UNIVERSITÉ D'OTTAWA
ELG 4571
Systèmes de télécommunications
J.-Y. Chouinard

COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DU CANADA
GEF 411A
Théorie de Communication
M. Hefnawi

UNIVERSITÉ DE MONCTON
GELE 4521
Télécommunications
Y. Bouslimani

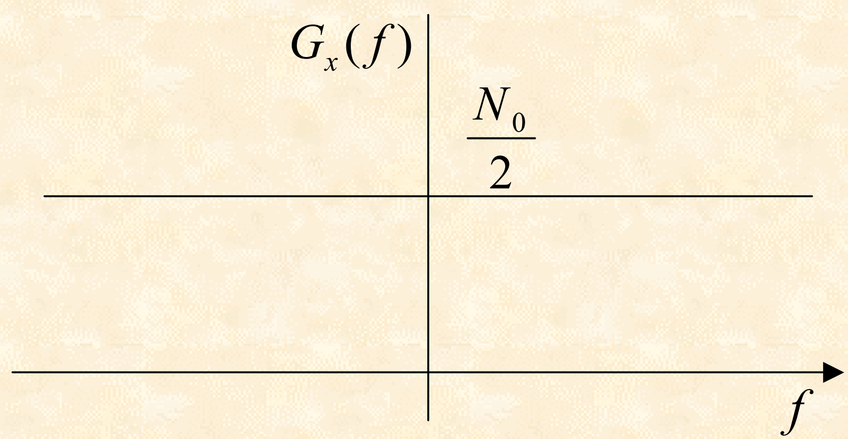
Systèmes de communication en présence de bruit

Bruit blanc

Définition

Un processus aléatoire $x(t)$ est dit "bruit blanc" si sa densité spectrale de puissance est constante pour toutes les fréquences:

$$G_x(f) = \frac{N_0}{2}$$



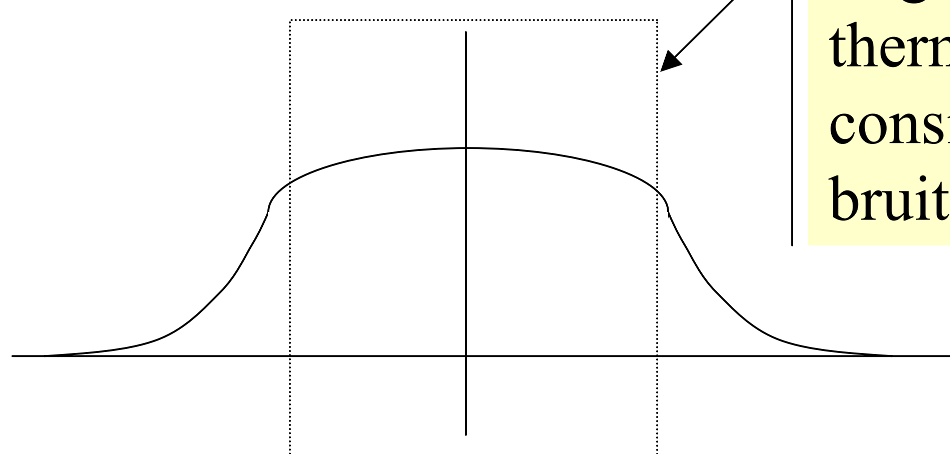
Bruit blanc

<u>Exemple: Bruit thermique</u>

Le bruit thermique est produit par les mouvements aléatoires des électrons dans un médium. L 'intensité de ces mouvements augmente avec la température. La DSP d 'un tel processus est de la forme:

