ELG 4576 **Systèmes de télécommunication** **Automne 2010**

Devoir 4

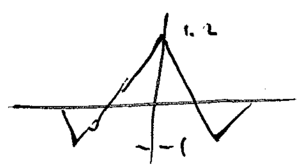
(pour le quiz du 13 octobre)

1) Question 5.35 du texte
2) Question 5.38 du texte
3) Pour le processus y(t), E[y(t)] = 0. Le processus $x(t) = \mu_x + y(t)$, où μ_x est une constante. Alors, on peut démontrer que $E[x(t)] = \mu_x$. Démontrez que $R_x(\tau) = \mu_x^2 + R_y(\tau)$
4) Le processus $x(t) = A\cos(2\pi f_c t+\theta)$ où A est une variable aléatoire qui est uniformément distribuée sur (0,5) et θ est uniformément distribué sur (0, 2π). Les variables A et θ sont indépendantes. Trouvez E[x(t)] et var(x(t)).
5) Trouvez la fonction d'autocorrélation de x(t) de la question 4.
6) Un processus ergodique x(t) à la fonction d'autocorrélation $e^{-|\tau|}$. Trouvez sa densité spectrale de puissance.

Solution

1) 1. $f(\tau) = \sin 2\pi f_0 \tau$ n'est pas une fonction d'autocorrélation parce que $f(-\tau) \neq f(\tau)$.

2.)



Oui. Cette fonction satisfait les propriétés d'une fonction d'autocorrélation

2) (a) $m_X(t) = E[X(t)]$

$$= E(X\cos 2\pi f_0 t + Y \sin 2\pi f_0 t)$$

$$= E(X)\cos 2\pi f_0 t + E[Y]\sin 2\pi f_0 t$$

$$= 0 + 0 = 0$$

(b) $R_X(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)X(t)]$

$$= E[(X\cos 2\pi f_0(t+\tau) + Y\sin 2\pi f_0(t+\tau))(X\cos 2\pi f_0 t + Y\sin 2\pi f_0 t)]$$

$R_X(t+\tau, t) =$

$$E\Big[X^2 \cos 2\pi f_0(t+\tau) \cos 2\pi f_0 t + Y^2 \sin 2\pi f_0 (t+\tau) \sin 2\pi f_0 t$$
$$+ XY \cos 2\pi f_0 (t+\tau) \sin 2\pi f_0 t + XY \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 (t+\tau)\Big]$$

$$\cancel{= E(X^2) \cos 2\pi f_0 (t+\tau) + E(Y^2) \sin}$$

$$= E(X^2) \cos 2\pi f_0 (t+\tau) \cos 2\pi f_0 t + E(Y^2) \sin 2\pi f_0 (t+\tau) \sin 2\pi f_0 t$$
$$+ E(XY) \cos 2\pi f_0 (t+\tau) \sin 2\pi f_0 t + E(XY) \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_0 (t+\tau)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 (2t+\tau)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau - \frac{\sigma^2}{2} \cos 2\pi f_0 (2t+\tau)$$

$$+ 0 + 0$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2 \cos 2\pi f_0 \tau}}$$

la fonction est stationnaire en autocorrélation

(3) $R_x(\tau) = E(x(t)\, x(t-\tau)]$

$$= E((\mu_x + y(t))(\mu_x + y(t+\tau))]$$

$$= E(\mu_x^2 + \mu_x y(t-\tau) + \mu_x y(t) + y(t) y(t-\tau)]$$

$$= E(\mu_x^2] + E(\mu_x y(t-\tau)) + E[\mu_x y(t)]$$
$$+ E(y(t) y(t-\tau)]$$

$$= \mu_x^2 + \mu_x E(y(t-\tau)] + \mu_x E(y(t)]$$
$$+ R_y(\tau) = \mu_x^2 + R_y(\tau)$$

(4) $E[x(t)] = E(A\cos(2\pi f_c t + \theta))$

$= E[A]\, E(\cos(2\pi f_c t + \theta))$ parce que A et θ sont independants

$E(A) = 2.5$

$E(\cos(2\pi f_c t + \theta)) = 0$ quand θ uniformément distribuée sur 0 à 2π

$\underline{\underline{E(x(t)] = 0}}$

$E(x^2(t)] = E(A^2 \cos^2(2\pi f_c t + \theta)]$

$= E\left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_c t + 2\theta)\right]$

$= E\left(\frac{A^2}{2}\right) + E\left(\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_c t + 2\theta)\right)$

$= E\left(\frac{A^2}{2}\right] + E\left(\frac{A^2}{2}\right) \cancel{E[\cos(4\pi f_c t + 2\theta)]}^{0}$

$= E\left(\frac{A^2}{2}\right] = \frac{1}{2} E(A^2]$

$E[A^2] = \int_0^5 \frac{1}{5} a^2\, da$

$= \frac{1}{15} a^3 \Big|_0^5 = \frac{125}{15} = 8.333$

$E(x^2(t)] = \frac{8.333}{2} = \underline{\underline{4.167}}$

$\sigma_x^2 = E(x^2(t)] - (E(x(t)))^2 = \underline{\underline{4.167}}$

(5) $E\{x(t)x(t-\tau)\}$

$$= E\left[A^2 \cos(2\pi f_c t + \theta)\cos(2\pi f_c(t-\tau)+\theta)\right]$$

$$= E\left[\frac{A^2}{2}\cos 2\pi f_c \tau + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c(2t-\tau) + 2\theta)\right]$$

$$= E\left[\frac{A^2}{2}\right]\cos 2\pi f_c \tau + E\left[\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c(2t-\tau) + 2\theta)\right]$$

$$= 4.167 \cos 2\pi f_c \tau + E\left[\frac{A^2}{2}\right] E\left[\cancelto{0}{\cos(2\pi f_c(2t-\tau)+2\theta)}\right]$$

$$R_x(\tau) = 4.167 \cos 2\pi f_c \tau$$

(6) $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$$\boxed{S_x(f) = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}}$$