Date: Mardi, 8 janvier 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

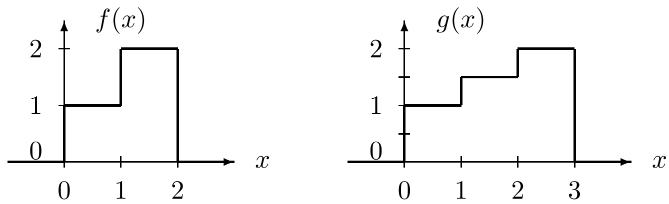
Devoir #1 (à remettre le mardi 15 janvier 2002 au cours (i.e. avant 11h30.)

Pour ce devoir, **tous les graphiques doivent être faits à la main**: on ne peut utiliser aucune calculatrice ou programme permettant de tracer ces graphiques.

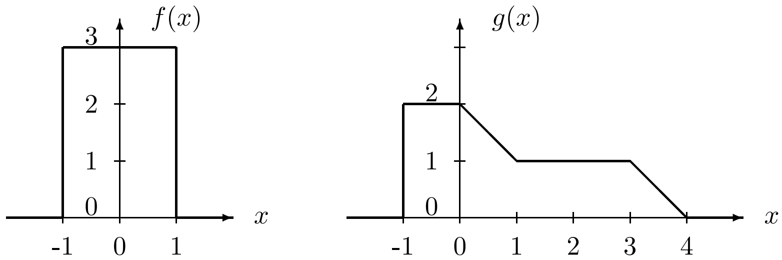
Problème 1: Tracez sur le même graphique les fonctions suivantes:

a) $g_1(x) = |\cos(x)|$,
b) $g_2(x) = \sqrt{\cos^2(x)}$,
c) $g_3(x) = \cos^2(x + \frac{1}{4}\pi)$,
d) $g_4(x) = \cos^{2000}(x)$.

Problème 2: Effectuez graphiquement la convolution des fonctions $f(x) * g(x)$ suivantes:



a)



b)

Indiquez les valeurs numériques aux points importants de ces convolutions.

Problème 3: Sachant que $\Re\{z_1 z_2\} = \Re\{z_1\}\Re\{z_2\} - \Im\{z_1\}\Im\{z_2\}$, comment peut-on exprimer:

$$\cos(A+B) = \Re\left\{e^{j(A+B)}\right\} = \Re\left\{e^{jA}e^{jB}\right\}$$

Problème 4: Question 2.10 (signaux pairs seulement: i.e., 2, 4, 6 et 8) du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002). En premier lieu, dessinez chacun de ces signaux.

Problème 5: Un système ayant à son entrée des signaux complexes donne à sa sortie le conjugué complexe de son entrée. Ce système est-il:

a) linéaire?
b) invariant dans le temps?
c) causal?
d) stable à entrées et sorties bornées?

Justifiez chacune de vos réponses.

Problème 6: Démontrez que si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux signaux d'énergie finie pour lesquels le spectre de $x(t)$ est nul lorsque $|f| > B_1$ et celui de $y(t)$ est nul également pour $|f| > B_2$, alors $x(t)y(t)$ a un spectre nul lorsque $\|f\| > (B_1 + B_2)$ (supposez les largeurs de bande B_1 et B_2 sont finies). Quelle est alors la largeur de bande de $x^2(t)$? Pourrait-on utiliser ce résultat pour évaluer la largeur de bande de $\sqrt{x(t)}$ (supposez que $x(t) \geq 0$ en tout temps)?

Problème 7: Démontrez qu'en général:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) * g(x)\right] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right] * g(x) = f(x) * \left[\frac{d}{dx}g(x)\right]$$

Existe-t-il des fonctions pour lesquelles ces relations ne s'appliquent pas?

Date: Mardi, 15 janvier 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #2 (à remettre le mardi 22 janvier 2002 au début du cours (i.e. 11h30).)

Problème 1: Séries de Fourier trigonométrique et exponentielle

Un signal $g(t)$ est périodique de période $T = 2$. Pour $t \in [-1, 1)$, on a:

$$g(t) = \begin{cases} -2t, & -1 \leq t < 0; \\ 0, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

a) Calculez les séries de Fourier sous formes trigonométrique et exponentielle complexe de $g(t)$. Faites un schéma montrant clairement l'addition de ces séries de Fourier.

b) Un filtre passe-bas idéal de largeur de bande de 2 Hz est décrit par la réponse en fréquence qui suit:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |f| < 2; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Si on applique le signal $g(t)$ à l'entrée de ce filtre, quel sera le signal à sa sortie?

Problème 2: *(transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac)*

Déterminez la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ en considérant cette dernière comme le cas limite :

a) d'une fonction rectangulaire:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \prod \left(\frac{t}{\epsilon} \right)$$

b) d'un sinus cardinal:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \text{sinc} \left(\frac{t}{\epsilon} \right)$$

Problème 3: *(transformée de Fourier d'une séquence d'impulsions de Dirac)*

Question 2.23 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 4: *(transformées de Fourier)*

Question 2.11 du manuel de cours.

Problème 5: *(propriétés de la convolution)*

Démontrez que lorsque les convolutions et intégrales existent, les propriétés suivantes de la convolution sont vérifiées:

a) $x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$

b) $x(t) * [y(t) + z(t)] = [x(t) * y(t)] + [x(t) * z(t)]$

c) $\int_{-\infty}^{t} [x(u) * y(u)]\, du = \left[\int_{-\infty}^{t} x(u)du\right] * y(t)$

Problème 6: *(signaux de puissance ou d'énergie finie)*

Question 2.30 du manuel de cours.

