Algoritmos Combinatórios: Sudoku via Backtracking e o Problema da Cobertura Exata

Lucia Moura
lucia@site.uottawa.ca

UFSC, Fevereiro, 2010

O jogo/puzzle Sudoku consiste de uma matriz 9×9, dividida em 9 regiões, que são submatrizes 3×3, como no exemplo abaixo.

		4		5			6	
	6		1			8		9
3					7			
	8					5		
			4		3			
		6					7	
			2					6
1		5			4		3	
	2			7		1		

A matriz é dada parcialmente preenchida com números de 1 a 9, e o objetivo é completar a matriz de modo que cada linha, coluna e região contenha cada elemento de $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Um puzzle Sudoku é válido se e somente se existe uma única solução.

Sudoku via Backtracking

Problema para discução em aula:

Crie um programa de backtracking para a solução do jogo Sudoku.

Sudoku: modelagem como um problema em grafos

Problema para discução em aula:

Modele o problema Sudoku usando um problema conhecido em grafos.

Problema da Cobertura Exata

PROBLEMA: Cobertura Exata
INSTÂNCIA: uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\mathcal{R} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.
PROBLEMA: $\mathcal{S}$ contém uma cobertura exata de $\mathcal{R}$?

Em outras palavras:
Existe $\mathcal{S}' = \{S_{x_0}, S_{x_1}, \ldots, S_{x_{l-1}}\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ está contido em um único conjunto de $\mathcal{S}'$?

Cobertura Exata como um problema envolvendo Cliques

Problema da cobertura exata:
Dada uma coleção $\mathcal{S}$ de subconjuntos de $\mathcal{R} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, existe $\mathcal{S}' = \{S_{x_0}, S_{x_1}, \ldots, S_{x_{l-1}}\} \subseteq \mathcal{S}$ tal que todo elemento de $\mathcal{R}$ está contido em um único conjunto de $\mathcal{S}'$?

Transformando em um problema de busca de clique:
$\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}\}$
Defina: $G = (V, E)$ da seguinte maneira: $V = \{0, 1, , \ldots, m-1\}$
$\{i, j\} \in E \iff S_i \cap S_j = \emptyset$
Uma cobertura exata de $\mathcal{R}$ é um clique de G que cobre $\mathcal{R}$.

Uma ordem de $\mathcal{S}$ que é boa para podas:
$\mathcal{S}$ ordenado em ordem lexicográfica decrescente.
Conjunto de opções:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_0 &= V \\ \mathcal{C}'_l &= A_{x_{l-1}} \cap B_{x_{l-1}} \cap \mathcal{C}'_{l-1}, \text{ if } l > 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_x &= \{y \in V : S_y \cap S_x = \emptyset\} \quad \text{(vertices adjacentes a } x\text{)} \\ B_x &= \{y \in V : S_x >_{lex} S_y\} \end{aligned}$$

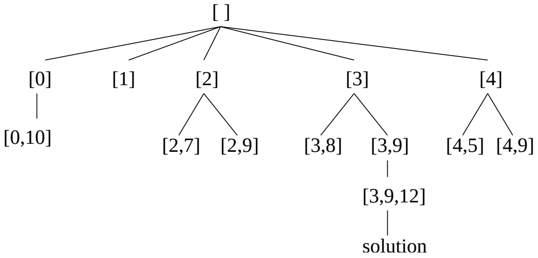
Mais podas serão usadas para reduzir $\mathcal{C}'_l$ através da remoção de H_r's, que serão definidos mais tarde.

Exemplo:

j	S_j	rank(S_j)	$A_j \cap B_j$
0	0,1,3	104	10
1	0,1,5	98	12
2	0,2,4	84	7,9
3	0,2,5	82	8,9,12
4	0,3,6	73	5,9
5	1,2,4	52	$\emptyset$
6	1,2,6	49	11
7	1,3,5	42	$\emptyset$
8	1,4,6	37	$\emptyset$
9	1	32	10,11,12
10	2,5,6	19	$\emptyset$
11	3,4,5	14	$\emptyset$
12	3,4,6	13	$\emptyset$

Cobertura Exata

i	0	1	2	3	4	5	6
H_i	0,1,2,3,4	5,6,7,8,9	10	11,12	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$



$\textsc{CoberturaExata}\ (n, \mathcal{S})$

Global X, $\mathcal{C}_l$, $l = (0, 1, \ldots)$

Procedure $\textsc{CoberturaExataBT}(l, r')$

if $(l = 0)$ then $U_0 \leftarrow \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

$r \leftarrow 0$;

else $U_l \leftarrow U_{l-1} \setminus S_{x_{l-1}}$;

$r \leftarrow r'$;

while $(r \notin U_l)$ and $(r < n)$ do $r \leftarrow r + 1$;

if $(r = n)$ then output $([x_0, x_1, \ldots, x_{l-1}])$.

if $(l = 0)$ then $\mathcal{C}'_0 \leftarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$;

else $\mathcal{C}'_l \leftarrow A_{x_{l-1}} \cap B_{x_{l-1}} \cap \mathcal{C}'_{l-1}$;

$\mathcal{C}_l \leftarrow \mathcal{C}'_l \cap H_r$;

for each $(x \in \mathcal{C}_l)$ do

$x_l \leftarrow x$;

$\textsc{CoberturaExataBT}(l+1, r)$;

Main

$m \leftarrow |\mathcal{S}|$;
Ordene $\mathcal{S}$ em ordem lexicografica decrescente
for $i \leftarrow 0$ to $m-1$ do
  $A_i \leftarrow \{j : S_i \cap S_j = \emptyset\}$;
  $B_i \leftarrow \{i+1, i+2, \ldots, m-1\}$;
for $i \leftarrow 0$ to $n-1$ do
  $H_i \leftarrow \{j : S_j \cap \{0, 1, \ldots, i\} = \{i\}\}$;
$H_n \leftarrow \emptyset$;
$\textsc{CoberturaExataBT}(0,0)$;

(U_i contém os elementos não cobertos no nível i.
r é o menor elemento não coberto U_i.)

Knuth: ligações dançantes e cobertura exata

- Don Knuth propôs um algoritmo de backtracking para solução do problema de cobertura exata que usa uma estrutura de dados chamada “dancing links” (ligações dançantes).
- Um dos algoritmos mais eficientes para solução do problema de cobertura exata.
- Referência: D. Knuth, ...

Sudoku: Modelagem como um problema de cobertura exata

Problema para discução em aula:

Modele o problema Sudoku como um problema de cobertura exata.