ELG 4576 **Systèmes de télécommunication** **Automne 2010**

Devoir 2

(pour le quiz du 29 septembre)

1) Le signal $m(t) = 3\cos(2\pi 25t)$ va être transmis en utilisant la modulation d'angle. Répondez aux questions suivantes :
   a. Pour transmettre avec la modulation FM, quelle est la sensibilité de fréquence k_f qu'on doit utiliser si on veut que la largeur de bande du signal FM soit 500 Hz ?
   b. Trouvez le signal FM de la partie a.
   c. Trouver le signal PM si $k_p = 0.5\pi$ rads/V
   d. Estimez la largeur de bande du signal PM en c.
2) Faites la question 4.8 du texte.
3) Faites la question 4.19 du texte
4) Une variable aléatoire X est définie par la cdf suivante :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{5}x + c & 1 < x \le 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

   a. Trouvez c (notez la continuité à x = 3)
   b. Trouvez la pdf de X
   c. Est-ce une variable continue, discrète ou mixte ?
   d. Trouvez $P(0.5 < X < 2.5)$
   e. Trouvez $P(X>1)$ et $P(X\geq 1)$.
5) La variable X est définie par la pdf $f_X(x) = 2e^{-ax}u(x)$. Trouvez a.

Solution

1) (a) $B = 2(\beta_F+1)B_m = 2(\beta_F+1)25 = 500$

alors $\beta_F+1 = 10$, $\beta_F = 9$

$$\beta_F = \frac{k_f m_p}{B_m} = \frac{3}{25} k_f = 9$$

$k_f = 75$ ~~rad/~~v. Hz/V

(b) $$S_{FM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 150\pi \cdot \frac{3}{2\pi 25} \sin 2\pi 25t\right]$$

$$= A_c \cos\left[2\pi f_c t + 9 \sin 2\pi 25t\right]$$

(e) $s_{PM}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 0.5\pi \cos 2\pi 25 t\right]$

(d) Pour trouver la largeur de bande d'un signal PM, il faut le traiter comme un signal FM. C'est à dire

$$\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int x(t)\,dt\right] = \cos\left[2\pi f_c t + 0.5\pi \cos 2\pi 25 t\right]$$

$$2\pi k_f \int x(t)\,dt = 0.5\pi \cos 2\pi 25 t$$

$$\int x(t)\,dt = \frac{1}{4k_f} \cos 2\pi 25 t$$

$$x(t) = -\frac{2\pi 25}{4k_f} \sin 2\pi 25 t$$

$$= -\frac{25}{2k_f} \sin 2\pi 25 t$$

$$m_x = \frac{25}{2k_f}$$

$$B_x = 25$$

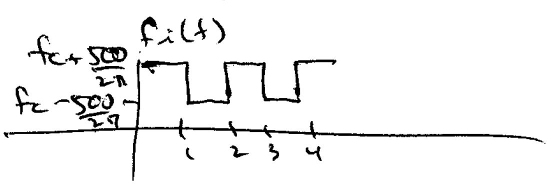
$$\beta_f = \frac{k_f m_x}{B_x} = \frac{\frac{25}{2k_f} \cdot k_f}{25}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$BW = 2b_x(\beta_f + 1) = 2 \cdot 25\left(\tfrac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 50 \times 1.5 = \underline{\underline{75\ Hz}}$$

(2) $f_i(t) = \dfrac{d\theta(t)}{dt} \cdot \dfrac{1}{2\pi} = f_c + \dfrac{100}{2\pi} m(t)$



t

$\Delta f_{max} = \dfrac{100\, m_p}{2\pi} = \dfrac{500}{2\pi}$

$\approx 79.6\ Hz$

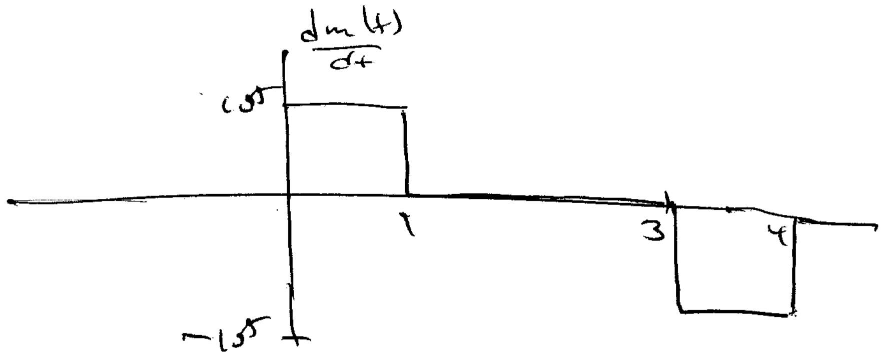
(3) (1) $\Delta f_{max} = k_f m_p$

$= 5 \times 10^5 \ Hz$

$= \underline{\underline{500 kHz}}$ alors $f_{max} = f_c + \Delta f_{max}$
$= 1.5 \times 10^6 \ Hz$

(2) $\theta(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$

$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm(t)}{dt}$



$\Delta f_{max} = \frac{3}{2\pi} \times 10^5$

$f_{i\,min} = f_c - \frac{3}{2\pi} \times 10^5$

$= 10 \times 10^5 - 0.478 \times 10^5$

$= 9.522 \times 10^5 \ Hz$

(3) pour $m_2(t) = \text{sinc}(2 \times 10^4 t)$

$m_p = 1V$

$f_{i\,max} = f_c + k_f m_p$

$= 10^6 + 10^3 = \underline{1.001 \times 10^6 \ Hz}$

pour $m_2(t)$ $B_m = 10^4$

$$\beta_F = \frac{k_f m_p}{B_m} = \frac{10^3}{10^4} = 0.1$$

$$B_W = 2B_m(\beta_F + 1)$$
$$= 2 \times 10^4 \times 1.1$$
$$= \underline{\underline{2.2 \times 10^4 \text{ Hz}}}$$

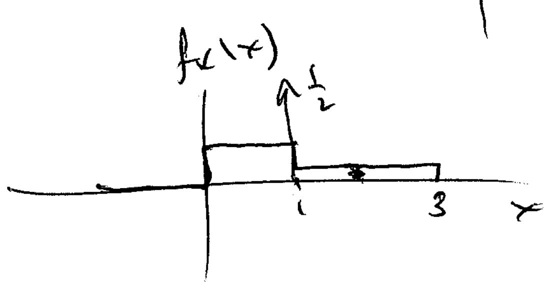
(4) (a) à $x = 3$ $F_X(x) = 1 = \frac{1}{5}x + c$

alors $c = \frac{2}{5}$

(b) $f_X(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

$$= h(x) + \frac{1}{10}\delta(x-1)$$

où $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{5} & 1 < x \le 3 \\ 0 & x > 3 \end{cases}$



(c) c'est une variable mixte ~~due à la~~ car il y a une discontinuité à $x = 1$ en $F_X(x)$.

(d) $P(0.5 < X < 2.5) = F_X(2.5) - F(0.5)$

$$= \frac{9}{10} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{13}{20}$$

(e) $P(X > 1) = 1 - F_X(1^+)$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \underline{0.4}$$

$P(X \geq 1) = 1 - F_X(1^-)$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \underline{0.5}$$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

alors $\int_{0}^{\infty} 2e^{-ax}\,dx = 1$

$$-\frac{1}{a} \cdot 2e^{-ax}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\frac{2}{a} = 1$$

$$\underline{a = 2}$$