Problème 7: *(puissance, énergie et densité spectrales de puissance et d'énergie)*

Questions 2.32 du manuel de cours.

Problème 8: *(densité spectrale d'un signal d'énergie tronqué)*

Question 2.33 du manuel de cours.

Date: Mardi, le 22 janvier 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #3 (à remettre le mardi 29 janvier 2002 dans la boîte de devoirs ELG-3570/3170 avant 11h00.)

Problème 1: *(théorême de Parseval)*

Le théorème de Parseval pour la transformée de Fourier indique que pour deux signaux d'énergie $g_1(t)$ et $g_2(t)$:

$$\boxed{\langle g_1(t), g_2(t)\rangle = \langle G_1(f), G_2(f)\rangle}$$

où le produit interne $\langle g_1(t), g_2(t)\rangle$ est effectué dans l'intervalle $L_2 = (-\infty, \infty)$. En utilisant ce résultat trouvez:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2}\, dx,$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \frac{\sin \beta x}{\beta x}\right] dx,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \frac{1}{4+x^2}\right] dx.$

Suggestion: Lorsque $a > 0$, on a: $e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \dfrac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$.

Problème 2: *(fonctions orthogonales)*

a) Déterminez quelle est la condition pour les valeurs de t_1 et t_2, pour que les fonctions $\text{sinc}(t - t_1)$ et $\text{sinc}(t - t_2)$ soient orthogonales dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

b) Montrez que le produit interne $\langle x(t), \text{sinc}(t - t_1)\rangle = x(t_1)$ si $x(t)$ est un signal continu d'énergie finie dont le spectre est nul pour $|f| \geq \frac{1}{2}$.

Conseil: Utilisez le théorème de Parseval pour la transformée de Fourier.

Problème 3: *(transformées de Hilbert)*

Soit $\hat{g}(t)$ la transformée de Hilbert de $g(t)$. Démontrez les paires de transformées de Hilbert suivantes:

$g(t)$	$\hat{g}(t)$
$\prod\left(t-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{\pi}\ln\left[\frac{\lvert t\rvert}{\lvert t-1\rvert}\right]$
$\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}$	$\frac{t}{\alpha^2+t^2}$

Dessinez sur un graphique de chacune paires de transformées de Hilbert. Est-ce que $g(t)$ et $\hat{g}(t)$ ont des formes similaires?

Problème 4: *(transformées de Fourier et de Hilbert)*

Calculez la transformée de Fourier de:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Démontrez que la transformée de Hilbert de la partie réelle de $G(f)$ est la partie imaginaire de $G(f)$.

Conseil: Cette propriété est vraie pour tout signal $g(t)$ nul pour $t < 0$. Ces fonctions sont appelées fonctions causales.

Problème 5: *(linéarité de la transformée de Hilbert)*

Calculez la transformée de Hilbert de $\cos^3 \omega_0 t$, où $\omega_0 > 0$. La réponse est-elle $\sin^3 \omega_0 t$?

Conseil: Décomposez $\cos^3 x$ comme une somme de sinusoïdes de fréquences angulaires ω_0, $2\omega_0$ et $3\,\omega_0$ et utilisez la propriété de linéarité de la transformée de Hilbert.

Problème 6: *(énergie et transformée de Hilbert)*

Soient $g(t)$ un signal d'énergie finie E_g et $\hat{g}(t)$ sa transformée de Hilbert. Montrez que l'énergie de $\hat{g}(t)$ est égale aussi à E_g.

Problème 7: *(orthogonalité et transformée de Hilbert)*

Question 2.48 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Date: Mardi, le 29 janvier 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #4 (à remettre le mardi 5 février 2002 dans la boîte de devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation)*

La fonction d'intercorrélation entre deux signaux $g_1(t)$ et $g_2(t)$ est définie comme:

$$R_{g_1 g_2}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_1^*(t) g_2(t+\tau) dt.$$

La fonction d'autocorrélation $R_g(\tau)$ d'un signal $g(t)$ est alors définie comme étant la fonction d'intercorrélation du signal $g(t)$ avec lui-même.

a) Démontrez que la fonction d'autocorrélation de $h(t) = \alpha g_1(t) + \beta g_2(t)$, pour laquelle α et β sont des nombres complexes, est donnée par

$$R_h(\tau) = |\alpha|^2 R_{g_1}(\tau) + |\beta|^2 R_{g_2}(\tau) + 2\Re\left[\alpha^* \beta R_{g_1 g_2}(\tau)\right]$$

b) Deux signaux de puissance $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont dits non corrélés si leur fonction d'intercorrélation est nulle. Montrez que si deux signaux $g_1(t)$ et $g_2(t)$ sont non corrélés, alors le spectre de puissance de leur somme $x(t) = g_1(t) + g_2(t)$ est égal à:

$$S_x(f) = S_{g_1}(f) + S_{g_2}(f).$$

Problème 2: *(spectre de puissance)*

a) Démontrez que le spectre de puissance $S_x(f)$ de la somme de sinusoïdes $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i),$$

où toutes les fréquences f_i sont positives et différentes, est donné par la relation:

$$S_x(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4} A_i^2 \{\delta(f - f_i) + \delta(f + f_i)\}$$

(i.e., le spectre de puissance est la somme des spectres de puissance de chacune des sinusoïdes).

b) Quel est le spectre de puissance de $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_c t + \theta_1) + A_2 \sin(2\pi f_c t + \theta_2)$? *Conseil:* exprimez $x(t)$ comme une simple sinusoïde.

