D 1, 1

24 Septembre 2010
MAT 2784 A

RÉMI VAILLACOURT

Devoir 1

※ 1.5. $y' \sin x = y \ln y \to \frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y$

$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$

$\to \int \frac{dy}{y \ln y} = \int \csc x + c_1$

posons : $u = \ln y \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{y} \quad du = \frac{1}{y} dy$

$\int \frac{du}{u} = \ln|\csc x - \cot x| + c_1$

$\ln|\ln|y|| = \ln|\csc x - \cot x| + c_1$

$e^{\ln|\ln|y||} = e^{\ln|\csc x - \cot x|} \cdot e^{c_1} \qquad e^{c_1} = c_2$

$\ln|y| = |\csc x - \cot x| \cdot c_2$

$y = e^{|\csc x - \cot x| \cdot c_2}$

$y = e^{c_2 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)} \qquad (c_2 = c)$

Réponse : $\boxed{y = e^{c\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)}}$

※ 1.6. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

$(1+x^2)dy = -(1+y^2)dx \to \frac{dy}{(1+y^2)} = -\frac{dx}{(1+x^2)}$

$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = -\int \frac{dx}{(1+x^2)} + c$

$\arctan y = -\arctan x + c$

$\tan(\arctan y) = \tan(-\arctan x + c)$

$y = \tan(-\arctan x + c)$

$\boxed{\text{Réponse : } y = \tan(c - \arctan x)}$

※ 1.7. $y' \sin x - y \cos x = 0$ où $y(\pi/2) = 1$

$\frac{dy}{dx} \sin x - y \cos x = 0$

$\to \frac{dy \sin x}{dx} = y \cos x \to \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx \to \frac{dy}{y} - \cot x \, dx = 0$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x\, dx + C_1$$

$\ln|y| = \ln|\sin x| + c_1$

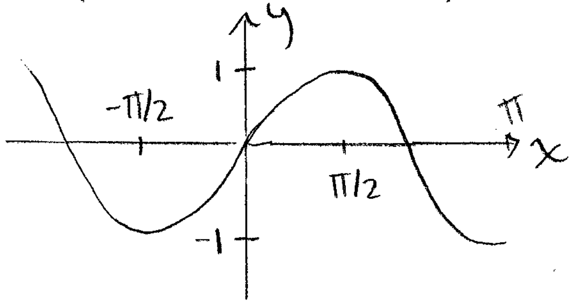
$e^{\ln|y|} = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^{c_1}$ $\qquad e^{c_1} = C$

$y = C \sin x$

on sait que quand $x = \pi/2$ $y = 1$

$1 = C \sin(\pi/2)$ $\qquad \left(\frac{1}{1}\right) = C = 1$

donc $y = \sin x$ qui représente une fonction sinusoïdale



Réponse: $y = \sin x$

1.10. $(x+y)dx - x\,dy = 0$ $(*)$

posons $y = xu$ $\quad dy = x\,du + u\,dx$

$(*)$ devient : $(x + xu)dx - x(u\,dx + x\,du) = 0$

$(x + xu)dx - xu\,dx - x^2 du = 0$

$(x + xu - xu)dx - x^2 du = 0$

$\frac{x\,dx}{x^2} = du \qquad \int du = \int \frac{dx}{x} + c$

$u = \ln|x| + c \qquad$ (mais $u = y/x$)

$\frac{y}{x} = \ln|x| + c$

$\boxed{\text{Réponse: } y = x\ln x + cx}$

1.12. $xy' = y + x\cos^2(y/x) \rightarrow \frac{x\,dy}{dx} = y + x\cos^2(y/x)$

$(*)$ $y + x\cos^2(y/x)dx - x\,dy = 0\,dx$

on pose $y = xu$ $\quad dy = x\,du + u\,dx$

$(*)$ devient : $(ux + x\cos^2(ux/x))dx - x(x\,du + u\,dx) = 0$

$(ux + x\cos^2(u))dx - x^2 du - xu\,dx = 0$

$(x\cos^2(u))dx = x^2 du.$

$x(\cos^2(u)\,dx) = x(x\,du)$

$\rightarrow \cos^2 u\,dx = x\,du$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \rightarrow \int \sec^2 u \, du = \ln|x| + C_1$$

$$\tan u = \ln|x| + C_1 \rightarrow \arctan(\tan u) = \arctan(\ln|x| + C_1)$$

$$u = \arctan(\ln|x| + C_1) \qquad u = y/x$$

$$\frac{y}{x} = \arctan(\ln|x| + C_1)$$

$$\boxed{\text{Réponse: } y = x \arctan(\ln|x| + C)}$$

#1.14. $(3x^2 + 9xy + 5y^2)dx - (6x^2 + 4xy)dy = 0$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} M(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 x^2 + 9\lambda^2 xy + 5\lambda^2 y^2 \\ N(\lambda x, \lambda y) = -(6\lambda^2 x^2 + 4\lambda^2 xy) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda^2 \\ \text{équation degré } \underline{2} \end{array}$$

