2 - 2.0{,}05 + 1{,}05)$

$k_3 =$ 0,093723 $= 0{,}1(0{,}0714375^2 - 2.0{,}0714375 + 1{,}075)$

$k_4 =$ 0,091789

$y_1 =$ 0,095627

$E_1 =$ $-6{,}690278 \times 10^{-5}$

Pour / For $n = 1$:

$x_1 =$ 1,1 $y_1 =$ 0,095627

$k_1 =$ 0,091789