Problème 3: *(spectre de puissance)*

Un signal $m(t)$ a un spectre de puissance $S_m(f) = \Pi(f/2B)$ pour $B = 6.8$ kHz.

a) Déterminez la puissance moyenne du signal $m(t)$.

b) Dessinez le spectre de puissance de $x(t) = 5m(t)\sin(2\pi f_c t + \theta)$ pour le cas où $f_c = 2.1$ MHz et $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

Problème 4: *(représentation complexe en bande de base)*

Question 2.56 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 5: *(représentation complexe en bande de base)*

Supposons que $a(t)$ et $b(t)$ soient deux signaux réels ayant comme transformées de Fourier $A(f)$ et $B(f)$ respectivement, et que pour une certaine fréquence $f_c > 0$, nous ayons que $s(t) = a(t)\cos(2\pi f_c t) - b(t)\sin(2\pi f_c t)$. Nous désirons savoir quelle est l'enveloppe ainsi que l'enveloppe complexe de $s(t)$.

a) Démontrez que pour tout $f_1 > 0$, nous pouvons écrire que:

$$\begin{array}{rcl} s(t) & = & \Re\left\{[a(t) + jb(t)]\, e^{j2\pi f_c t}\right\} \quad = \quad |a(t) + jb(t)| \cos(2\pi f_c t + \phi_c(t)) \\ s(t) & = & \Re\left\{[a(t) + jb(t)]\, e^{j2\pi [f_c - f_1]t} e^{j2\pi f_1 t}\right\} \quad = \quad |a(t) + jb(t)| \cos(2\pi f_1 t + \phi_1(t)) \end{array}$$

où $\phi_c(t) = \arg[a(t) + jb(t)]$ et $\phi_1(t) = \arg[a(t) + jb(t)] + 2\pi[f_c - f_1]t$.

b) Montrez que le spectre de $s(t)$ en fonction de $A(f)$, $B(f)$ et f_c est donné par:

$$S(f) = \frac{1}{2}[A(f - f_c) + jB(f - f_c)] + \frac{1}{2}[A(f + f_c) - jB(f + f_c)].$$

Montrez également que si $A(f)$ et $B(f)$ sont égaux à zéro exactement pour $|f| \geq B$ où $B < f_c$, alors la partie positive de ce spectre est exactement $\frac{1}{2}[A(f - f_c) + jB(f - f_c)]$. Pour démontrer cette affirmation, vous pouvez le faire graphiquement tout simplement.

c) Compte-tenu des résultats de la sous-question précédente, montrez que lorsque $A(f)$ et $B(f)$ sont exactement égaux à zéro pour $|f| \geq B$ où $B < f_c$, alors

i) la préenveloppe positive de $s(t)$ par rapport à f_c est égale à:

$$s_+(t) = \{a(t) + jb(t)\}e^{j2\pi f_c t};$$

ii) l'équivalent complexe (représentation complexe) en bande de base de $s(t)$ par rapport à f_c est:

$$\tilde{s}_c(t) = a(t) + jb(t);$$

iii) l'équivalent complexe en bande de base de $s(t)$ par rapport à f_1, où $f_1 > B$, est donné par:

$$\tilde{s}_1(t) = \{a(t) + jb(t)\}e^{j2\pi(f_c - f_1)t} \text{ et finalement,}$$

iv) l'enveloppe de $s(t)$ est la même par rapport à f_1 qu'elle l'est par rapport à f_c et est donnée par $\sqrt{a^2(t) + b^2(t)}$ (notez cependant que la phase de $s(t)$ par rapport à f_c n'est pas la même que par rapport à f_1).

Montrez, en utilisant des graphiques des spectres des signaux, que les affirmations ci-dessus ne sont plus tout-à-fait vraies si $a(t)$ et $b(t)$ ne sont pas strictement limitées aux fréquences inférieures à f_c et f_1. (Cependant, ces affirmations donnent une très bonne approximation si $a(t)$ et $b(t)$ n'ont pas de composantes fréquentielles significatives pour $|f|$ plus grand que f_c ou f_1).

Date: Mardi, le 5 février 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #5 (à remettre le mardi 12 février 2002 dans la boîte de devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(taux d'échantillonnage)*

Déterminez le taux d'échantillonnage de Nyquist ainsi que l'intervalle pour chacun des signaux suivants:

a) $g_1(t) = \sin^3(2000\pi t)$;

b) $g_2(t) = \text{sinc}^2(1000t)\cos(2000\pi t)$;

c) $g_3(t) = \text{sinc}(3000t)\text{sinc}(2000t)\sin(3000\pi t)$.

