RÉMI VAILLANCOURT D 5.1

Côte du cours : MAT 2784 A

Numéro du devoir : 5

Date 2010.11.03

5.2) Trouver les transformées de Laplace de $f(t)$

$$f(t) = t^2 + at + b$$

$$\Rightarrow F(s) = F(t^2) + F(at) + F(b)$$

$$= F(t^2) + a\,F(t) + b\,F(1)$$

$$= \frac{2!}{s^{2+1}} + a\,\frac{1!}{s^{1+1}} + b\cdot\frac{1}{s}$$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} \quad \checkmark$$

5.4) $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$

$$= \sin(\omega t)\cos\theta + \cos(\omega t)\sin\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \cos\theta\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\theta\,\frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \checkmark$$

5.7) $f(t) = 3\cosh 2t + 4\sinh 5t$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = 3\,F(\cosh 2t) + 4\,F(\sinh 5t)$$

$$= 3\,\frac{s}{s^2-2^2} + 4\,\frac{5}{s^2-5^2}$$

$$= \frac{3s}{s^2-4} + \frac{20}{s^2-25} \quad \checkmark$$

D 5.2

5.15) Trouver les transformées de Laplace inverses de $F(s)$

$$F(s) = \frac{4(s+1)}{s^2-16} = \frac{4s}{s^2-4^2} + \frac{4}{s^2-4^2}$$

$$= 4\,\frac{s}{s^2-4^2} + \frac{4}{s^2-4^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = 4\cosh 4t + \sinh 4t$$

5.25) $$F(s) = \frac{3s^2+8s+3}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{-s+3}{s^2+9}$$

$$= \frac{s}{s^2+1^2} - \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \cos t - \cos 3t + \sin 3t$$ ✓

5.26) $$F(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)} = \frac{s-1}{s^2} + \frac{-s+1}{s^2+1}$$ ← ingénieux

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$A = 1$

$B = -1$

$C = -1$

$D = 1$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2+1^2} + \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = 1 - t - \cos t + \sin t$$ ✓

9.2) Soit $f(x) = x^2 e^{-x}$ Utiliser l'extrapolation de Richardson avec $h = 0{,}4$, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$ pour affiner la valeur de $f'(1{,}4)$ obtenue par la différence centrée (DN. 5)

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

$$N_1(0{,}4) = N(0{,}4) = \frac{f(1{,}8) - f(1{,}0)}{0{,}8} = 0{,}209611$$

$$N_1(0{,}2) = N(0{,}2) = \frac{f(1{,}6) - f(1{,}2)}{0{,}4} = 0{,}207839$$

$$N_1(0{,}1) = N(0{,}1) = \frac{f(1{,}5) - f(1{,}3)}{0{,}2} = 0{,}207321$$

$N_1(0,4) = 0,209611$

$N_1(0,2) = 0,207839$ $\quad N_2(0,4) = 0,207248$

$N_1(0,1) = 0,207321$ $\quad N_2(0,2) = 0,207148$ $\quad N_3(0,4) = 0,207141$

On a :

$$N_2(0,4) = N_1(0,2) + \frac{N_1(0,2) - N_1(0,4)}{3} = 0,207248$$

$$N_2(0,2) = N_1(0,1) + \frac{N_1(0,1) - N_1(0,2)}{3} = 0,207148$$

Enfin,

$$N_3(0,4) = N_2(0,2) + \frac{N_2(0,2) - N_2(0,4)}{15} = 0,207141$$

les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessus. ✓

9.4) Évaluer $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ par la méthode de Simpson (composée) avec $n = 2m = 10$.

On a : $a = 0,\ b = 1,\ n = 2m = 10,\ f(x) = \frac{1}{1+x}\ /[0,1]$

$$\Rightarrow h = \frac{b-a}{2m} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Alors,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{h}{3}\Big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\Big] \quad \text{où } x_{i+1} - x_i = h$$

$$= \frac{1}{10\times 3}\Big[f(0) + 4f(0,1) + 2f(0,2) + 4f(0,3) + 2f(0,4) + 4f(0,5) + 2f(0,6) + 4f(0,7) + 2f(0,8) + 4f(0,9) + f(1,0)\Big]$$

$$= \frac{1}{30}\Big[\frac{1}{1+0} + \frac{4}{1,1} + \frac{2}{1,2} + \frac{4}{1,3} + \frac{2}{1,4} + \frac{4}{1,5} + \frac{2}{1,6} + \frac{4}{1,7} + \frac{2}{1,8} + \frac{4}{1,9} + \frac{1}{2}\Big]$$

$$= \frac{1}{30} \times 20,794507$$

$$\approx 0,693150$$ ✓

Donc $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,693150$$