ELG 4576 **Systèmes de télécommunication** **Automne 2010**

Devoir 5

(pour le quiz du 20 octobre)

Question 1

$X(t)$ est un processus stationnaire avec moyenne de 0, une variance de σ_X^2 et fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$. Trouvez

(a) La fonction d'autocorrélation du processus $Y(t) = X(t) + X(t\text{-}2)$.
(b) E[Y(t)].
(c) La variance du processus $Y(t)$ en fonction de la variance de $X(t)$.
(d) Trouvez $S_Y(f)$ en fonction de $S_X(f)$.
(e) Trouvez le coefficient de corrélation ρ_{XY}.

Question 2

$X(t) = A\cos(2\pi f_x t+\theta)$ et $Y(t) = A\cos(2\pi f_y t+\theta)$ où θ est uniformément distribuée sur 0 à 2π. Trouvez

(a) E[X(t)], E{Y(t)]
(b) Variance de X(t) et de Y(t)
(c) E[X(t)Y(t)]
(d) Coefficient de corrélation entre X(t) et Y(t).

Question 1

(a) $E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[(X(t_1) + X(t_1-2))(X(t_2) + X(t_2-2))]$

$= E[X(t_1)X(t_2)] + E[X(t_1)X(t_2-2)] +$
$E[X(t_1-2)X(t_2)] + E[X(t_1-2)X(t_2-2)]$

$= R_X(t_1,t_2) + R_X(t_1, t_2-2)$
$+ R_X(t_1-2, t_2) + R_X(t_1-2, t_2-2)$

mais X(t) est stationnaire alors
$R_X(a,b) = R_X(b-a)$

alors $R_Y(t_1,t_2) = R_X(\tau) + R_X(\tau-2)$
$+ R_X(\tau+2) + R_X(\tau)$

$$\Rightarrow \boxed{R_Y(\tau) = 2R_X(\tau) + R_X(\tau-2) + R_X(\tau+2)}$$

(b) $E[Y(t)] = E[X(t) + X(t-2)]$

$= E[X(t)] + E[X(t-2)]$

$= 0 + 0 = 0$

(c) $\sigma_Y^2 = E[Y^2(t)] - (E[Y(t)])^2$

$= E[Y^2(t)] - 0$

$= E[Y^2(t)]$

$= E([X(t) + X(t-2)]^2)$

$= E[X^2(t)] + E[X(t)X(t-2)]$

$+ E[X(t-2)X(t)] + E[X^2(t-2)]$

$= \sigma_X^2 + R_X(-2) + R_X(2)$

$+ \sigma_X^2$

$$\boxed{\sigma_Y^2 = 2\sigma_X^2 + 2R_X(2)}$$

(d) $S_Y(f) = \mathcal{F}\{R_Y(\tau)\}$

$= \mathcal{F}\{2R_X(\tau) + R_X(\tau-2) + R_X(\tau+2)\}$

$= 2S_X(f) + S_X(f)e^{-j2\pi f2} + S_X(f)e^{j2\pi f2}$

$= 2S_X(f) + S_X(f)\left(e^{-j4\pi f} + e^{j4\pi f}\right)$

$$\boxed{S_Y(f) = 2S_X(f) + 2S_X(f)\cos 4\pi f}$$

(e) $E[X(t)Y(t)]$

$$= E[X^2(t) + X(t)X(t-2)]$$

$$= \sigma_X^2 + R_X(2)$$

$$\rho_{XY} = \frac{E[X(t)Y(t)]}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}$$

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{\sigma_X^2 + R_X(2)}{\sigma_X + \sqrt{2\sigma_X^2 + 2R_X(2)}}}$$

Question 2

(a) $$E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(2\pi f_X t + \theta)\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\theta$$

$$= \frac{A}{2\pi}\sin(2\pi f_X t + \theta)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{A}{2\pi}\left[\sin(2\pi f_X t + 2\pi) - \sin(2\pi f_X t)\right]$$

$$= 0$$

Simulairement $\underline{E[Y(t)] = 0}$

(b) $$E[x^2(t)] = \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos^2(2\pi f_x t + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_x t + 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{8\pi} \sin(4\pi f_x t + 2\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A^2}{2} + 0$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

similairement $E[y^2(t)] = \frac{A^2}{2}$

alors $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{A^2}{2}$

(c) $E[x(t)\,y(t)]$

$$\cancel{= \int_0^{2\pi} A^2 \cos 2\pi f_x t \cos 2\pi f}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{A^2}{2\pi} \cos(2\pi f_x t + \theta) \cos(2\pi f_y t + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\pi(f_y - f_x)t\, d\theta + \frac{A^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi(f_x + f_y)t + 2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi(f_y - f_x)t + \frac{A^2}{8\pi} \sin(2\pi(f_x + f_y)t + 2\theta)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi(f_y - f_x)t$$

(d) $\rho_{xy} = \dfrac{E(x(t)\,y(t))}{\sigma_x \sigma_y}$

$$= \frac{\frac{A^2}{2}\cos 2\pi(f_y - f_x)t}{\frac{A^2}{2}}$$

$$\boxed{\rho_{xy} = \cos 2\pi(f_y - f_x)t}$$