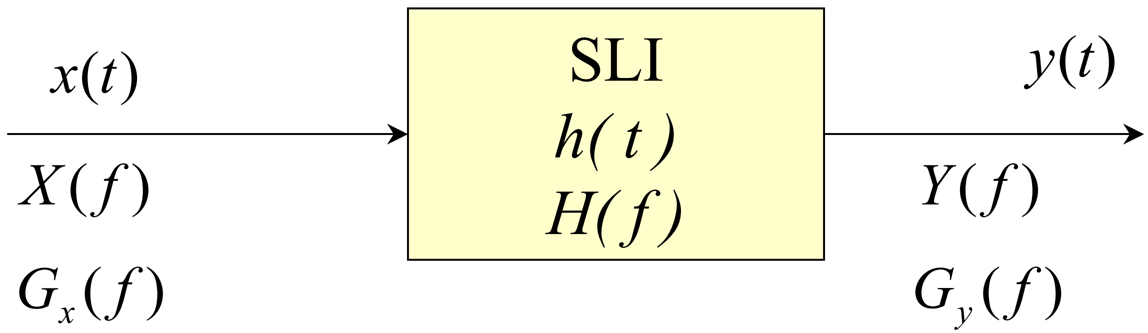
$$G(f) = \frac{A|f|}{e^{B|f|} - 1}$$

– A et B sont des constantes qui dépendent de la température et d 'autres constantes physiques



Région où le bruit thermique peut être considéré comme bruit blanc

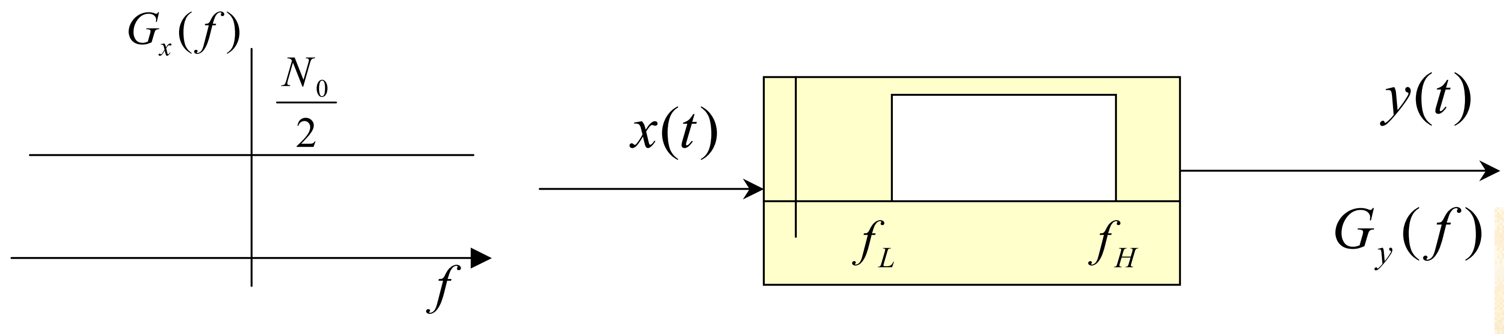
Relation entrée-sortie



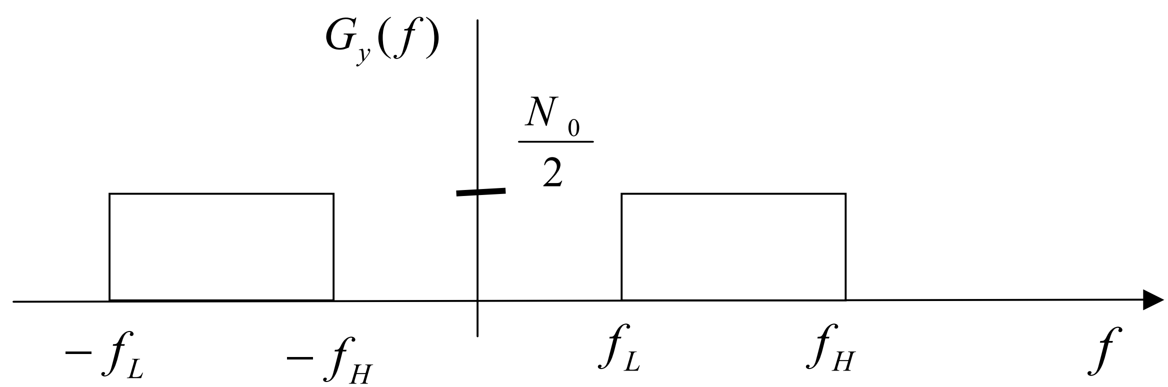
- $y(t) = h(t) * x(t)$
- $Y(f) = H(f)X(f)$
- $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$

