D 2.1

MAT 2784 A
2010.10.01

RÉMI VAILLANCOURT

DEVOIR 2

1.23 $(ye^x + 2e^x + y^2)\,dx + (e^x + 2xy)\,dy = 0 \qquad y(0) = 6$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

$M = ye^x + 2e^x + y^2 \qquad N = e^x + 2xy$

$\frac{dM}{dy} = e^x + 2y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x + 2y$

EXACTE

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + T(y)$$

$$= \int (ye^x + 2e^x + y^2)\,dx + Ty$$

$$= ye^x + 2e^x + xy^2 + T(y)$$

Pour $N = e^x + 2xy$, on voit qu'il n'y a pas de $T'(y) \Rightarrow T(y) = 0$

Donc, la solution générale est

$$C = ye^x + 2e^x + xy^2$$

À l'aide de $y(0) = 6$, on trouve

$$C = 6e^0 + 2e^0 + 0.6^2$$

$$C = 8$$

On a donc comme solution :

$$\boxed{8 = ye^x + 2e^x + xy^2}$$

1.30 $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$

$M_y = 4xy - 9y^2 \neq N_x = -3y^2$

$f(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{7 - 3xy^2} \neq f(x)$

$g(y) \quad \dfrac{M_y - N_x}{M} = \dfrac{4xy - 9y^2 + 3y^2}{2xy^2 - 3y^2} = \dfrac{y(4x - 6y)}{y^2(2x - 3y)}$

$= \dfrac{2(2x-3)}{y(2x-3)} = \dfrac{2}{y} = g(y)$

$u(y) = e^{-\int g(y)\,dy} = e^{\int -\frac{2}{y}dy}$

$= e^{-2\ln y} = \dfrac{1}{y^2}$

En multipliant l'équation par $\frac{1}{y^2}$, on obtient :

$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy$

$M_y = -3 = N_x = -3 \rightarrow$ EXACTE

$u(x,y) = \int M(x,y)dx + T(y)$

$= x^2 - 3xy + T(y)$

$-3x + T'(y) = -3x + \frac{7}{y^2}$

$T'(y) = \dfrac{7}{y^2} \Rightarrow T(y) = \dfrac{-7}{y}$

On obtient la solution :

$\boxed{C = x^2 - 3xy - \frac{7}{y}}$

1.35 $x(\ln x)\,y' + y = 2\ln x$ Équation linéaire

$$y' + \frac{y}{x(\ln x)} = \frac{2}{x} \quad x \neq 0$$

Forme $y' + f(x)y = r(x)$

facteur intégration est

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x\ln(x)}} = \ln(x)$$

On a que :

$$d(\ln(x)\,y) = \frac{2\ln x\,dx}{x}$$

$$\ln(x)\,y(x) = \int \frac{2\ln x\,dx}{x} + C$$

$$= \frac{2\ln^2 x}{2} + C$$

$$y(x) = \frac{\ln^2 x}{\ln x} + \frac{C}{\ln x}$$

$$y(x) = \ln x + \frac{C}{\ln x}$$

1.37 $y' + 3x^2 y = x^2$ $y(0) = 2$

forme $y' + f(x)y = r(x)$

facteur d'intégration

$$e^{\int 3x^2} = e^{x^3}$$

$$\cancel{d}(e^{x^3} y)' = x^2 e^{x^3} \qquad u = x^3 \quad du = 3x^2$$

e^{x^3}

$$e^{x^3} y(x) = \int x^2 e^{x^3} + C$$

$$= \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

Solution générale : $y(x) = \dfrac{e^{x^3}}{3e^{x^3}} + \dfrac{C}{e^{x^3}} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{C}{e^{x^3}}$

$$2 = \frac{1}{3} + \frac{C}{e^0}$$

$$\Rightarrow C = 5/3$$

$$\boxed{\text{Solution unique : } y = \frac{1}{3} + \frac{5}{3e^{x^3}}}$$

1.46 $y^2 = cx^3$ $\qquad C = \frac{y^2}{x^3}$

$y^2 - cx^3 = 0$

$Fx = -3cx^2 \quad Fy = 2y \qquad m = +\frac{3cx^2}{2y}$

$$m = \frac{3\left(\frac{y^2}{x^3}\right)x^2}{2y} = \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

