



UNIVERSITÉ  
D'OTTAWA

ELG 4571

Systèmes de télécommunications

*J.-Y. Chouinard*



COLLÈGE  
MILITAIRE ROYAL  
DU CANADA

GEF 411A

Théorie de Communication

*M. Hefnawi*



UNIVERSITÉ DE  
MONCTON

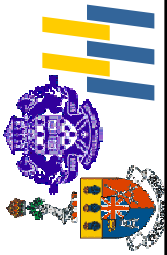
GELE 4521

Télécommunications

*Y. Bouslimani*

# *Performances des systèmes de communications numériques en bande de base*

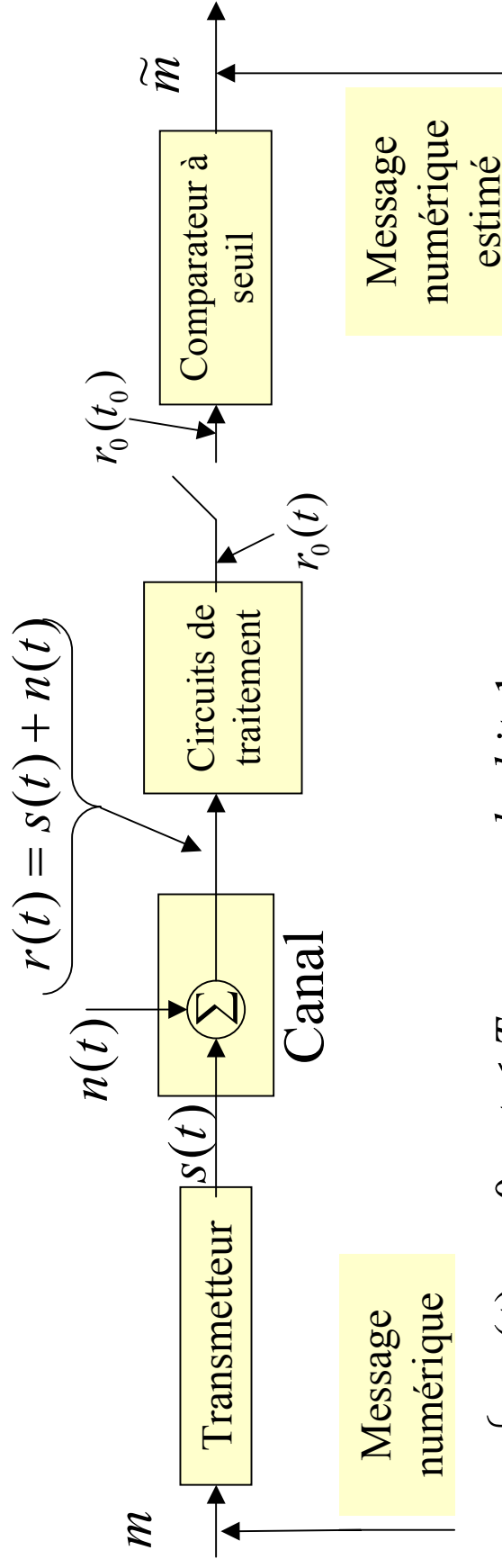




# Performances des systèmes numériques en bande de base

- ❁ Expression générale de la probabilité d'erreur
- ❁ Expression de la probabilité d'erreur pour le cas d'un bruit Gaussien
- ❁ Probabilité d'erreur pour le cas d'un bruit Gaussien avec filtre adapté
- ❁ Performances du format NRZ unipolaire
  - \* Détection par filtre passe-bas
  - \* Détection par filtre adapté
- ❁ Performances du format NRZ polaire
  - \* Détection par filtre passe-bas
  - \* Détection par filtre adapté
- ❁ Performances du format AMI-NRZ (bipolaire)
  - \* Détection par filtre passe-bas
  - \* Détection par filtre adapté

# Expression générale de la probabilité d'erreur



$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 1} \\ s_2(t), & 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

$$r_0(t) = \begin{cases} r_{01}(t), & 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 1} \\ r_{02}(t), & 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

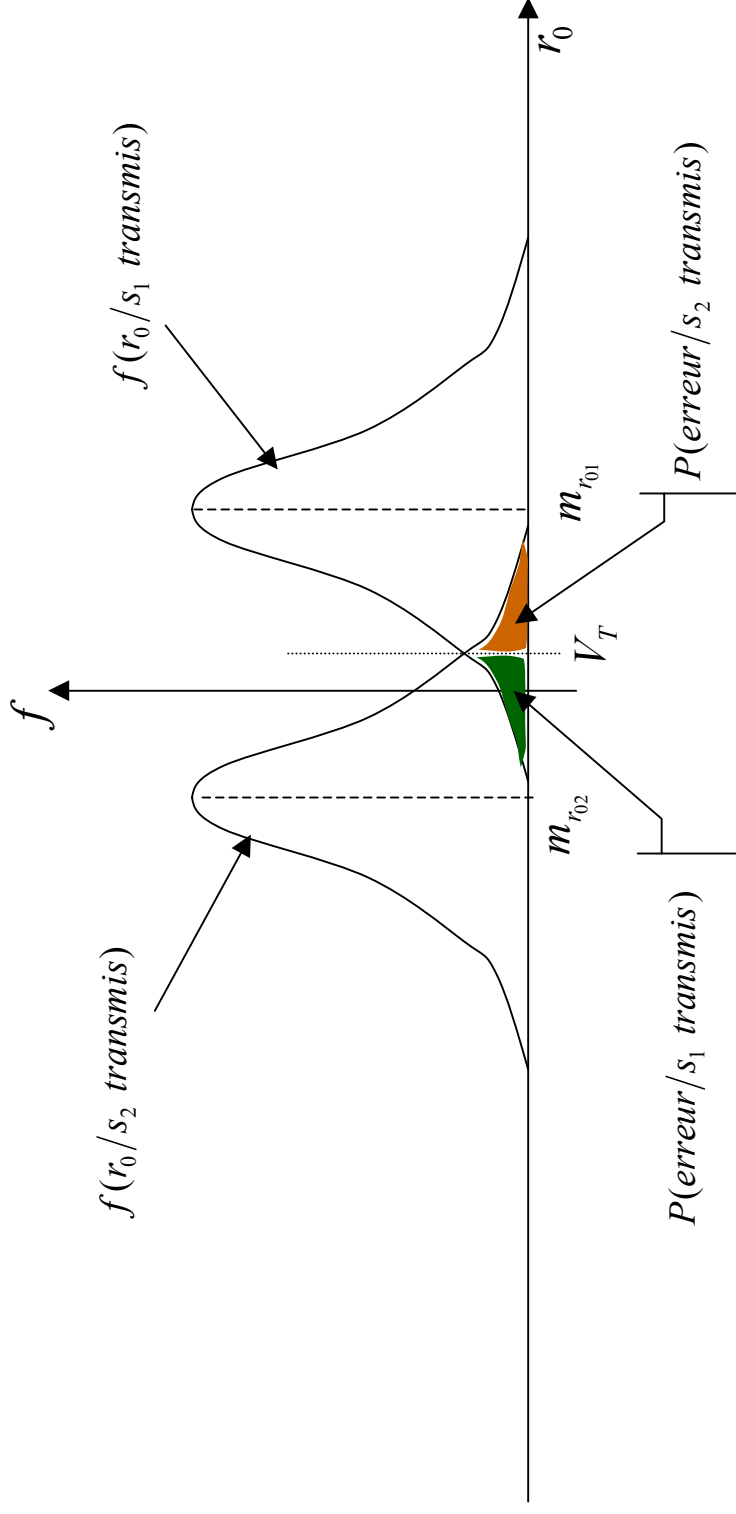
$$r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}(t_0), & 0 < t_0 \leq T \quad \text{pour le bit 1} \\ r_{02}(t_0), & 0 < t_0 \leq T \quad \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

$$r_0(t_0) = r_0 = \begin{cases} r_{01} & \text{pour le bit 1} \\ r_{02} & \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

# Expression générale de la probabilité d'erreur

- ❁ Les fonctions de densité de probabilité "PDF: Probability density function" des deux variables aléatoires  $r_0 = r_{01}$  et  $r_0 = r_{02}$  sont conditionnelles parce qu'elles dépendent respectivement des bits transmis 0 et 1.