Problème 2: *(échantillonnage d'un signal)*

Le spectre d'un signal $g(t)$ est donné par: $G(f) = \Lambda\left(\frac{f}{B}\right)$, où f est la fréquence en Hz. Ce signal est échantillonné à un taux de $1.7B$ échantillons/s et le signal échantillonné

$$g_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t-nT),$$

est constitué d'échantillons espacés de T secondes dans le temps. Trouvez le spectre du signal échantillonné $g_s(t)$ et déterminez le signal qui serait récupéré en filtrant $g_s(t)$ par un filtre passe-bas idéal de bande passante égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage et en normalisant par T. Maintenant, si $g(t)$ était plutôt appliqué à l'entrée du même filtre passe-bas avant d'être échantillonné, donnant le signal $\tilde{g}(t)$, quel serait le signal récupéré si le nouveau signal échantillonné $\tilde{g}_s(t)$:

$$\tilde{g}_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(nT)\delta(t-nT),$$

était à nouveau appliqué à l'entrée du filtre passe-bas et normalisé par T? Lequel des signaux récupérés serait le plus semblable au signal original $g(t)$? Déterminez cette similarité en considérant *l'énergie de la différence* entre le signal récupéré et le signal original.

Problème 3: *(échantillonnage non-idéal)*

En pratique, la reconstruction d'un signal $g(t)$ à partir de ses échantillons ne se fait pas avec un signal échantillonné idéal $g_s(t)$ de la forme:

$$g_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\delta(t - nT).$$

mais plutôt à partir d'un signal échantillonné $g_p(t)$ pour lequel les échantillons demeurent constants pendant une certaine durée. Un tel signal $g_p(t)$ peut s'exprimer de la manière suivante:

$$g_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)p(t - nT),$$

où la fonction $p(t)$ est définie comme:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T_1); \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et pour laquelle $T_1 \leq T$.

Tracez le signal échantillonné $g_p(t)$ pour un signal typique $g(t)$ lorsque $T_1 = T$. Déterminez le spectre du signal $g_p(t)$ en fonction du spectre $G(f)$ et indiquez comment on peut récupérer le signal original $g(t)$ à partir de $g_p(t)$ (avec possiblement un retard).

Si T_1 était plus petit, serait-il plus facile de récupérer $g(t)$ à partir de $g_p(t)$?

Suggestion: Notez que le signal $g_p(t) = g_s(t) * p(t)$.

Problème 4: *(modulation d'amplitude à bande latérale double)*

Question 3.1 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 5: *(modulation d'amplitude à bande latérale double)*

Question 3.2 du manuel de cours. Calculez également l'énergie du signal transmis (supposez que f_c est grand).

Problème 6: *(composantes non linéaires en modulation d'amplitude)*

Question 3.4 du manuel de cours.

Problème 7: *(densité spectrale de puissance en modulation d'amplitude)*

Question 3.5 du manuel de cours.

Date: Mardi, le 26 février 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #6 (à remettre le mardi 5 mars 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(produit durée-largeur de bande)*

Le principe durée-largeur de bande (*Time-Bandwidth Principle*) indique que le produit de la durée d'un signal, T, par sa largeur de bande, B, a une borne inférieure K qui est de l'ordre de l'unité. Ceci s'applique aux définitions *raisonables* de durée et de largeur de bande d'un signal.

Considérons par exemple, que l'on définisse la durée d'un signal $g(t)$ comme étant la largeur d'un rectangle ayant la même *hauteur* que la valeur pointe $|g(t)|$ et la même aire que $|g(t)|$. On peut définir cette quantité comme étant la *durée rectangulaire* du signal. De même, on peut définir une *largeur de bande rectangulaire* pour $g(t)$ comme étant la moitié de la largeur d'un rectangle dont la hauteur est la valeur maximale de $|G(f)|$ et qui a la même aire que $|G(f)|$.

Maintenant, il est évident que le fait de changer la hauteur du signal et de le décaler dans le temps, n'affectera pas sa *durée rectangulaire* ni sa *largeur de bande rectangulaire.* De même, la multiplication de ce signal par une exponentielle complexe ne changera pas ces quantités.

En supposant que nous décalions le signal dans le temps et que nous le multiplions par une exponentielle complexe adéquate, de telle sorte que la valeur pointe de $|g(t)|$ se produise à $t = 0$ et que la valeur pointe de $|G(f)|$ se trouve à $f = 0$, alors la *durée rectangulaire* du signal sera donnée par:

$$T_r \equiv \frac{1}{|g(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt$$

et sa *largeur de bande rectangulaire* sera:

$$B_r \equiv \frac{1}{2|G(0)|} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|\, df.$$

Montrez que dans ce cas précis, $T_r B_r \leq \frac{1}{2}$, quel que soit $g(t)$.

Conseil: Notez que:

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df \qquad \text{et} \qquad G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt,$$

et que pour toute fonction $f(x)$,

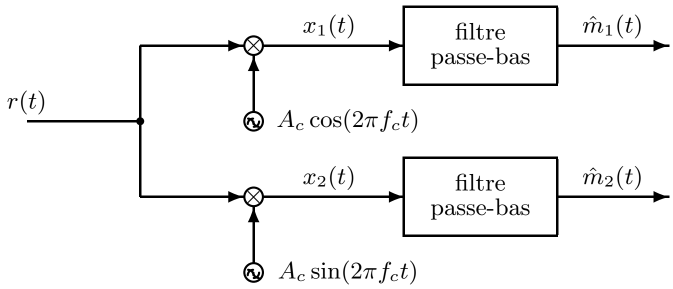
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Problème 2: *(modulation en quadrature QAM)*

Avec la modulation en quadrature QAM, il est possible de transmettre simultanément les signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ en n'utilisant qu'une largeur de bande totale de $2W$. Le signal modulé $s_{QAM}(t)$ peut s'exprimer de la manière suivante:

$$s_{QAM}(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Supposons que le signal à la sortie du transmetteur, i.e. $s_{QAM}(t)$, est transmis dans un canal (linéaire et invariant dans le temps) dont la fonction de transfert est $H(f)$ et que le signal à la sortie du canal, $r(t)$ est appliqué à l'entrée du récepteur. On peut démoduler un signal reçu QAM, $r(t)$ avec un démodulateur à deux branches comme celui ci-dessous.



