**ELG 4576** **Systèmes de télécommunication** **Automne 2010**

**Devoir 3**

(pour le quiz du 6 octobre)

1) Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont décrites par leur pdf à deux dimensions $f_{XY}(x,y)$ qui est donnée par :

$$f_{XY}(x,y) = (x+y), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$

En classe, nous avons vu que $f_X(x) = x+1/2,\ 0 \le x \le 1$, et $f_Y(y) = y+1/2,\ 0 \le y \le 1$. Trouvez
   a. $f_Y(y|x)$.
   b. $P(0.5<y<0.8)$
   c. $P(0.5<y<0.8|x=0.4)$.

2) La forme générale d'une pdf gaussienne à deux dimensions est :

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}$$

pour $-\infty<x<\infty$ et $-\infty<y<\infty$. Les constantes $\mu_X$ et $\mu_Y$ sont les moyennes de $X$ et $Y$, $\sigma_X$ et $\sigma_Y$ sont les écarts-types de $X$ et $Y$ et $\rho_{XY}$ est le coefficient de corrélation entre $X$ et $Y$. Trouvez $f_X(x)$ et $f_Y(y)$. Indice : Il faut compléter le carré dans l'exposant.

3) La pdf à deux dimensions des variables $X$ et $Y$ est $f_{XY}(x,y) = k$, $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le x$. Trouvez
   a. $k$
   b. $f_X(x)$
   c. $f_Y(y)$
   d. $E[XY]$
   e. $E[X]$ et $\sigma_X^2$.
   f. $E[Y]$ et $\sigma_Y^2$.

π

4) X(t) est un processus aléatoire donné par X(t) = Acos(2pfct) où A est une variable aléatoire avec distribution uniforme sur l'intervalle 0 à 5. Trouvez
   a. $E[X(t)]$
   b. $E[X^2(t)]$
   c. $\sigma_X^2$
   d. $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$.
   e. Est-ce que le processus est stationnaire ? Pourquoi ?

# Solution Devoir 3

(1) $f_{XY}(x,y) = x+y \;, \quad 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$

et $f_X(x) = x + \frac{1}{2} \quad 0 \le x \le 1$

$f_Y(y) = y + \frac{1}{2} \quad 0 \le y \le 1$

(a) $f_Y(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$

$= \dfrac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \;, \quad 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1$

(b) $P(0.5 \le y \le 0.8)$

$= \int_{0.5}^{0.8} f_Y(y)\, dy$

$= \int_{0.5}^{0.8} \left(y + \frac{1}{2}\right) dy = \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y\right)\Big|_{0.5}^{0.8}$

$= 0.32 + 0.4 - 0.125 - 0.25$

$= \underline{\underline{0.345}}$

(c) $P(0.5 \le y \le 0.8 \mid x = 0.4)$

$= \int_{0.5}^{0.8} f_Y(y|0.4)\, dy = \int_{0.5}^{0.8} \left(\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\right) dy \Big|_{x=0.4}$

$= \int_{0.5}^{0.8} \left(\frac{y+0.4}{0.9}\right) dy = \left(\frac{\frac{1}{2}y^2}{0.9} + \frac{0.4}{0.9}\, y\right)\Big|_{0.5}^{0.8}$

$$P(0.5 \le y \le 0.8 \mid x = 0.4)$$
$$= \underline{\quad 0.35 \quad}$$

(2) Notez l'erreur typographique dans la question

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2}{2(1-\rho_{xy}^2)}\right\}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\,dy$$

$$\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2$$

$$= \rho_{xy}^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - \rho_{xy}^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) - \rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\right]^2 + (1-\rho_{xy})^2\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$\exp\left\{-\frac{\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2}{2(1-\rho_{xy}^2)}\right\} =$$

$$\exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)-\rho_{xy}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)}{2(1-\rho_{xy}^2)}\right\}\exp\left\{-\frac{(1-\rho_{xy}^2)\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}{2(1-\rho_{xy}^2)}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{\left[y-\left(\mu_y-\frac{\rho_{xy}}{\sigma_x}(x\sigma_y+\mu_x\sigma_y)\right)\right]^2}{2\sigma_y^2(1-\rho_{xy}^2)}\right\}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\left[\frac{y-\left(\mu_y-\frac{\rho_{xy}}{\sigma_x}(x\sigma_y-\mu_x\sigma_y)\right)}{2\sigma_y^2(1-\rho_{xy}^2)}\right]}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\,dy}_{\text{Pdf gaussienne alors l'intégrale}=1}\;\frac{e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}$$

$$\therefore \boxed{f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}}$$

(3) (a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\int_0^1\int_0^x k\,dy\,dx = 1$$

$$\int_0^1 (ky)\Big|_0^x dx = \int_0^1 kx\,dx = \frac{k}{2}x^2\Big|_0^1$$

$$= \frac{k}{2} = 1$$

alors $\underline{\underline{k=2}}$

(b) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dy$

$$= \int_0^x 2\,dy = 2y\Big|_0^x = 2x, \quad 0 \le x \le 1$$

$$\boxed{f_x(x) = 2x, \quad 0 \le x \le 1}$$

(c) ici il faut noter que, même si $0 \le x \le 1$ nous avons aussi que $\underline{\underline{0 \le y \le x}}$

alors $\underline{\underline{y \le x \le 1}}$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx = \int_y^1 2\,dx$$

$$= 2x\Big|_y^1$$

$$= 2 - 2y$$

$$= 2(1-y) \quad 0 \le y \le 1$$

alors $\boxed{f_y(y) = 2(1-y), \quad 0 \le y \le 1}$