- ❁ Pour l'illustration on choisira la forme Gaussienne



## ✿ Sans bruit

$r_0 > V_T \rightarrow$  bit 1 a été transmis

$r_0 < V_T \rightarrow$  bit 0 a été transmis

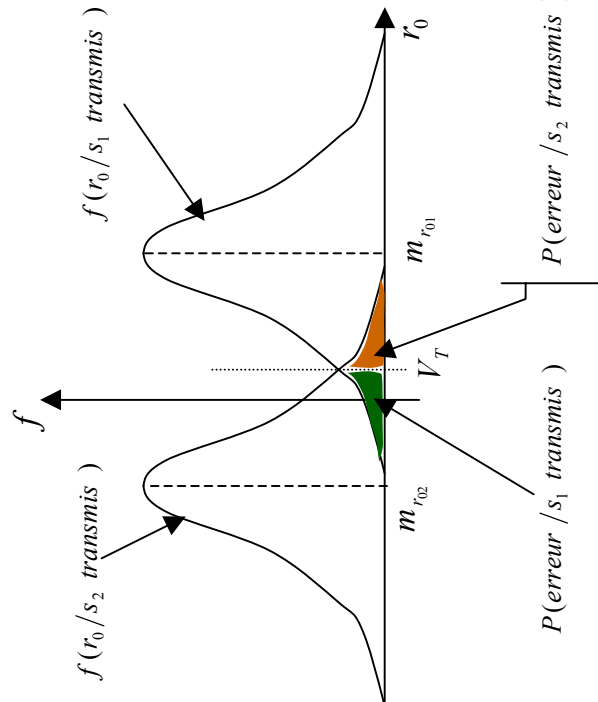
## ✿ En présence du bruit, l'erreur peut se produire de deux façons:

\*  $r_0 < V_T$  alors que 1 est transmis

$$P(\text{erreur} / s_1 \text{ transmis}) = \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0 / s_1) dr_0$$

\*  $r_0 > V_T$  alors que 0 est transmis

$$P(\text{erreur} / s_2 \text{ transmis}) = \int_{V_T}^{\infty} f(r_0 / s_2) dr_0$$



✿ La probabilité d'erreur de bit (PEB) est donnée par:

$$P_e = P(\text{erreur} / s_1 \text{ transmis}) P(s_1 \text{ transmis}) + P(\text{erreur} / s_2 \text{ transmis}) P(s_2 \text{ transmis})$$

$$P_e = P(s_1 \text{ transmis}) \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0/s_1) dr_0 + P(s_2 \text{ transmis}) \int_{V_T}^{\infty} f(r_0/s_1) dr_0$$

✿ Dans la plupart des applications les probabilités a priori  $P(s_1 \text{ transmis})$  et  $P(s_2 \text{ transmis})$  sont supposées équiprobables:

$$P(\text{bit 1 transmis}) = P(s_1 \text{ transmis}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{bit 0 transmis}) = P(s_2 \text{ transmis}) = \frac{1}{2}$$

# Expression de la PEB pour le cas d'un bruit gaussien

✿ On suppose que

- \* le bruit du canal est SSL de moyenne nulle
- \* le circuit de traitement du récepteur est linéaire, ce qui implique
  - $n_0$  est gaussien de moyenne nulle et
  - $r_0 = s_0 + n_0$  est gaussien de moyenne  $m_{r_0}$

$$s_0(t_0) = s_0 = \begin{cases} s_{01} & \text{pour le bit 1} \\ s_{02} & \text{pour le bit 0} \end{cases} \quad m_{r_0} = \begin{cases} s_{01} & \text{si le bit 1 est transmis} \\ s_{02} & \text{si le bit 0 est transmis} \end{cases}$$

$$f(r_0/s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ \frac{-(r_0 - s_{01})^2}{2\sigma_0^2} \right]$$

$$f(r_0/s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ \frac{-(r_0 - s_{02})^2}{2\sigma_0^2} \right]$$

$$\sigma_0^2 = \overline{n_0^2} = \overline{n_0^2(t_0)} = \overline{n_0^2(t)}$$

✿ La PEB s'exprime dans ce cas par

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(r_0 - s_{01})^2}{2\sigma_0^2}\right] dr_0 + \frac{1}{2} \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{(r_0 - s_{02})^2}{2\sigma_0^2}\right] dr_0$$

✿ Si on pose  $\lambda_1 = \frac{-(r_0 - s_{01})}{\sigma}$   $\lambda_2 = \frac{(r_0 - s_{02})}{\sigma}$

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{-(V_T - s_{02})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\lambda_1^2}{2}\right] d\lambda_1 + \frac{1}{2} \int_{(V_T - s_{02})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{\lambda_2^2}{2}\right] d\lambda_2$$

$$P_e = \frac{1}{2} Q\left[\frac{-(V_T - s_{01})}{\sigma_0}\right] + \frac{1}{2} Q\left[\frac{(V_T - s_{02})}{\sigma_0}\right]$$



# Q function & Error function

$$Q(z) = \int_z^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}\right] d\lambda$$

$$\operatorname{erf}(z) = \int_0^z \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-\lambda^2] d\lambda$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \int_z^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-\lambda^2] d\lambda$$

$$Q(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

# Expression de la PEB pour le cas d'un bruit gaussien

✿ Le seuil  $V_T$  optimal peut être déduit, comme suit

Règle de Leibniz

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_{a(x)}^{b(x)} f(\lambda, x) d\lambda \right] = f[b(x), x] \frac{db(x)}{dx} - f[a(x), x] \frac{da(x)}{dx} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x} d\lambda$$

$$\frac{dP_e}{dV_T} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ -\frac{(V_T - s_{01})^2}{2\sigma_0^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp \left[ -\frac{(V_T - s_{02})^2}{2\sigma_0^2} \right] = 0$$

$$\exp \left[ -\frac{(V_T - s_{01})^2}{2\sigma_0^2} \right] = \exp \left[ -\frac{(V_T - s_{02})^2}{2\sigma_0^2} \right]$$

$$-(V_T - s_{01})^2 = -(V_T - s_{02})^2$$

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2}$$

✿ La PEB est réduite dans ce cas à

$$P_e = Q \left( \frac{s_{01} - s_{02}}{2\sigma_0} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}} \right)$$

- ❁ Si le filtre de réception est optimisé, la PEB peut être réduite davantage.
- ❁ Pour minimiser la PEB on a besoin de maximiser l'argument de la fonction Q

$$\frac{(s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0))^2}{\sigma_0^2} = \frac{[s_{0d}(t_0)]^2}{\sigma_0^2} \quad \text{avec} \quad s_{0d}(t_0) = s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0)$$

- ❁ Le filtre linéaire qui maximise le rapport

$$\frac{[s_{0d}(t_0)]^2}{\sigma_0^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{puissance instantanée du signal de sortie} \\ \text{puissance moyenne du bruit à la sortie du système} \end{array} \right.$$

est le filtre adapté au signal  $s_d = s_1(t) - s_2(t)$  dont la réponse impulsionnelle est donnée par:

$$h(t) = C s_d(t_0 - t) = C [s_1(t_0 - t) - s_2(t_0 - t)]$$

$s_1$  et  $s_2$  sont les signaux qui apparaissent à l'entrée du récepteur quand les bits

1 et 0 sont transmis respectivement

## Expression de la PEB pour le cas d'un bruit gaussien avec filtre adapté

✿ La valeur maximale du rapport  $\frac{[s_{0d}(t_0)]^2}{\sigma_0^2}$  est donnée par

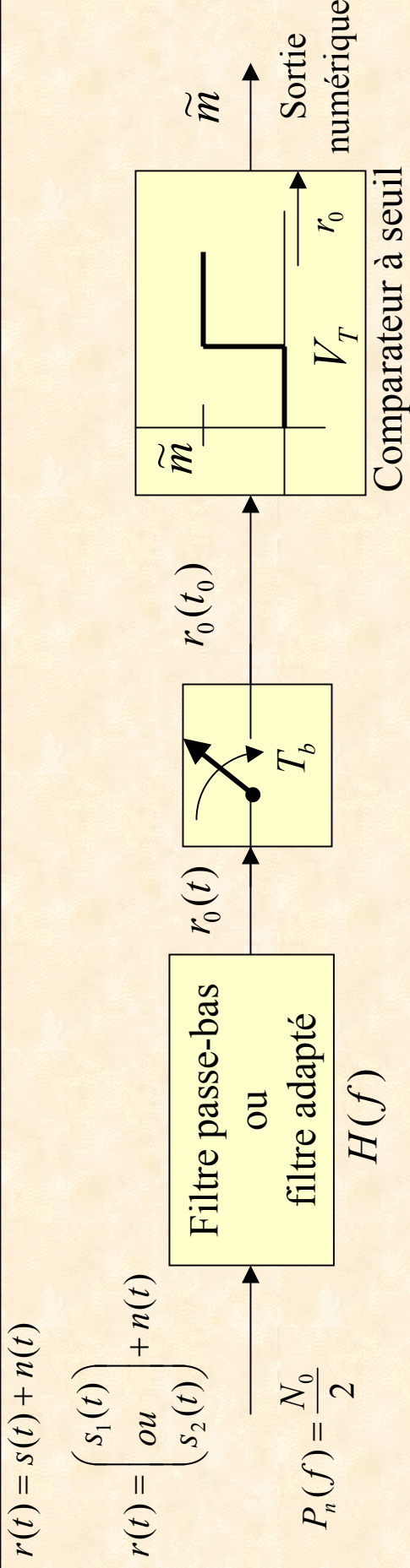
$$\frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0} \quad (\text{voir semaine 8 filtre adapté})$$

$$\text{avec} \quad E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

✿ Finalement, la PEB pour le cas d'un système en présence d'un bruit blanc gaussien et utilisant un filtre adapté est donnée par:

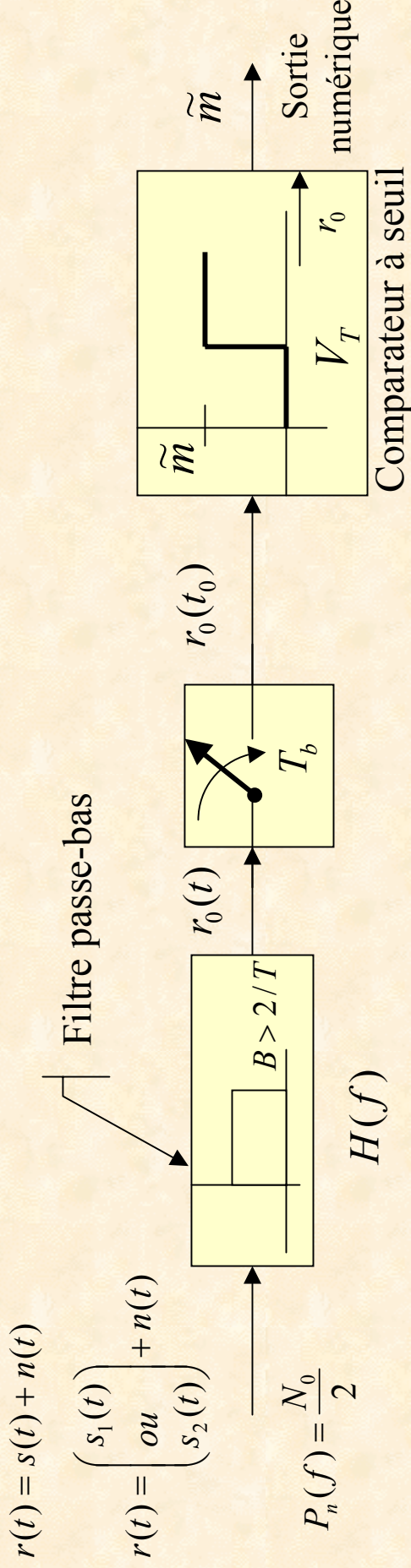
$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right)$$

# Performances du format NRZ unipolaire



$$\begin{cases} s_1(t) = +A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 1} \\ s_2(t) = 0, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

# Détection par filtre passe-bas du format NRZ unipolaire



$$\left\{ \begin{array}{l} s_{01}(t_0) \approx +A, \quad 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 1} \\ s_{02}(t_0) \approx 0, \quad 0 < t \leq T \quad \text{pour le bit 0} \end{array} \right\} \Rightarrow V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2} A$$

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}} \right)$$

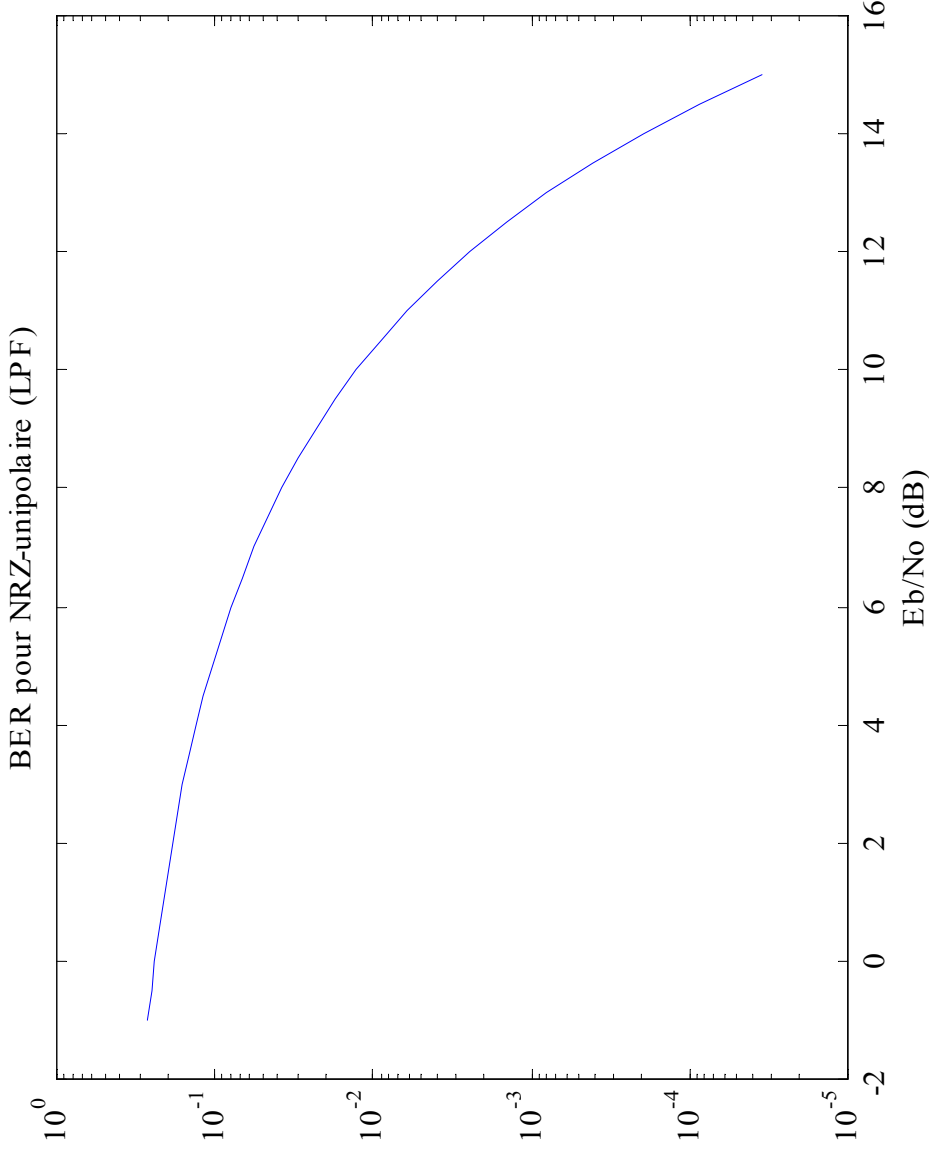
$$\sigma_0^2 = \left( \frac{N_0}{2} \right) (2B)$$

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}} \right)$$

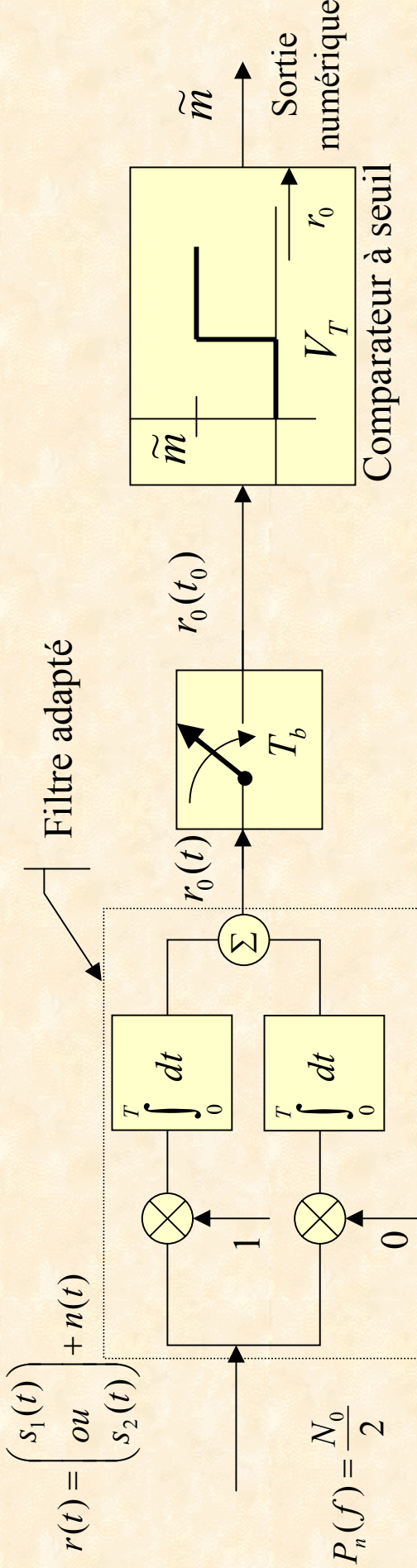
$$B > 2/T$$

# Détection par filtre passe-bas du format NRZ unipolaire

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \stackrel{(B=2/T)}{=} Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{8N_0}}\right) \stackrel{(E_b=A^2T/2)}{=} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{4N_0}}\right)$$



# Détection par filtre adapté du format NRZ unipolaire



$$P_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} s_{01} &= \int_0^{T_b} A dt & ; & \quad s_{02} = \int_0^0 dt \end{aligned} \right\}$$