Démontrez que pour pouvoir démoduler correctement $r(t)$, i.e. en $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sans croisement (*crosstalk*), il faut que:

$$H(f_c + f) \quad = \quad H^*(f_c - f), \qquad \text{pour } 0 \leq f \leq W.$$

où W est la largeur de bande des messages $m_1(t)$ et $m_2(t)$ et f_c est la fréquence porteuse.

Conseil: Évaluez les spectres à la sortie du démodulateur QAM.

Problème 3: *(modulation d'amplitude à bande latérale unique)*

Question 3.16 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 4: *(modulation d'amplitude à bande latérale résiduelle)*

Question 3.21 du manuel de cours.

Problème 5: *(composantes en phase et en quadrature pour les modulations d'amplitude)*

Question 3.22 du manuel de cours. **Ne faites pas les modulations PM et FM**.

Problème 6: *(modulation à bande latérale unique avec porteuse)*

Si nous considérons un signal à bande latérale unique (BLU ou "SSB")

$$s_{\text{BLU}}(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos 2\pi f_c t \pm \frac{1}{2}\hat{m}(t)\sin 2\pi f_c t$$

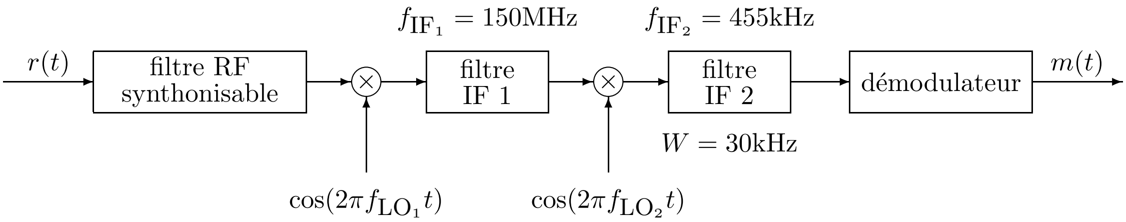
et que nous ajoutions une grande porteuse de la forme $A\cos 2\pi f_c t$ et utilisions une détection d'enveloppe, nous pourrions récupérer le message $m(t)$ de l'enveloppe. Montrez que si on additionne à la place de la porteuse $A\cos 2\pi f_c t$ une autre porteuse $A\cos(2\pi f_c t + \theta)$ alors le détecteur d'enveloppe récupèrera une version déphasée de $m(t)$ de manière semblable à la détection cohérente d'un signal à bande latérale unique avec une erreur de phase ou de fréquence.

Problème 7: *(récepteurs à conversion multiple)*

Un ingénieur doit concevoir un récepteur pour des signaux de largeur de bande de 15 kHz et ce dans la bande de fréquences allant de 15 MHz à 65 MHz. Pour obtenir une bonne sélectivité à un prix raisonnable, l'ingénieur désire employer un filtre standard IF (fréquence intermédiaire) avec une fréquence centrale de 455 kHz. Il considère en premier lieu un simple récepteur superhétérodyne, tel que vu en classe, avec un oscillateur local générant une porteuse plus élevée que la porteuse du signal modulé.

a) Si un tel système est utilisé, quel serait (i) la plage de fréquence que l'oscillateur local devrait pouvoir générer et (ii) quelle devrait être la largeur de bande du filtre RF afin d'éliminer les problèmes de fréquence image.

b) Un tel filtre (voir (a)) est difficile à réaliser en pratique même approximativement (le filtre doit être synthonisable!) et il en résulte donc des problèmes d'interférence avec la fréquence image. Afin d'éviter ces problèmes, l'ingénieur considère l'ajoût d'un étage supplémentaire au récepteur tel qu'illustré:



Quelle devrait être la fréquence f_{LO_2}? Si la sortie du premier filtre IF ne doit pas contenir de fréquences images pour le second étage, quelle doit être la bande passante de ce premier filtre IF? Pensez-vous que ce premier filtre IF sera difficile à construire en pratique? (Considérez que le niveau de difficulté pour construire un filtre passe-bande est directement fonction du rapport entre la largeur de bande et de sa fréquence centrale).

c) Quelle la plage de fréquence que doit pouvoir produire le premier oscillateur local? Quelle la largeur de bande maximale du filtre RF? Ce filtre RF variable est-il plus facile à construire que celui du récepteur superhétérodyne à un seul étage?

Remarque: Si vous avez bien résolu ce problème, vous devriez constater que le second récepteur (i.e., récepteur superhétérodyne à double conversion) est plus facile à construire que le premier mais qu'il a la même sélectivité que le premier à la différence que l'on peut employer un filtre synthonisable (en anglais "tunable") pratique non-idéal pour le rejet de la fréquence image. Un tel système à conversion multiple est requis si l'on désire une meilleure élimination de la fréquence porteuse comme c'est le cas lorsqu'un récepteur superhétérodyne est utilisé dans un analyseur de spectre.