posons: $y = xu \quad dy = x\,du + u\,dx$

$$(3x^2 + 9x^2u + 5x^2u^2)dx + (-6x^2 - 4x^2u)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$(3x^2 + 9x^2u + 5x^2u^2)dx - 6x^3 du - 6x^2u\,dx - 4x^3u\,du - 4x^2u^2dx = 0$$

$$(3x^2 + 9x^2u + 5x^2u^2 - 6x^2u - 4x^2u^2)dx - (6x^3 + 4x^3u)du = 0$$

$$(3x^2 + 3x^2u + x^2u^2)dx = (6x^3 + 4x^3u)du$$

$$x^2(3 + 3u + u^2)dx = x^3(6 + 4u)du$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{(4u + 6)}{(u^2 + 3u + 3)} du$$

$$\int \frac{dx}{x} + C_1 = 2\int \frac{(2u+3)}{(u^2+3u+3)} du \qquad \text{si } v = u^2 + 3u + 3 \quad dv = 2u + 3du$$

$$\ln|x| + C_1 = 2\int \frac{dv}{v}$$

$$\ln|x| + C_1 = 2\ln|v| \rightarrow \ln|x| + C = 2\ln|u^2 + 3u + 3|$$

$$e^{\ln|x|} \cdot e^{C_1} = e^{\ln|u^2+3u+3|^2} \qquad e^{C_1} = C_2$$

$$C_2 x = (u^2 + 3u + 3)^2 \qquad C = \frac{(u^2 + 3u + 3)^2}{x} \quad u = y/x$$

$$C = \frac{((y/x)^2 + 3(y/x) + 3)^2}{x} \qquad x = 2 \quad y = -6$$

Solution générale: $\boxed{C = \dfrac{(y/x)^2 + 3y/x + 3}{\sqrt{x}}}$

quand $x=2$ et $y=-6$

$$C = \frac{(-3)^2 + 3(-3) + 3)}{\sqrt{2}} = 3/\sqrt{2}$$

Solution unique: $\boxed{3/\sqrt{2} = \dfrac{(y/x)^2 + 3y/x + 3}{\sqrt{x}}}$

* 74. Calculer $\sqrt{5}$ par dichotomie 10^{-4}

$f(x) = x^2 - 5$

on démarre $a_0 = 2$ et $b_0 = 3$ ($\sqrt{5}$ entre 2 et 3)

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Ex: $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 5/2 = 2,5$

n	x_n	a_n	b_n	$\lvert x_{n-1} - x_n \rvert$	$f(x_n)$	$f(a_n)$
0	/	2	3	/	/	/
1	2,5	2	2,5	0,5	+	−
2	2,25	2	2,25	0,25	+	−
3	2,125	2,125	2,25	0,125	−	−
4	2,1875	2,1875	2,25	0,0625	−	−
5	2,21875	2,21875	2,25	0,03125	−	−
6	2.234375	2,234375	2,25	0,015625	−	−
7	2.2421875	2,234375	2,2421875	0,0078125	+	−
8	2,23828125	2,234375	2,23828125	0,00390625	+	−
9	2,236328125	2,234375	2,236328125	0,001953125	+	−
10	2,235350063	2,235350063	2,236328125	0.000978062	−	−
11	2.235839094	2,235839094	2,236328125	0,000489031	−	−
12	2,23608361	2,235839094	2,23608361	0.000244516	+	−
13	2.235961352	2.235961352	2,23608361	0.000122258	−	−
14	2,236022468	2,236022468	2,23608361	0,000061116	−	−

Réponse: de $\sqrt{5} \approx 2,236022468$

L'intervalle par dichotomie à 10^{-4} près de tolérance est de [2,236022468; 2,23608361]

D1.5

#7.7. $\sqrt{5}$ à 10^{-4} près . $f(x) = x^2 - 5$ (Récurrence de Newton)

$x_0 = 1$

$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$ $\quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n}$

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
0	1	/
1	3	2
2	2.33333333	0.666666666
3	2,238095238	0,095238095
4	2,2360688896	0,002026342
5	2,2360679977	0,000000919

la racine de 5 à la tolérance 10^{-4} est de 2,2360679977
En observant le numero 7,4 le nombre d'iterations est 14 tandis que dans le cas présent le nb. d'iteration est de 5 seulement. Par ailleurs, le resultat obtenu en 7,7 est beaucoup plus precis que celui en 7,4