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right)$$

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = A^2 T$$

$$E_b = \frac{E_1 + E_0}{2} = \frac{A^2 T + 0}{2} = \frac{A^2 T}{2}$$

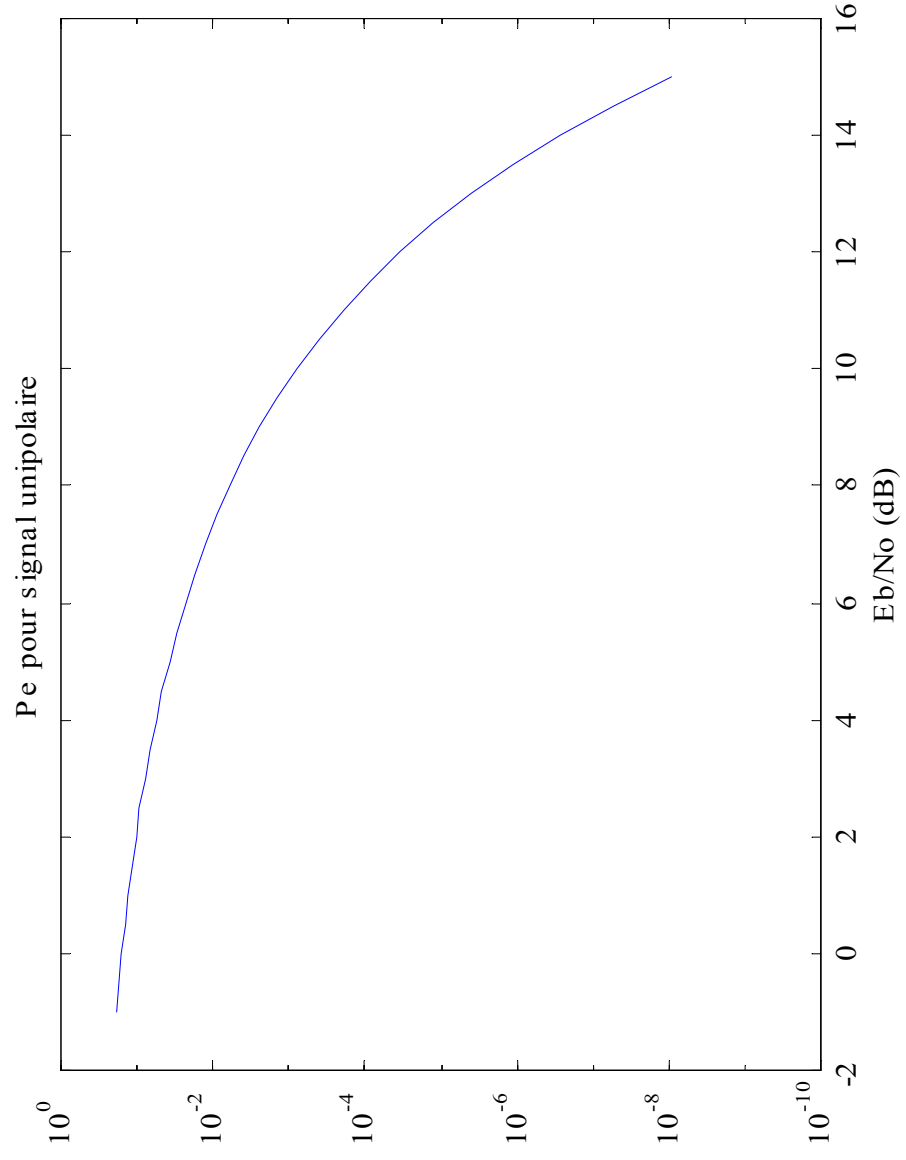
$$\left\{ \begin{aligned} V_T &= \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2} A T_b \end{aligned} \right\}$$

$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}} \right) = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

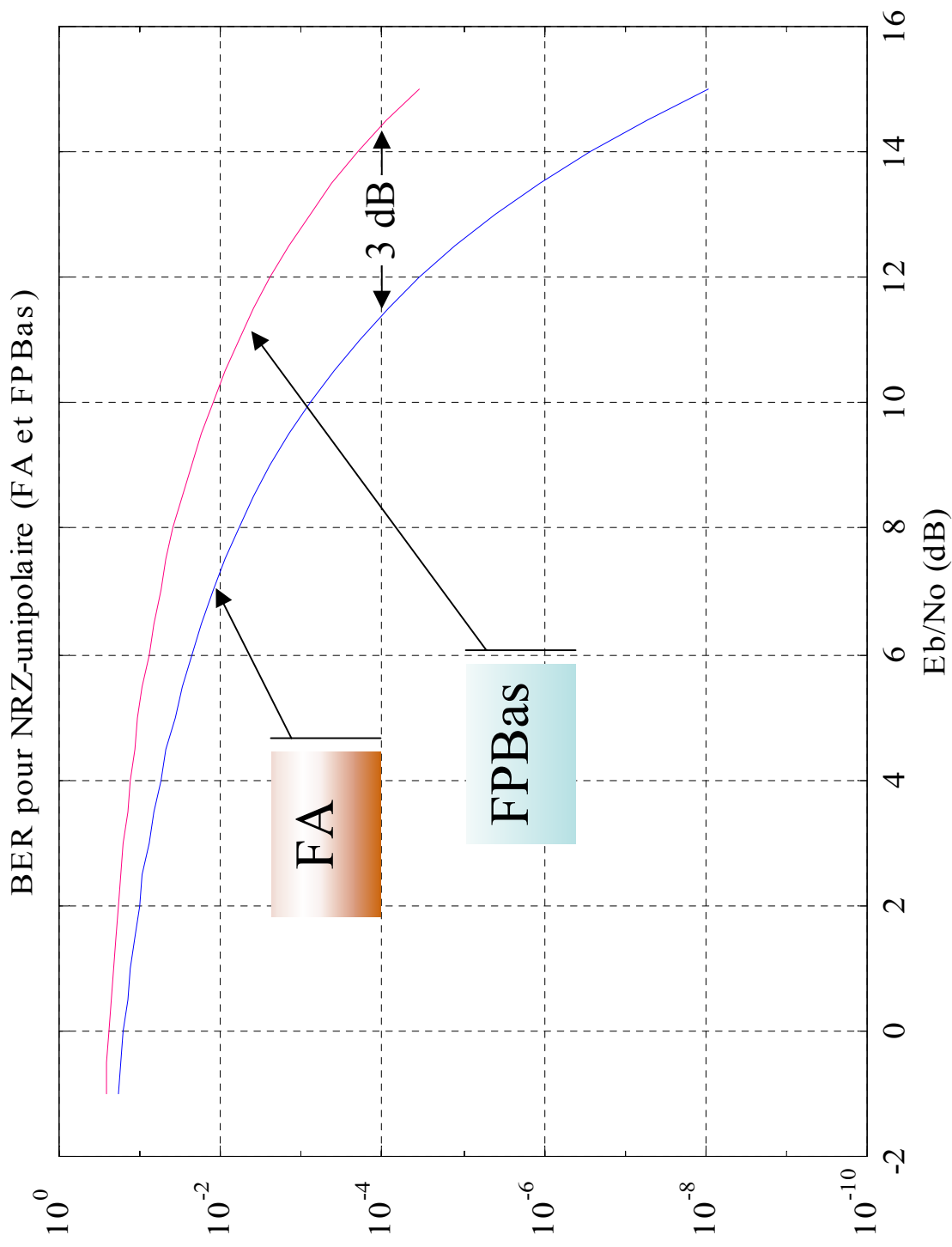


# Détection par filtre adapté du format NRZ unipolaire

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



# Comparaison des performances du FA et du FPBas (NRZ unipolaire)



## Détection par filtre passe-bas du format NRZ polaire

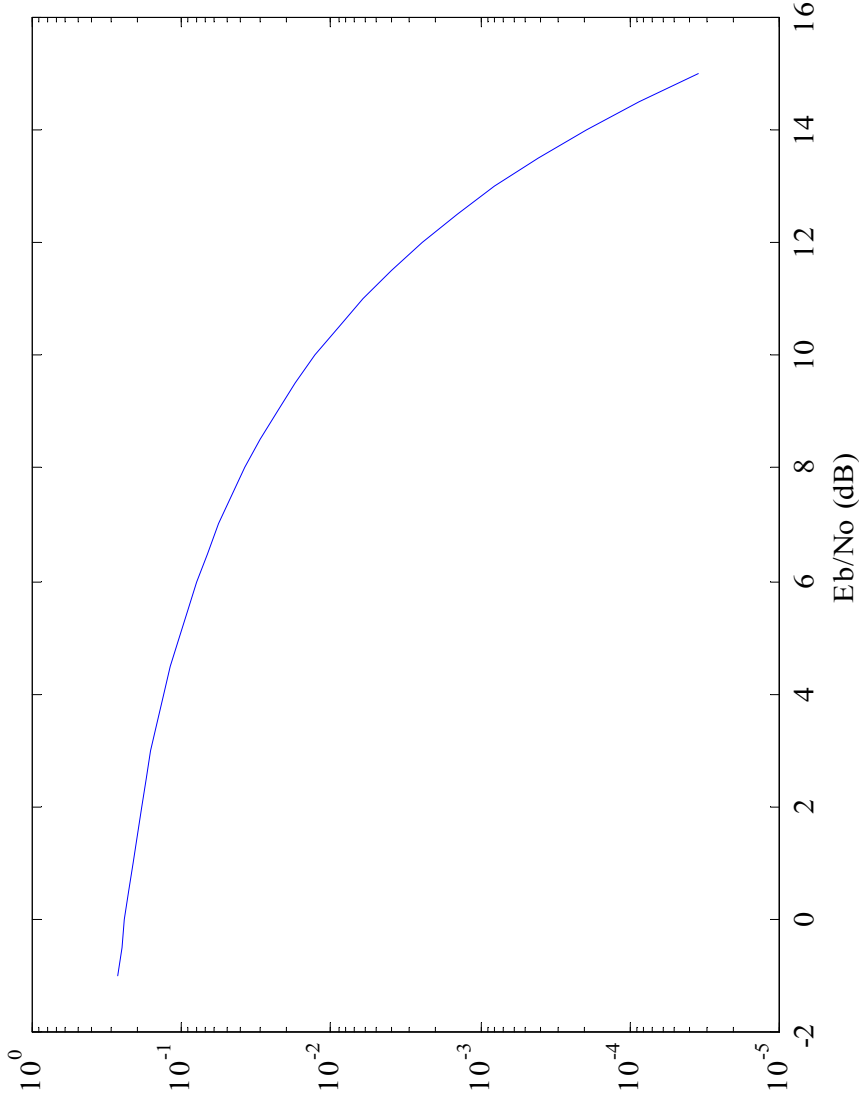
$$\begin{cases} s_1(t) = +A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 1} \\ s_2(t) = -A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{01}(t_0) \approx +A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 1} \\ s_{02}(t_0) \approx -A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 0} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_T = 0$$

$$\begin{aligned} P_e &= Q \left( \sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}} \right) \\ \sigma_0^2 &= \left( \frac{N_0}{2} \right) (2B) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P_e = Q \left( \sqrt{\frac{A^2}{N_0 B}} \right) \quad B > 2/T$$