Date: Mardi, le 5 mars 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #7 (à remettre le mardi 12 mars 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(modulation en amplitude à bande latérale double avec une porteuse)*

Si nous prenions un signal modulé en amplitude à bande latérale double (BLD ou "DSB-SC") avec une porteuse $\cos 2\pi f_c t$ et que nous l'additionnions au récepteur à la même porteuse mais d'amplitude suffisamment grande, pourrions-nous récupérer $m(t)$ de l'enveloppe du signal résultant? Que se passerait-il maintenant si la porteuse à la réception avait une petite erreur de fréquence ou de phase?

Problème 2: *(multiplexage fréquentiel (FDM))*

Question 3.42 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 3: *(récepteur superhétérodyne)*

Question 3.43 du manuel de cours.

Problème 4: *(modulation d'angle et déviations maximales de phase et de fréquence)*

Question 3.26 du manuel de cours.

Problème 5: *(déviation de fréquence, puissance et largeur de bande en modulation de fréquence)*

Question 3.24 du manuel de cours.

Problème 6: *(modulateur de fréquence de type Armstrong)*

Question 3.28 du manuel de cours.

Problème 7: *(spectre de signaux modulés en angle)*

Question 3.32 du manuel de cours.

Problème 8: *(réponse en fréquence d'un signal modulé en fréquence)*

Question 3.40 du manuel de cours. Notez que la réponse en fréquencce du filtre passe-bas aux fréquences négatives se trouve à être l'*image en miroir* des fréquences positives. Dans l'expression du signal modulé FM, remplacez l'intégrale de $-\infty$ à t par une intégrale de 0 à t. L'intégrale n'existe pas pour ce signal (et d'ailleurs pour la plupart des signaux vus dans ce cours).

Date: Mardi, le 12 mars 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #8 (à remettre le mardi 19 mars 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(signal FM filtré et discriminateur)*

Dans ce problème nous nous intéressons à l'effet du filtrage d'un signal modulé en fréquence sur les fluctuations de l'amplitude du signal et sur l'*enveloppe de la dérivée du signal* limité en fréquence afin de démontrer l'importance d'un *limiteur en bande de base.* Pour ce faire, considérons le cas où le message $m(t) = \alpha \cos(2\pi f_m t)$ et pour lequel:

$$s_{\text{FM}}(t) = A\cos\left[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)\right] = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos\left[2\pi(f_c + n f_m)t\right].$$

Les composants spectrales significatives du signal FM, $s_{\text{FM}}(t)$, sont les termes dans la somme où $|n| \leq \beta + 1$, β étant ici un entier. Si nous filtrons le signal avec un filtre passe-bande idéal afin de n'inclure que ces composantes, la sortie du filtre devient:

$$\begin{aligned}
s_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t) &= A \sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta) \cos\left[2\pi(f_c + n f_m])t\right] = A\, \Re\left[\sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta) e^{j2\pi(f_c+nf_m)t}\right] \\
s_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t) &= \Re\left[\underbrace{\left\{A \sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta) e^{j2\pi n f_m t}\right\}}_{\text{équivalent complexe } \tilde{s}_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t)} e^{j2\pi f_c t}\right]
\end{aligned}$$

Pour déterminer la sortie d'un descriminateur de fréquence avec ce signal à l'entrée, on observe que la dérivée temporelle du signal $\tilde{s}_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
\tilde{s}'_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t) &\triangleq \frac{d}{dt}\left[\tilde{s}_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t)\right] = -2\pi A \sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta)(f_c + n f_m) \sin\left[2\pi(f_c + n f_m)t\right] \\
\tilde{s}'_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t) &= 2\pi A\, \Re\left[j \sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta)(f_c + n f_m) e^{j2\pi(f_c+nf_m)t}\right] \\
\tilde{s}'_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t) &= \Re\left[\left\{j2\pi A \sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta)(f_c + n f_m) e^{j2\pi n f_m t}\right\} e^{j2\pi f_c t}\right].
\end{aligned}$$

L'envelope de $\tilde{s}'_{\text{FM}_{\text{filtré}}}(t)$ est:

$$e(t) = \left|\sum_{n=-(\beta+1)}^{\beta+1} J_n(\beta)(f_c + n f_m) e^{j2\pi n f_m t}\right|$$

Remarque: Utilisez un ordinateur pour tracer les graphiques de cette question.

a) Le signal FM filtré $s_{\mathrm{FM}_{\text{filtré}}}(t)$ peut être exprimé par $A(t)\cos[2\pi f_c t + \beta\sin(2\pi f_m t) + \Delta\phi(t)]$. Déterminez $A(t)$ et tracez-en un graphique pour $A = 1$, $\beta = 5$ et $f_c = 10 f_m$.

b) Tracez l'envelope $e(t)$ de $\tilde{s}'_{\mathrm{FM}_{\text{filtré}}}(t)$ et déterminez quelle serait la sortie d'un discriminateur de fréquence idéal ayant comme entrée $s_{\mathrm{FM}_{\text{filtré}}}(t)$ (toujours pour $A = 1$, $\beta = 5$ et $f_c = 10 f_m$). Comparez la sortie du discriminateur avec celle que l'on obtient avec le signal $s_{\mathrm{FM}}(t)$. La distorsion obtenue avec le signal à bande limitée est-elle significative?

c) Répétez la partie (b) mais en supposant que le signal est filtré davantage afin de n'inclure cette fois-ci que les composantes spectrales pour lesquelles $|n| \leq \beta - 1$.

Problème 2: *(fréquence instantanée)*

Question 3.41 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 3: *(spectres d'amplitude et de phase en modulation d'angle)*

Question 3.37 du manuel de cours.