Bruit blanc : Relation entrée-sortie

Exemple



P_{sortie} ?



$$P_{sortie} = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)|H(f)|^2 df = 2\int_{f_L}^{f_H} \frac{N_0}{2} df = N(f_H - f_L)$$

Processus à bande passante limitée

- Tous les signaux réels à bande limitée peuvent être représenté par:

$$\begin{cases} v(t) = \Re e\left\{g(t)e^{j\omega_c t}\right\} \\ v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\sin\omega_c t \\ v(t) = R(t)\cos\left(\omega_c t + \theta(t)\right) \end{cases}$$

g(t): enveloppe complexe

$$g(t) = |g(t)|e^{j\angle g(t)} = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

R(t): enveloppe réelle

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

θ(t): la phase

$$\theta(t) = \angle g(t) = \tan^{-1}\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right]$$

x(t): la composante en phase

$$x(t) = R(t)\cos\theta(t)$$

y(t): la composante en quadrature

$$x(t) = R(t)\sin\theta(t)$$

Processus à bande passante limitée

Quelques propriétés des processus à bande passante limitée

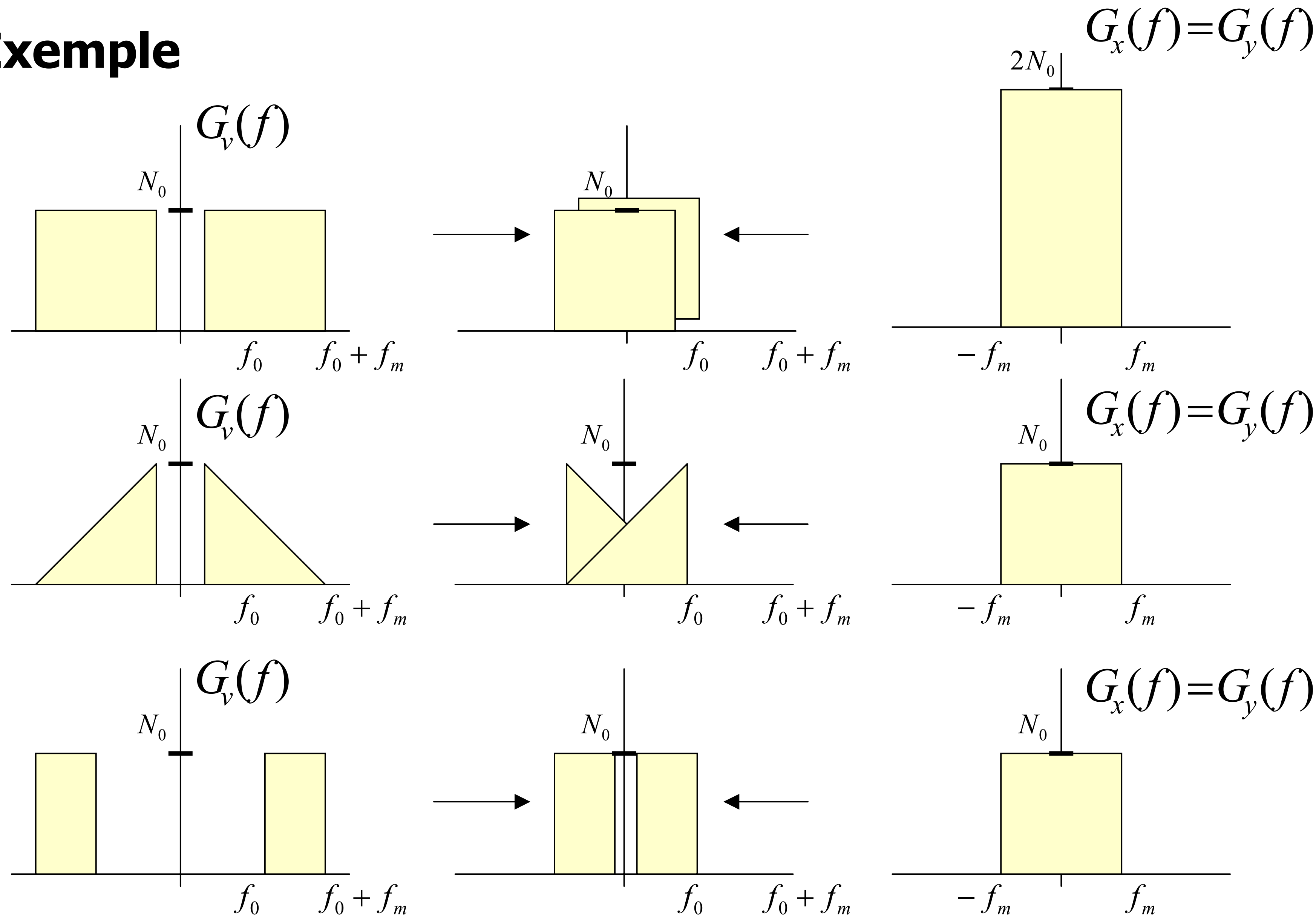
- $$G_v(f) = \frac{1}{4}\left[G_g(f - f_c) + G_g(-f - f_c)\right]$$