# Détection par filtre passe-bas du format NRZ polaire

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0 B}}\right) \stackrel{(B=2/T)}{=} Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right) \stackrel{(E_b=A^2 T)}{=} Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$



# Détection par filtre adapté du format NRZ polaire

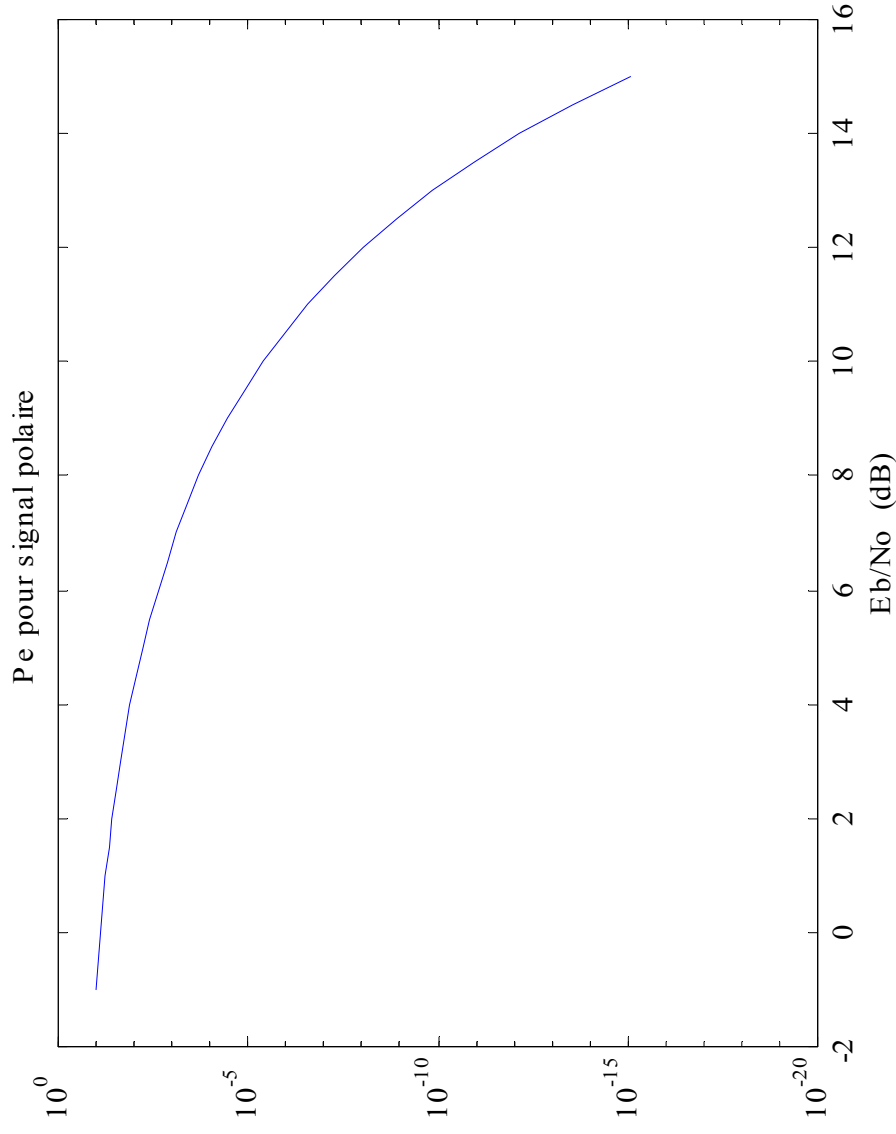
$$\left\{ \begin{array}{l} s_{01} = \int_0^{T_b} A dt \\ s_{02} = \int_0^{T_b} -A dt \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{↑} \\ \text{|||} \end{array} \quad V_T = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = Q \left( \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right) \\ E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = 4A^2T \\ E_b = \frac{E_1 + E_0}{2} = \frac{A^2T + A^2T}{2} = A^2T \end{array} \right\}$$

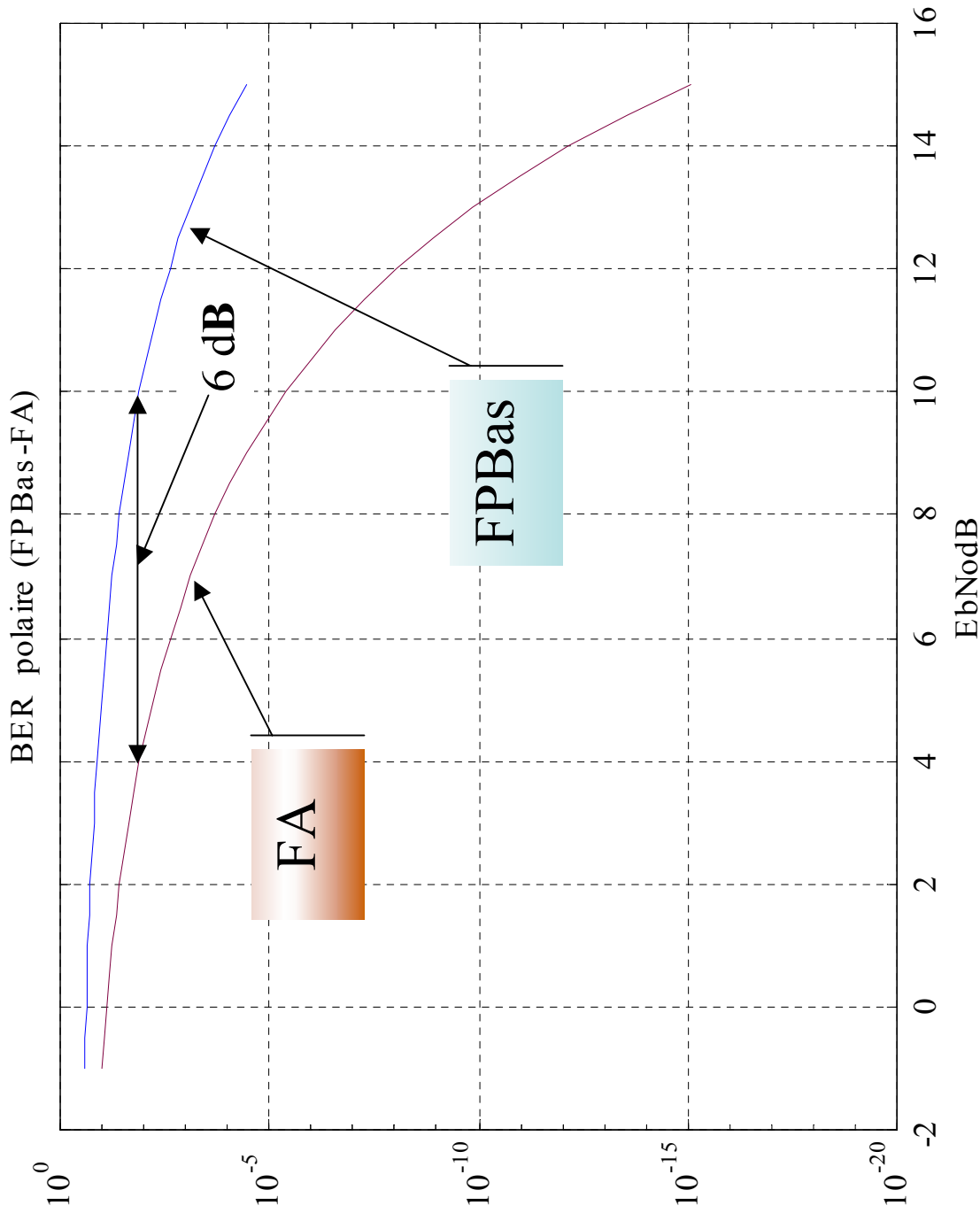
$$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}} \right) = Q \left( \sqrt{2 \left( \frac{E_b}{N_0} \right)} \right)$$