Problème 4: *(multiplicateurs et déviations de fréquence)*

Un signal FM, modulé par le message $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$ où $f_m = 5$ kHz, a une déviation de fréquence Δf de 15 kHz. Ce signal FM est appliqué à l'entrée de deux multiplicateurs de fréquence mis en cascade. Le premier multiplicateur triple la fréquence du signal à son entrée alors que le second multiplicateur la multiplie par 5.

a) Donnez la fréquence instantanée du signal FM à l'entrée des multiplicateurs ainsi que la séparation en fréquence des composantes adjacentes du signal FM?

b) Calculez la déviation de fréquence et l'indice de modulation du signal FM à la sortie du second multiplicateur de fréquence.

c) Quelle est la fréquence instantanée du signal FM à la sortie des multiplicateurs et la séparation en fréquence des composantes adjacentes de ce signal FM? Justifiez votre réponse.

Problème 5: *(discriminateur de fréquences)*

Question 3.36 du manuel de cours.

Date: Mardi, le 19 mars 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #9 (à remettre le mardi 26 mars 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(modulation par impulsion d'amplitudes (PAM))*

Un signal binaire est modulé par impulsion d'amplitudes (PAM) NRZ avec des symboles bipolaires ± 1 avec une forme d'impulsion $p(t)$:

$$p(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)[u(t) - u(t-2T)]$$

avec un débit de transmission de $1/T$ bits/s. Dessinez $p(t)$ et tracez le signal transmis correspondant à la suite de symboles: $\ldots, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots$

Problème 2: *(modulation par déplacement de fréquence FSK)*

En modulation binaire par déplacement de fréquence FSK ("frequency shift keying" en anglais), la valeur du bit transmis par le signal modulé est déterminée par sa fréquence instantanée. Le signal transmis dans l'intervalle $[0, T]$ est donc:

$$s_0(t) = \sqrt{2E_b/T}\cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \qquad \text{ou} \qquad s_1(t) = \sqrt{2E_b/T}\cos(2\pi f_1 t + \theta_1)$$

Nous nous intéressons ici au cas où les signaux $s_0(t)$ et $s_1(t)$ sont orthogonaux (i.e., $\langle s_0(t), s_1(t)\rangle = 0$) et pour lequel f_0 et f_1 sont beaucoup plus grandes que $1/T$.

a) Montrez que les énergies de $s_0(t)$ et de $s_1(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$ sont égales à E_b (l'énergie par bit).

b) Quelle est la condition sur la séparation de fréquence entre f_0 et f_1 pour que $s_0(t)$ et $s_1(t)$ soient orthogonaux si l'on suppose que $\theta_0 = \theta_1$ (cette propriété est appelée *orthogonalité cohérente*)? Quelle est la différence minimale de fréquence (i.e., $|f_1 - f_0|$) pour laquelle les signaux sont orthogonaux, avec $\theta_0 = \theta_1$? (Lorsque la modulation FSK a cette différence minimale de fréquence et qu'en plus la phase varie linéairement de façon continue, on obtient la modulation connue sous le nom de *modulation par déplacement minimal de phase* MSK ("minimum shift keying" en anglais).)

c) Quelle est la condition sur la séparation de fréquence entre f_0 et f_1 pour que $s_0(t)$ et $s_1(t)$ soient orthogonaux quels que soient les valeurs de θ_0 et θ_1 (on identifie cette seconde propriété comme étant *l'orthogonalité non-cohérente*)? Quelle est cette fois-ci la différence minimale de fréquence pour laquelle les signaux sont orthogonaux pour toute valeur de θ_0 et θ_1?

d) Pour $\theta_0 = \theta_1$, déterminez la *distance* entre $s_0(t)$ et de $s_1(t)$ définie par:

$$\sqrt{\langle s_1(t) - s_0(t), s_1(t) - s_0(t)\rangle}$$

en fonction de la séparation $\Delta f = f_1 - f_2$, de l'énergie E_b et de la durée T. Quelle est la valeur de Δf qui maximise cette distance et donc aide le plus à distinguer $s_1(t)$ de $s_0(t)$ (et ainsi minimiser la probabilité d'erreur en FSK)?

Conseil:

$$\langle s_1(t) - s_0(t), s_1(t) - s_0(t)\rangle = \langle s_1(t), s_1(t)\rangle + \langle s_0(t), s_0(t)\rangle - 2\langle s_1(t), s_0(t)\rangle = 2\left(E_b - \langle s_1(t), s_0(t)\rangle\right).$$

Problème 3: *(modulation par déplacement d'amplitude en quadrature BQASK)*

Pour la méthode de modulation numérique connue sous le nom de modulation par déplacement d'amplitude binaire en quadrature BQASK (*"binary quadrature amplitude shift keying"* ou encore *"4-level quadrature amplitude modulation"* en anglais), le signal modulé s'exprime comme suit

$$s_{\mathrm{BQASK}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t-nT)\cos(2\pi f_c t) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m p(t-mT)\sin(2\pi f_c t)$$

où a_n et b_m sont des éléments de deux séquences de symboles binaires employant l'*alphabet* $\{-1, 1\}$ alors que $p(t)$ représente la *forme de l'impulsion* du signal. Si l'on suppose que $p(t)$ est une impulsion rectangulaire de durée T (i.e., impulsion NRZ), alors le signal transmis à chaque intervalle $[kT, (k+1)T]$ peut s'écrire des quatre façons suivantes:

$$\pm\cos(2\pi f_c t) \pm \sin(2\pi f_c t).$$

a) Montrez que ces quatre signaux peuvent chacun s'exprimer comme étant la version déphasée de la porteuse (c'est-à-dire comme $A\cos(2\pi f_c t + \theta_i)$). Déterminez les valeurs possibles de phase. Suivant cette manière de représenter ce signal, cette technique de modulation est connue aussi comme étant la modulation par déplacement de phase à quatre états MDP4 (ou QPSK: *"quadrature phase-shift keying"* ou *"quaternary phase-shift keying"*). À quel taux de transmission résultant les bits sont-ils émis?

b) Comment peut-on démoduler le signal MDP4?