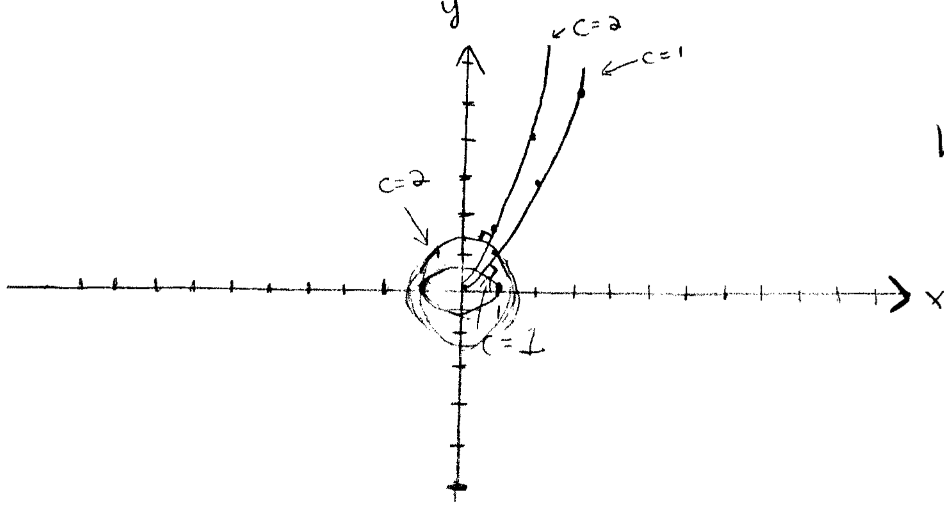
$$y'\text{orth} = -\frac{2x}{3y}$$

$$3y\,dy = -2x\,dx$$

$$\int 3y\,dy = \int -2x\,dx + c$$

$$\frac{3y^2}{2} = -x^2 + c \qquad \boxed{\frac{3y^2}{2} + x^2 = C}$$

(Famille de courbe orthogonale



VOIR GRAPHIQUE À LA FIN

2.4 $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(\frac{1}{4})}}{2.1} = -\frac{1}{2} \quad (\text{Cas III})$$

la solution générale est

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-1/2 x}$$

On a, $1 = C_1 e^{-1/2 \cdot 2} + C_2 \cdot 2 e^{-1/2 \cdot 2}$

$$1 = C_1 e^{-1} + 2C_2 e^{-1}$$

et,

$$y'(x) = -\frac{1}{2}C_1 e^{-1/2 \cdot x} + C_2\left(e^{-1/2 x} - \frac{1x}{2}e^{-1/2 x}\right)$$

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot e^{-1} + C_2 e^{-1} - C_2 e^{-1}$$

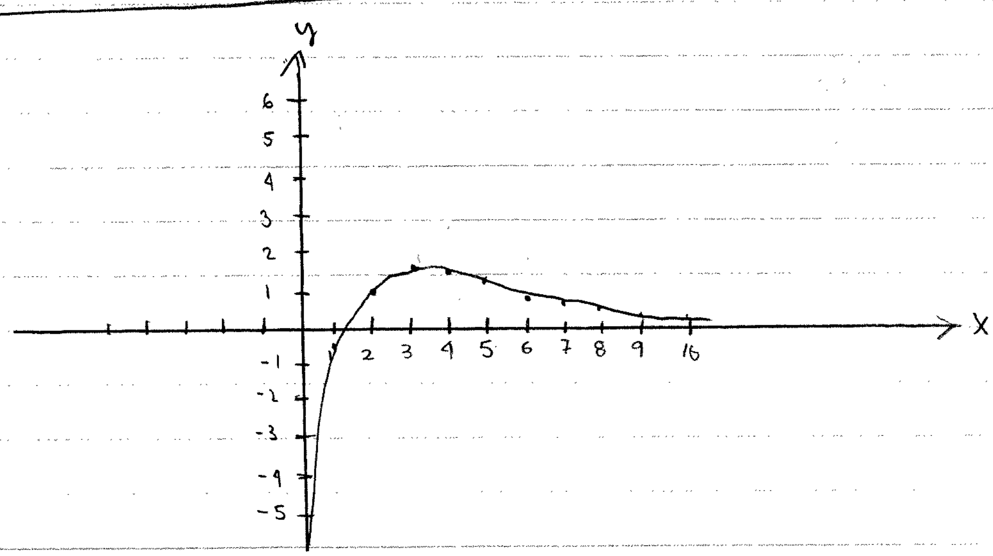
$$C_1 = -2e$$

$$1 = -2ee^{-1} + 2C_2 e^{-1}$$

$$C_2 = \frac{3}{2}e$$

Solution unique est

$$\boxed{y = -2e^{1-x/2} + \frac{3x}{2}e^{1-\frac{x}{2}}}$$



7.9

$g(x) = 1 + \sin^2 x$

$x_0 = 1$

n	x_n
0	1
1	1,708073418
2	1,981247308
3	1,840761872
4	1,928872054
5	1,877168913 ✓
6	1,909036155