# Détection par filtre adapté du format NRZ polaire

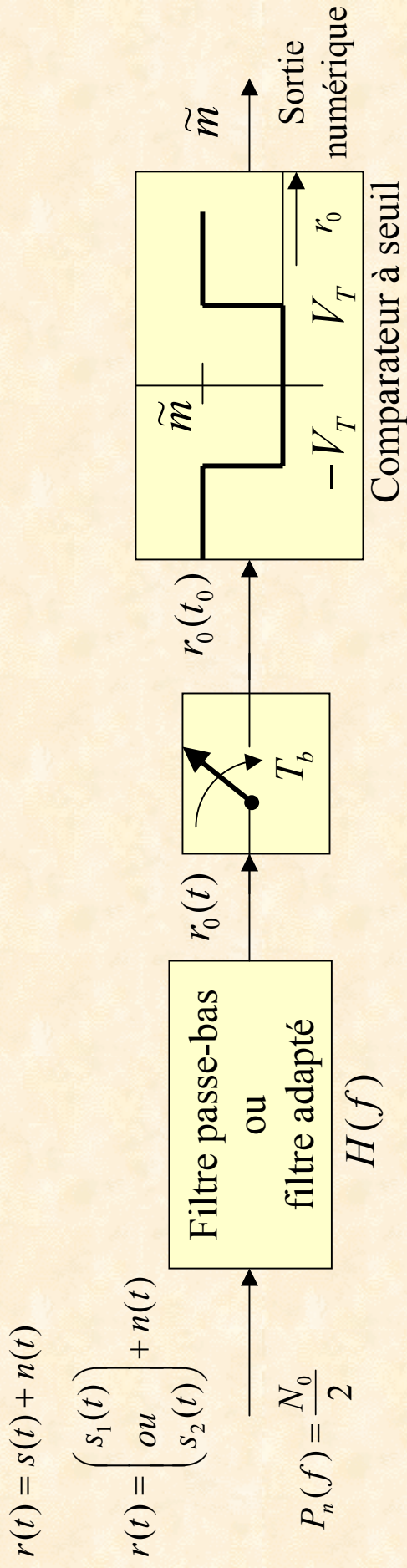
$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right)$$



# Comparaison des performances du FA et du FPBas (NRZ polaire)

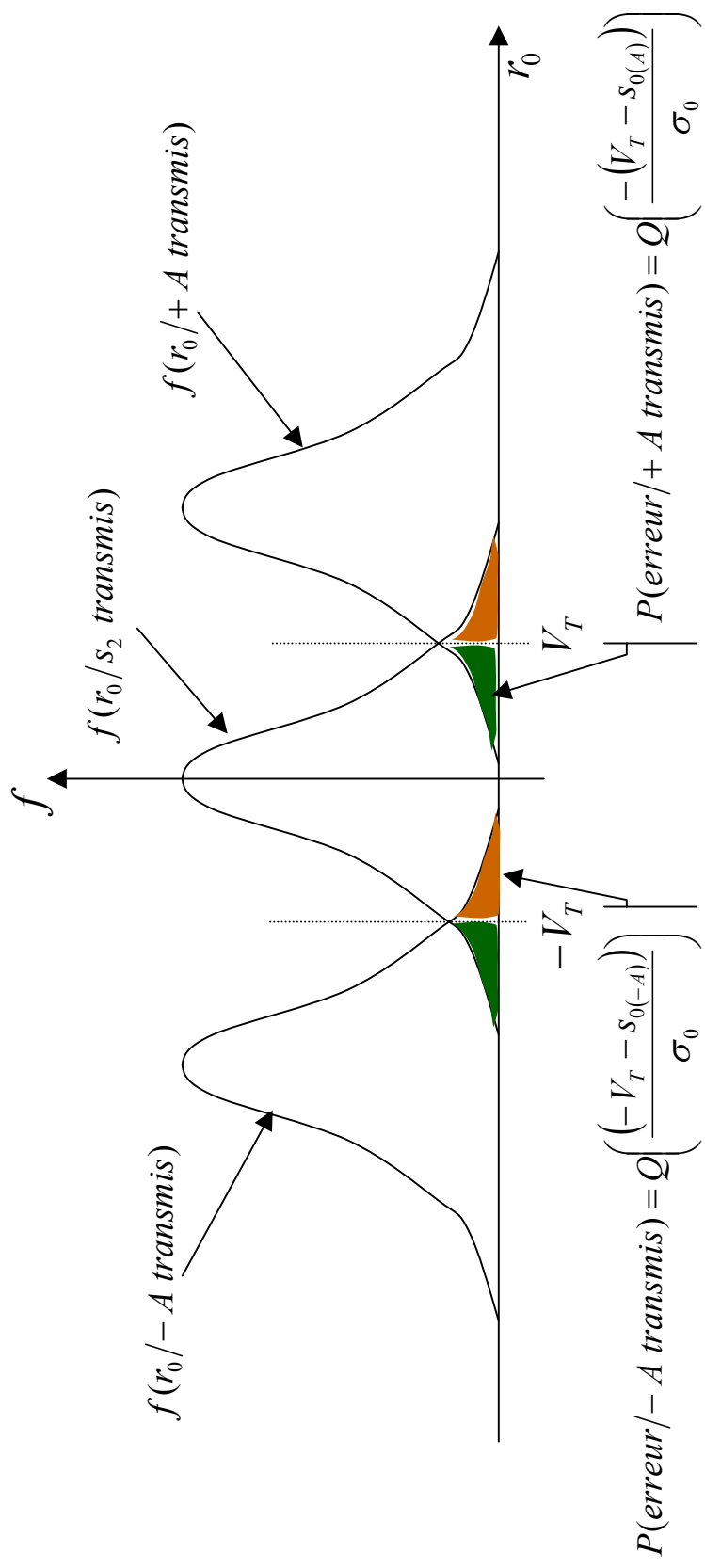


# Performances du format AMI-NRZ



$$\begin{cases} s_1(t) = \pm A, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 1} \\ s_2(t) = 0, & 0 < t \leq T & \text{pour le bit 0} \end{cases}$$






$$P_e = P(\text{erreur} / +A \text{ transmis}) P(+A \text{ transmis}) + P(\text{erreur} / -A \text{ transmis}) P(-A \text{ transmis}) + P(\text{erreur} / s_2 \text{ transmis}) P(s_2 \text{ transmis})$$

$$P_e = \frac{1}{4} Q\left[\frac{-(V_T - s_{0(A)})}{\sigma_0}\right] + \frac{1}{4} Q\left[\frac{(-V_T - s_{0(-A)})}{\sigma_0}\right] + 2 \frac{1}{2} Q\left[\frac{(V_T - s_{0(0)})}{\sigma_0}\right]$$

# Détection par filtre passe-bas du format AMI-NRZ

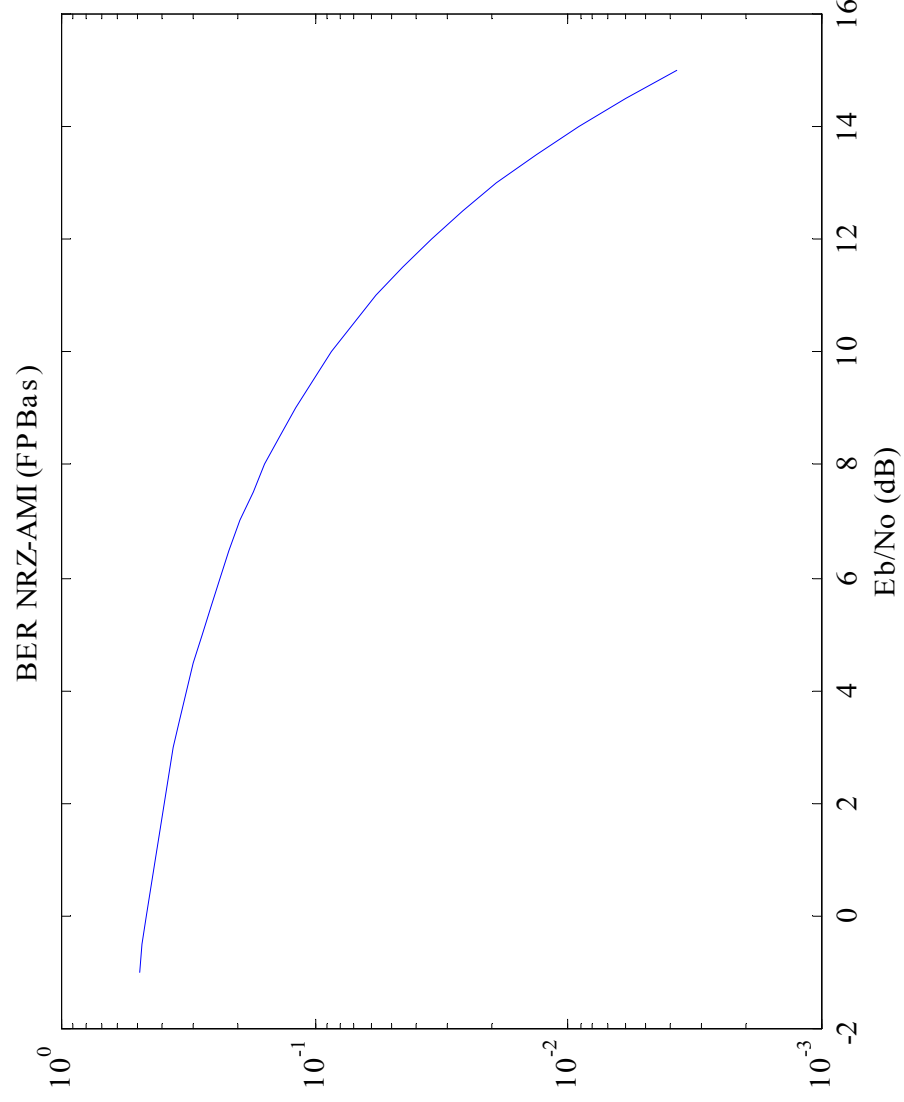
$$P_e = \frac{1}{4} Q \left[ \frac{-(V_T - s_{0(A)})}{\sigma_0} \right] + \frac{1}{4} Q \left[ \frac{(-V_T - s_{0(-A)})}{\sigma_0} \right] + 2 \frac{1}{2} Q \left[ \frac{(V_T - s_{0(0)})}{\sigma_0} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_{0(A)} = A; \quad s_{0(-A)} = -A; \quad s_{0(0)} = 0 \\ P_e = \frac{1}{4} Q \left[ \frac{-(V_T - A)}{\sigma_0} \right] + \frac{1}{4} Q \left[ \frac{(-V_T + A)}{\sigma_0} \right] + 2 \frac{1}{2} Q \left[ \frac{(V_T)}{\sigma_0} \right] \\ V_T = \frac{A}{2} \\ \sigma_0^2 = N_0 B \end{array} \right.$$