- $$\overline{v^2} = \frac{1}{2}\overline{|g(t)|^2}$$

- $$G_x(f) = G_y(f) = \begin{cases} G_v(f - f_c) + G_v(f + f_c), & |f| < B_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Processus à bande passante limitée

Exemple



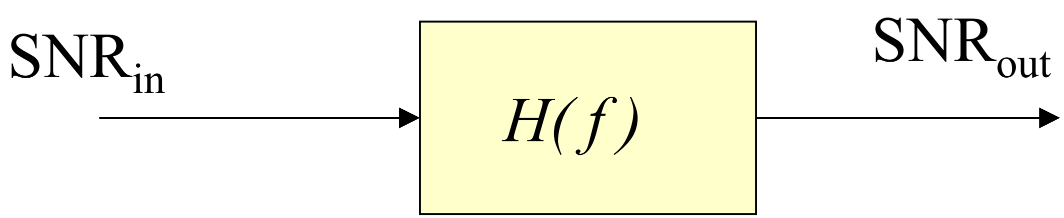
Rapport signal-sur-bruit (SNR)

- On définit le rapport signal-sur-bruit par:

$$SNR = \frac{P_s \ (puissance\ du\ signal)}{P_n \ (puissance\ du\ bruit)}$$

- On définit le facteur d 'amélioration du système en SNR par:

$$\Delta SNR = \frac{SNR_{out}}{SNR_{in}}$$



- Généralement on exprime le facteur d 'amélioration en décibels

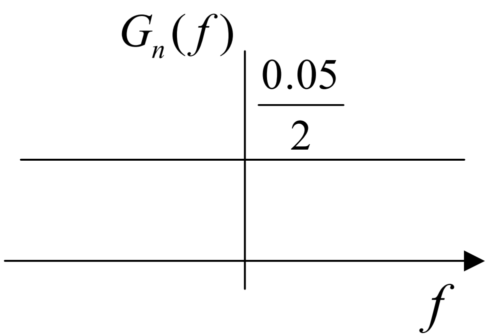
$$\Delta SNR_{dB} = 10 \log_{10}\left(\frac{SNR_{out}}{SNR_{in}}\right) = SNR_{out}\big|_{dB} - SNR_{in}\big|_{dB}$$

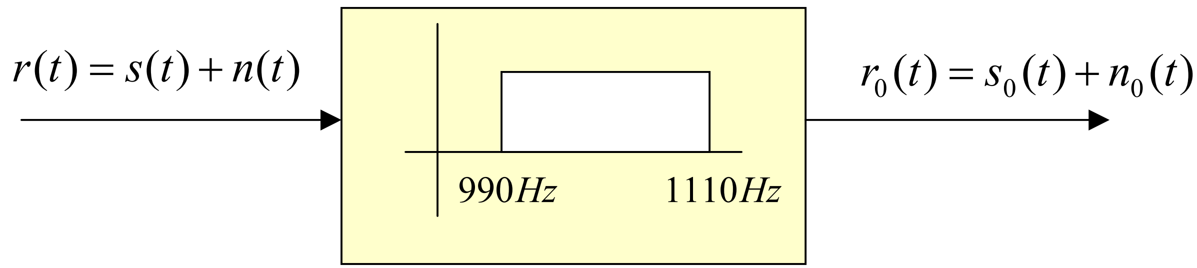
Rapport signal-sur-bruit (SNR)