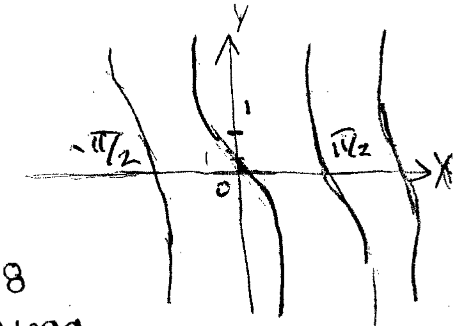
$g'(x) = 2\cos x \cdot -\sin x$

$g'(1{,}909036155) \neq 0$

Donc convergence d'ordre ✓

7.14 $x_0 = 1$ et $x_1 = 0{,}5$

$f(x) = e^{-x} - \tan x$



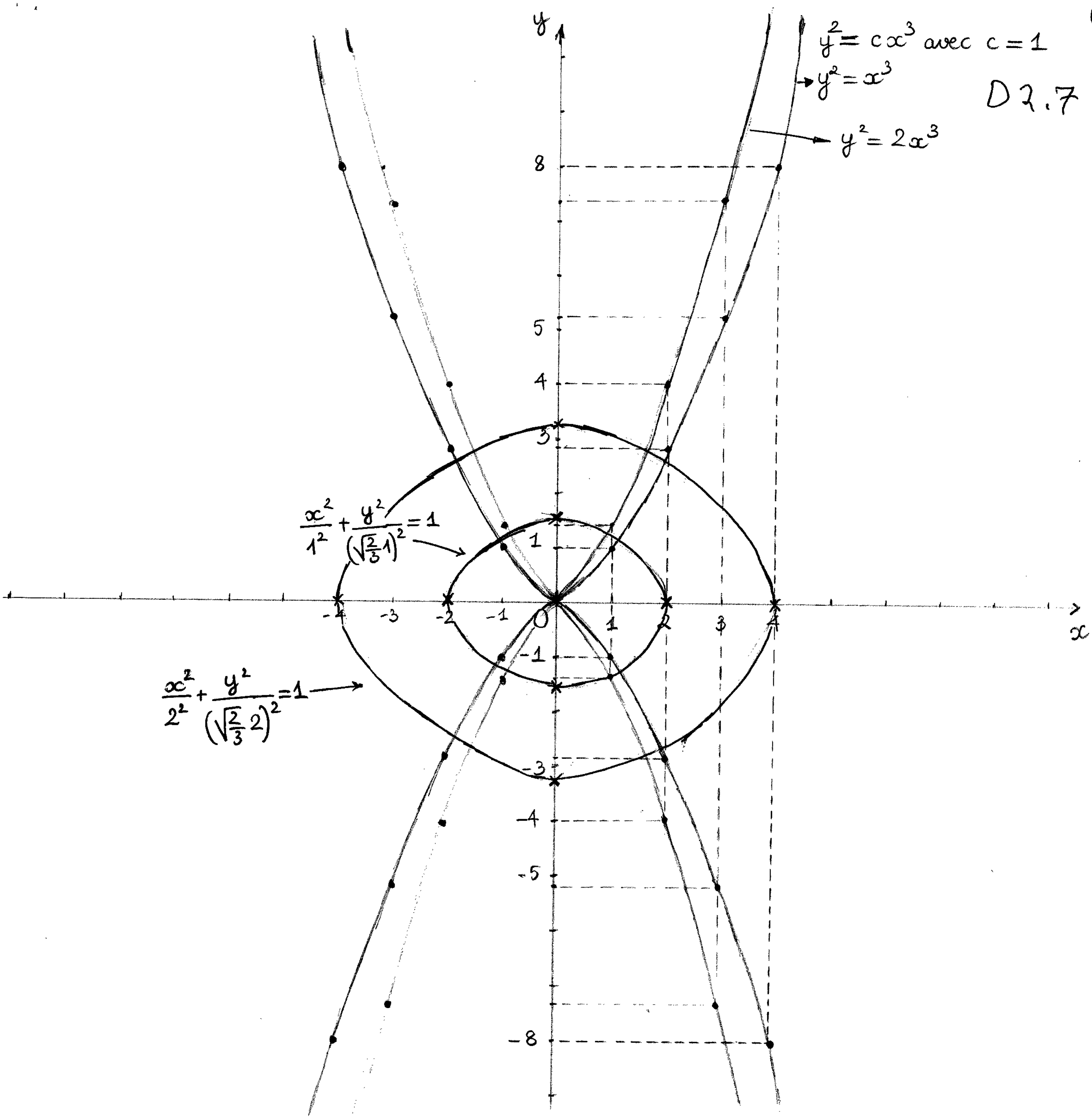
n	x_n	$f(x_n)$
0	1	-1,18952828
1	0,5	0,0602281699
2	0,5240959628	0,0140770184
3	0,5314457103	$-7{,}06099038 \times 10^{-4}$
4	0,531390755[illegible]	$1{,}9636577 \times 10^{-7}$
5	0,5313908567	

La racine serait de 0,5313908567 à 6 décimales près

$f'(x) = -e^{-x} - \sec^2(x)$

$f'(0{,}5313908567) = -1{,}9332$

Donc, la méthode converge d'ordre 1,618 vers une racine simple ✓



2.4) Résoudre le problème à valeur initiale et tracer les solution $y(x)$ pour $x \geqslant x_0$

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0 \quad , \; y(2) = 1 \; , \; y'(2) = 1$$

Posons $y(x) = e^{\lambda x}$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Alors $\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + \frac{1}{4} e^{\lambda x} = 0$

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4}\right) = 0$$