$$P_e = \frac{3}{2} Q \left( \frac{A}{2\sigma_0} \right) = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}} \right)$$

# Détection par filtre passe-bas du format AMI-NRZ

$$P_e = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{A^2}{4N_0 B}} \right) \stackrel{(B=2/T)}{=} \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{A^2 T}{8N_0}} \right) \stackrel{(E_b = A^2 T/2)}{=} \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{4N_0}} \right)$$



# Détection par filtre adapté du format AMI-NRZ

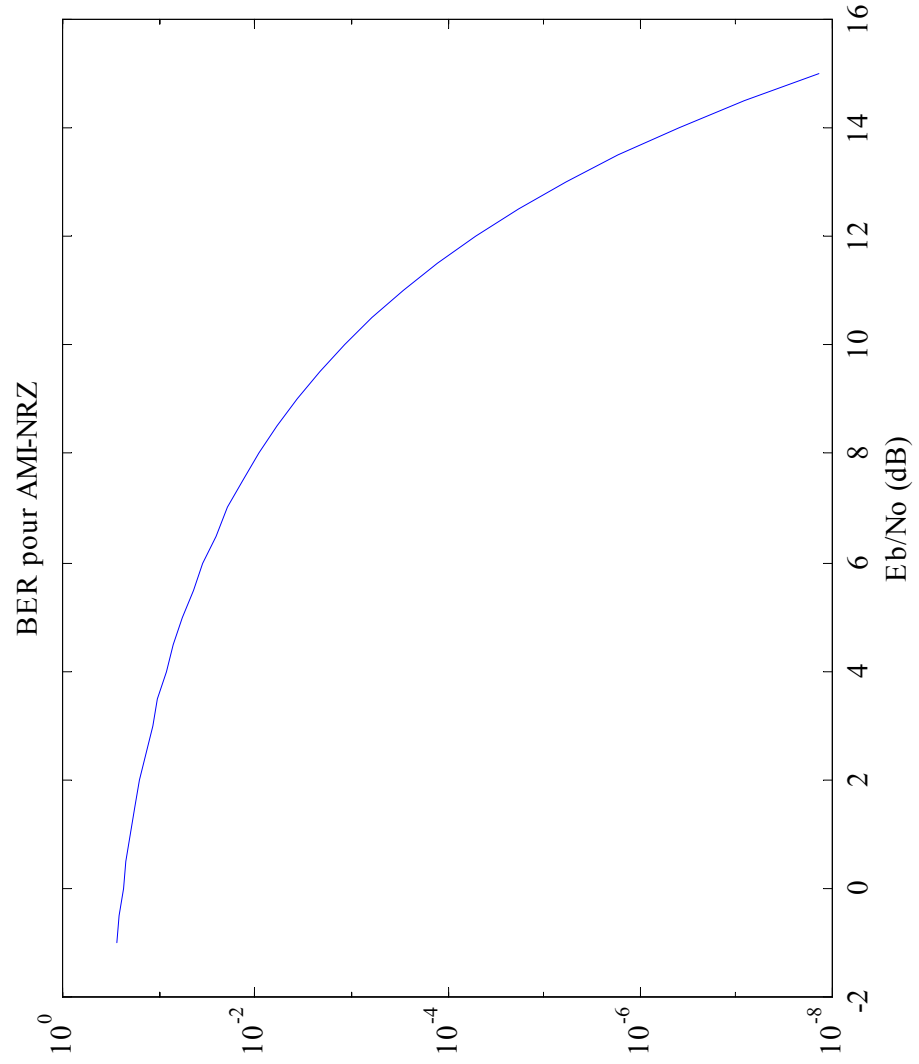
$$P_e = \frac{1}{4} Q \left[ \frac{-(V_T - s_{0(A)})}{\sigma_0} \right] + \frac{1}{4} Q \left[ \frac{(-V_T - s_{0(-A)})}{\sigma_0} \right] + 2 \frac{1}{2} Q \left[ \frac{(V_T - s_{0(0)})}{\sigma_0} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_T = \frac{s_{0(A)} + s_{0(0)}}{2} \\ s_{0(A)} = -s_{0(-A)} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{3}{2} Q \left[ \frac{s_{0(A)} - s_{0(0)}}{2\sigma_0} \right] = \frac{3}{2} Q \left[ \sqrt{\frac{(s_{0(A)} - s_{0(0)})^2}{4\sigma_0^2}} \right]$$

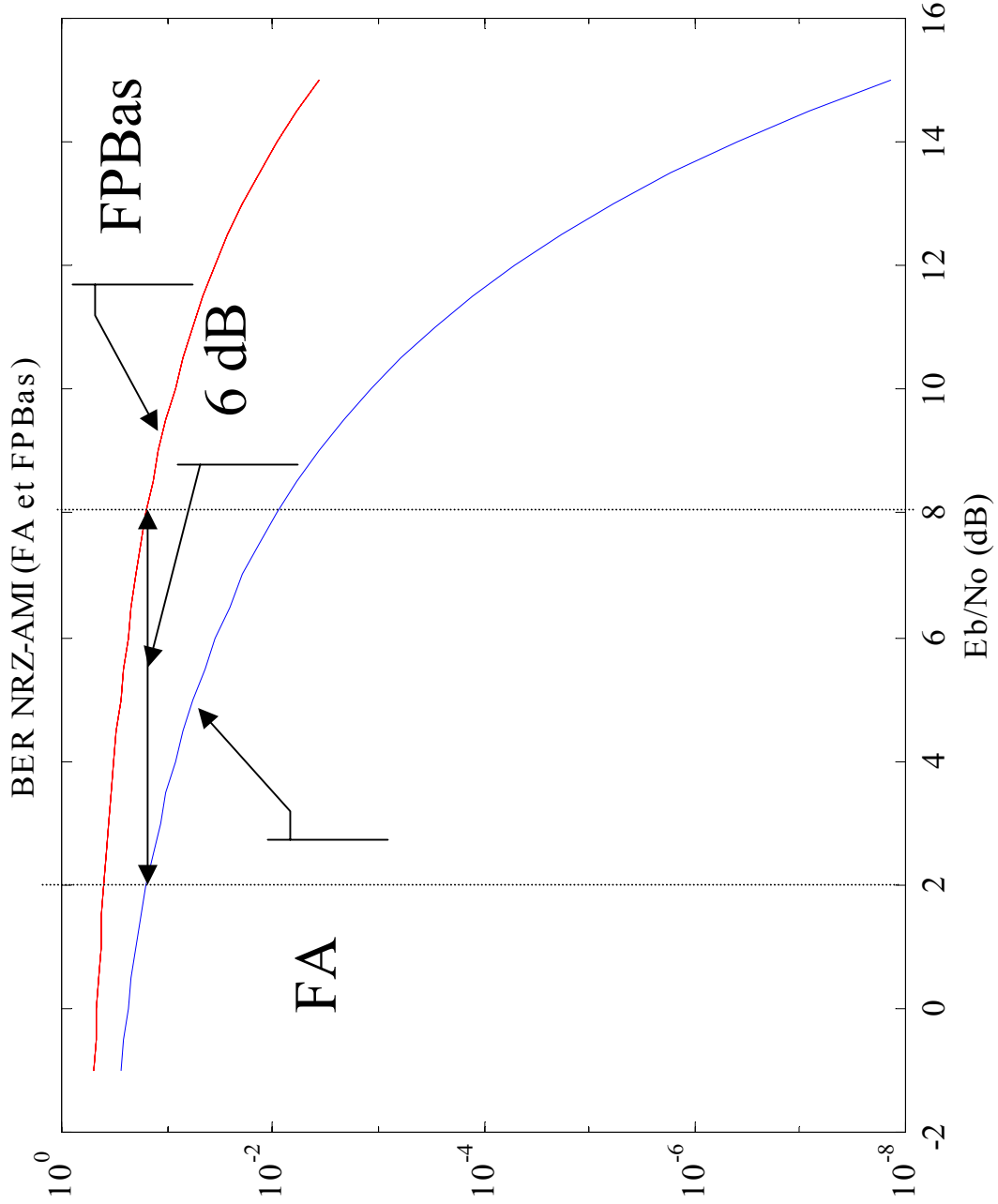
$$\left\{ \begin{array}{l} P_e = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{E_d}{2N_0}} \right) \\ E_d = \int_0^T [s_{1(A)}(t) - s_2(t)]^2 dt = A^2 T \\ E_b = \frac{E_{1(A)} + E_0}{2} = \frac{A^2 T + 0}{2} = \frac{A^2 T}{2} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad P_e = \frac{3}{2} Q \left[ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$$