Exemple

$$s(t) = 5\cos 2\pi \times 1000t + 10\cos 2\pi \times 1100t$$

SNR_{sortie} ?





$$P_{s_0} = \frac{25}{2} + \frac{100}{2} = 62.5 watts$$

$$P_{n_o} = 2\int_{990}^{1110} G_n(f)df = 6 watts$$

$$SNR_{sortie} = 62.5/6 = 10.4$$

$$SNR_{sortie}\Big|_{dB} = 10.17dB$$

Filtre adapté

But: maximiser le rapport signal-sur-bruit à la sortie du système

$r(t) = s(t) + n(t)$

Filtre adapté
$h(t)$
$H(f)$

$r_0(t) = s_0(t) + n_0(t)$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{s_0^2(t)}{n_0^2(t)}$$

Théorème

Le filtre adapté est le filtre linéaire qui maximise $(S/N)_{out}$ et dont la fonction de transfert est donnée par:

$$H(f) = K\frac{S^*(f)}{G_n(f)}e^{-j\omega t_0}$$

- $S(f)$ est la transformée de Fourrier du signal connu s(t) qui est supposé de durée limitée T.
- t_0 est l 'instant d 'échantillonnage où le rapport $(S/N)_{out}$ est évalué
- K est une constante arbitraire non nulle
- $G_n(f)$ est la densité spectrale de puissance de $n(t)$

Filtre adapté

Preuve On désire trouver H(f) qui maximise le SNR_{out}

$$\left.\begin{aligned} s_0(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j\omega t_0}\,df \\ \overline{n_0^2(t)} &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f)\,df \end{aligned}\right\} \Rightarrow SNR_{out} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j\omega t_0}\,df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f)\,df}$$

Inégalité de Schwarz

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)\,df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2\,df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2\,df$$

L'égalité se produit lorsque: $A(f) = K \times B^*(f)$

L'inégalité de Schwarz peut s'appliquer au numérateur du SNR_{out} en posant:

$$A(f) = H(f)\sqrt{G_n(f)} \qquad B(f) = \frac{S(f)e^{j\omega t_0}}{\sqrt{G_n(f)}}$$

Filtre adapté

$$SNR_{out} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f)\,df \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)}\,df}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_n(f)\,df}$$

$$\Downarrow$$

$$SNR_{out} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)}\,df$$

L'égalité se produit lorsque:

$$\boxed{H(f)\sqrt{G_n(f)} = \frac{K \times S^*(f)e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{G_n(f)}}}$$

D'où le théorème

Filtre adapté

Cas d 'un bruit blanc

Pour le cas d 'un bruit blanc la description d 'un filtre adapté est simplifiée comme suit:

$$G_n(f) = \frac{N_0}{2} \Longrightarrow H(f) = \frac{2K}{N_0} S^*(f) e^{-j\omega t_0}$$

$$SNR_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{G_n(f)} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{N_0/2} df \overset{\text{Théorème de Parseval}}{=} \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \Longrightarrow \boxed{SNR_{out} = \frac{2E_s}{N_0}}$$

- Le SNR_{out} dépend de l'énergie du signal et du niveau de la PSD du bruit

Exemple

$$s(t) = A \; ; \; pour \;\; 0 < t < T$$

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^T A^2 dt = A^2 T \Longrightarrow SNR_{out} = \frac{2A^2T}{N_0}$$

Filtre adapté

Théorème:

Quand le bruit d 'entrée est blanc, la réponse impulsionnelle du filtre adapté devient comme suit:

$$h(t) = Cs(t_0 - t)$$

C: Constante arbitraire réelle et positive

Preuve

$$h(t) = F^{-1}\left[H(f)\right] = \frac{2K}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} S^*(f)\, e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} df$$

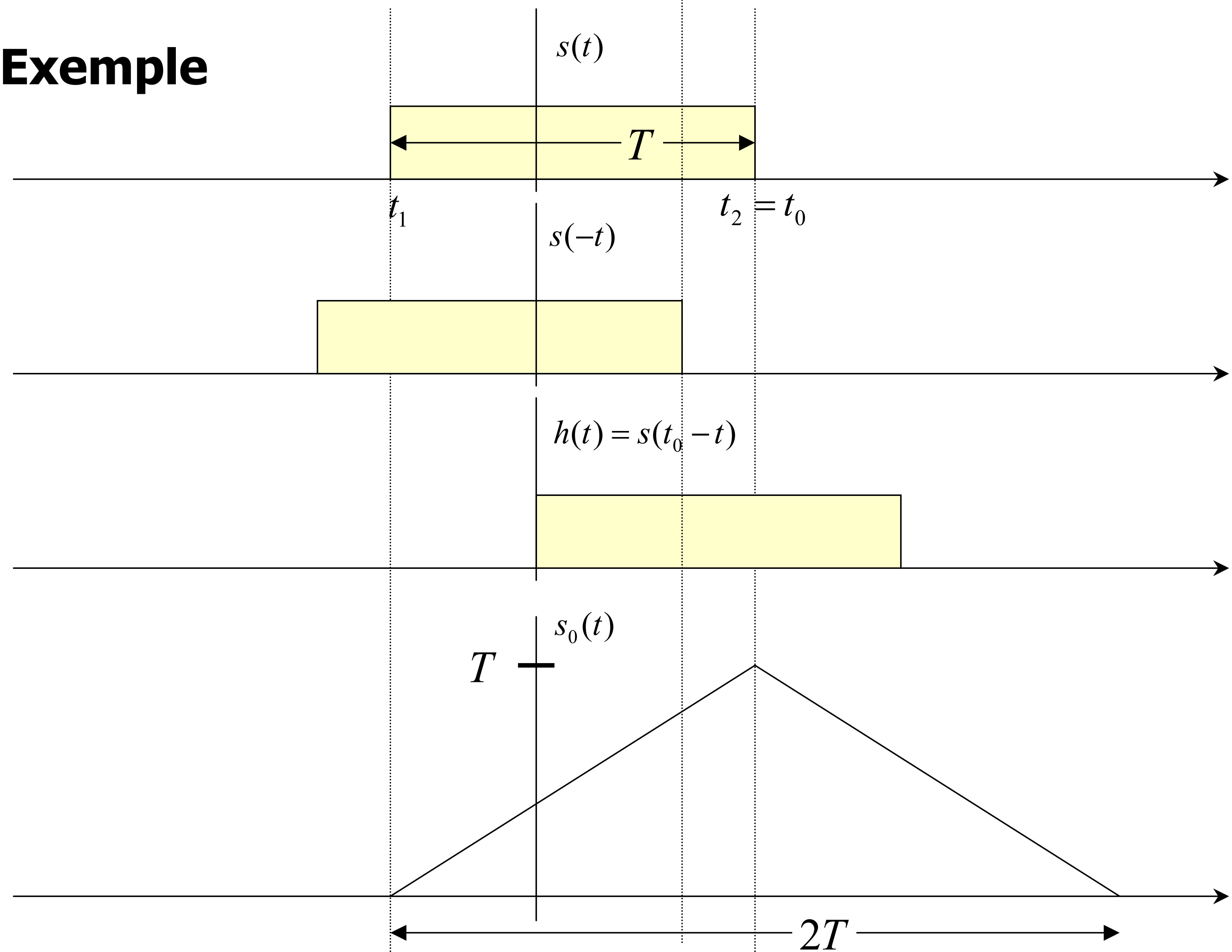
$$= \frac{2K}{N_0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)\, e^{-j2\pi f(t-t_0)} df\right]^*$$

$$= \frac{2K}{N_0}\left[s(t_0 - t)\right]^*$$

$$s(t) : signal \quad réel \quad \rightarrow \quad h(t) = \frac{2K}{N_0}\left[s(t_0 - t)\right]$$

Filtre adapté

Exemple



Filtre adapté

Corrélateur

Théorème:

Pour le cas d ’un bruit blanc, le filtre adapté peut être réalisé par un processus de corrélation:

$$r_0(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} r(t)s(t)dt$$