# Détection par filtre adapté du format AMI-NRZ

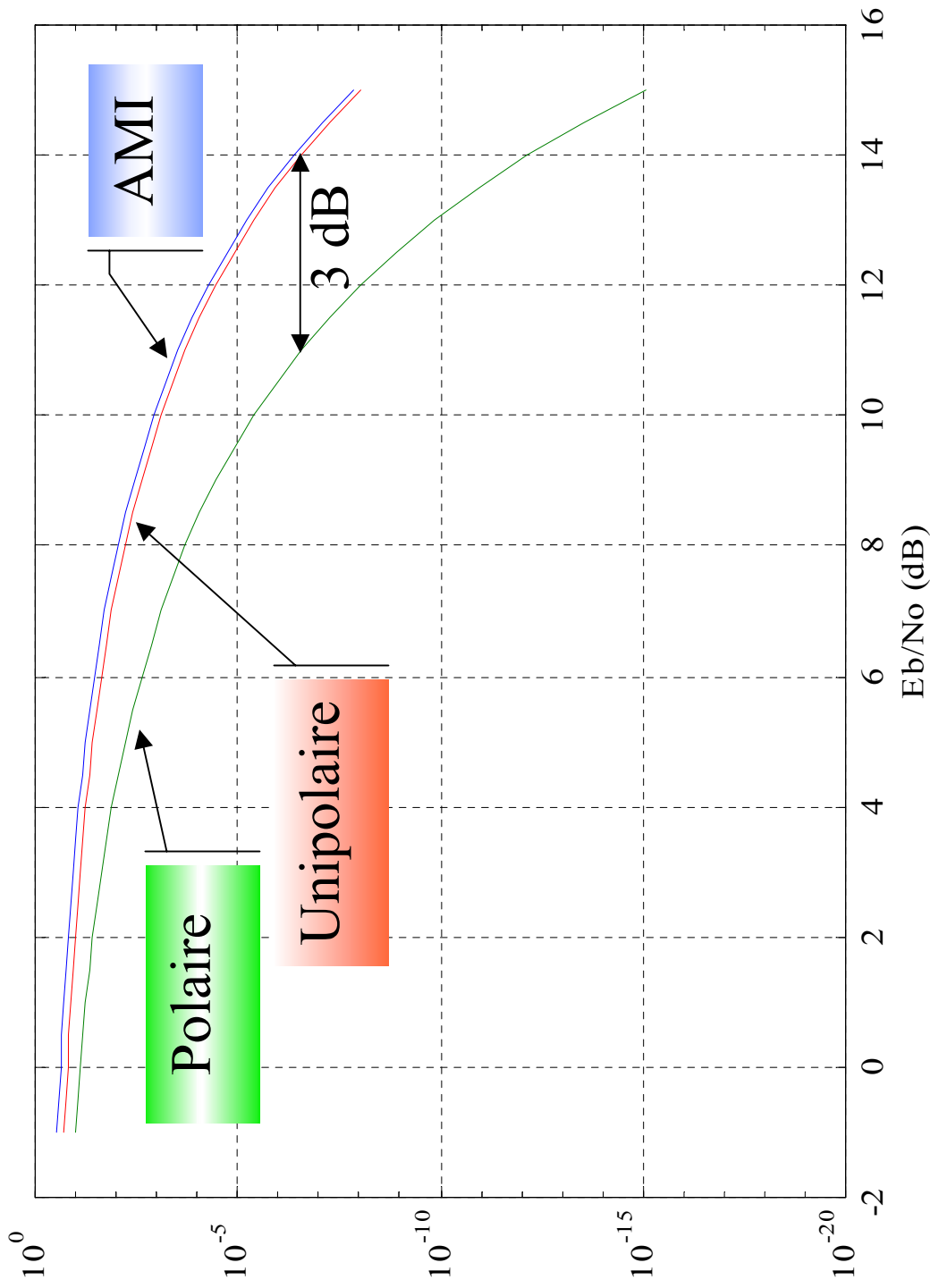
$$P_e = \frac{3}{2} Q \left[ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$$



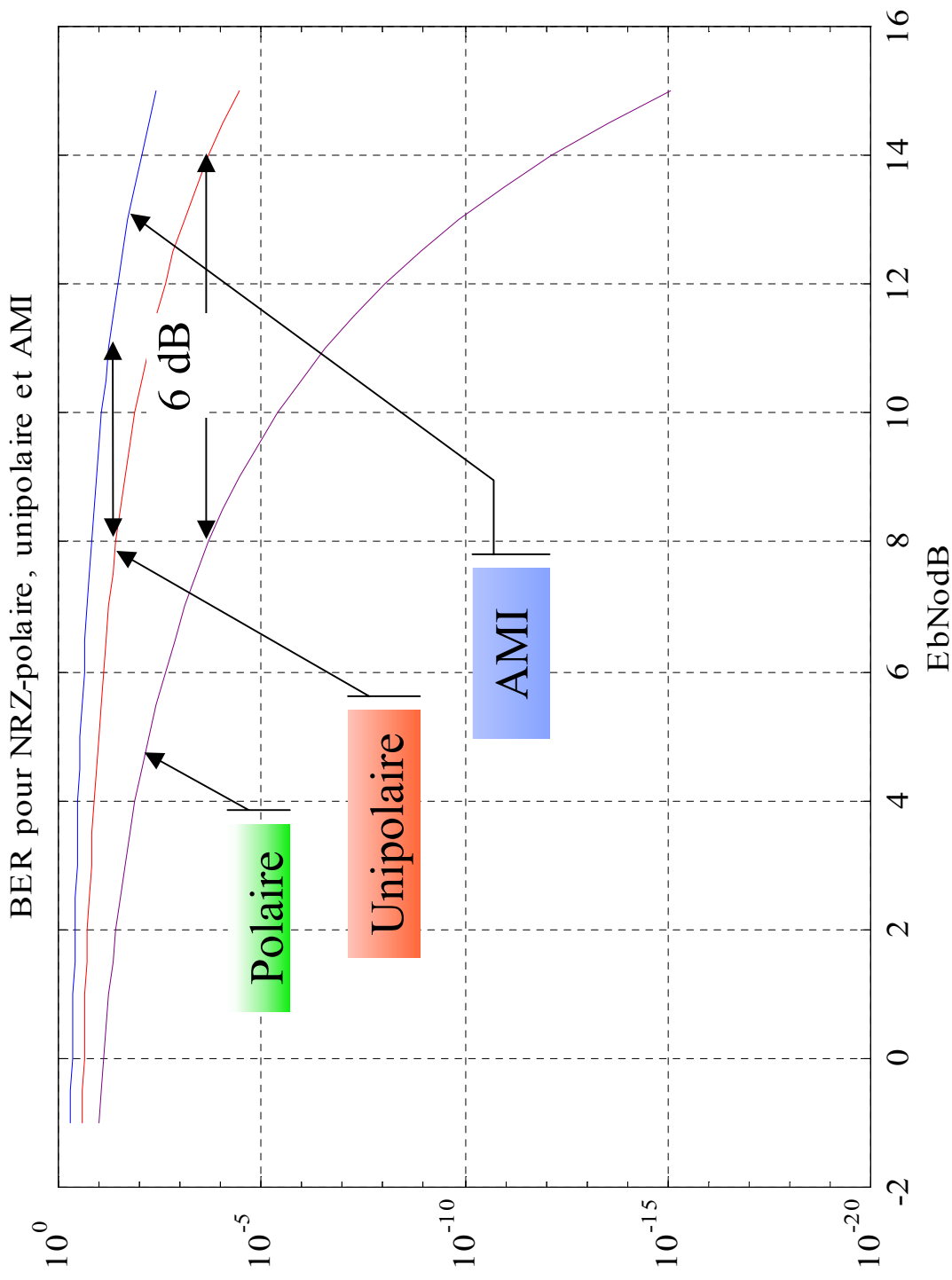
# Comparaison des performances du FA et du FPBas (AMI-NRZ)



# Comparaison des performances de la détection par FA



# Comparaison des performances de la détection par FPBAs





	Filtre passe-bas	Filtre adapté
<p>✿ Unipolaire</p>	$P_e^{(B=2/T)} = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{4N_0}} \right)$	$P_e = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$
<p>✿ Polaire</p>	$P_e^{(B=2/T)} = Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$	$P_e = Q \left( \sqrt{2 \left( \frac{E_b}{N_0} \right)} \right)$
<p>✿ AMI</p>	$P_e^{(B=2/T)} = \frac{3}{2} Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{4N_0}} \right)$	$P_e = \frac{3}{2} Q \left[ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$