   Conseil: considérez cette modulation comme de la modulation QAM pour laquelle les deux message $m_1(t)$ et $m_2(t)$ sont des signaux binaires antipolaires NRZ. Essayez de démoduler le signal comme un signal QAM, puis effectuez la démodulation à nouveau mais cette fois en utilisant les techniques habituelles de démodulation PAM (modulation par impulsion d'amplitude) pour récupérer les données des signaux en phase et en quadrature.

Problème 4: *(ouverture du diagramme d'oeil)*

Un signal modulé par impulsion d'amplitudes (PAM) NRZ avec comme symboles ± 1, doit être transmis dans un canal dont la réponse impulsionnelle $h(t)$ est donnée par:

$$h(t) = \frac{\prod\left(\frac{t-\tau}{2\tau}\right)}{2\tau}$$

pour $\tau = 1$ ms. Le débit de transmission est de $1/T$ bits/s. Dessinez les diagrammes d'oeil ("eye diagrams") que nous pourrions observer pour différents débits $1/T$, et déterminez l'ouverture des diagrammes d'oeil ("eye opening") correspondants. Quel est le débit de transmission maximal que nous pourrions utiliser en supposant que la seule contrainte au démodulateur est d'avoir une ouverture du diagramme d'oeil.

Conseil: Considerez que la sortie du canal est toujours la valeur moyenne de son entrée pendant les dernières 2τ secondes.

Date: Mardi, le 26 mars 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #10 (à remettre le mardi 2 avril 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(spectre d'un signal modulé par impulsions d'amplitude (PAM))*

Un signal $m(t) = 3\cos(2\pi f_m t)$, où $f_m = 20$ kHz est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_s = 48$ kHz, aux instants $t = nT_s$. Ces échantillons du signal sont représentés directement avec la modulation par impulsions d'amplitude MIA (PAM) avec des impulsions rectangulaires $p(t)$, avec retour à zéro RZ (*"return to zero"*), de durée $T = 0.35T_s$ et de hauteur 1. Le signal MIA, $s_{MIA}(t)$, peut donc être représenté par:

$$s_{MIA}(t) \quad = \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)p(t - nT_s)$$

a) Faites un graphique du signal MIA (PAM) de $0 \leq t \leq 10T_s$.

b) Si on utilise un filtre de reconstruction idéal, de gain $\frac{1}{0.35}$ et de largeur de bande $\frac{1}{2T_s}$, quelle sera la sortie de ce filtre?

c) Comparez la sortie de filtre obtenue en (b) avec le signal $m(t)$ afin de déterminer la distortion causée par l'échantillonneur-bloqueur (i.e. réponse impulsionnelle rectangulaire).

Problème 2: *(modulation MIA multiniveau (PAM) et filtre à cosinus surélevé)*

Une source d'information produit des bits à un taux de 56 kbits/s. Cette information doit être transmise en utilisant la modulation MIA (PAM) binaire avec un filtre à cosinus surélevé avec un facteur d'adoucissement (*"roll-off factor"*) $\alpha = 0.25$.

a) Quelle est la largeur de bande requise?

b) Que se passe-t-il si on change le facteur d'adoucissement à $\alpha = 0.75$?

c) Maintenant, si on utilisait une modulation MIA à 32 niveaux (*"32-level PAM"*), comment cela affecterait les largeurs de bande obtenues en (a) et (b)?

Problème 3: *(modulation MIA multiniveau (PAM) et filtre à cosinus surélevé)*

Une source d'information produit des bits avec un débit de 100 kbits/s. On veut transmettre cette information en utilisant la modulation MIA (PAM), et ce, dans un canal de transmission de 10 kHz seulement. Le facteur d'adoucissement (*"roll-off factor"*) doit être d'au moins de 0.1.

a) Combien de niveaux sont nécessaires pour transmettre cette information dans le canal (supposez que le nombre de niveaux est une puissance de 2)?

b) Quel est alors la valeur du facteur d'adoucissement du système?

Problème 4: *(bruit de quantification: disque audio numérique)*

Un disque audionumérique emploie la modulation par impulsions codées (MIC ou "PCM" en anglais) avec quantification uniforme sur 16 bits et une fréquence d'échantillonnage de 44.1 kHz pour numériser un signal audio $m(t)$. Soit un message $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

a) Quel est le rapport signal à bruit de quantification SQNR lorsque $A_m = m_{\max}$? Ici, $m_{\max}$ est l'amplitude maximale du signal à l'entrée du quantificateur.

b) Si l'on accepte qu'un rapport SQNR de 56 dB est plus ou moins acceptable, quelle est la plus petite valeur d'amplitude A_m que l'on peut admettre (ceci nous donne un aperçu de la plage dynamique obtenue avec la technologie audionumérique commerciale).

c) Déterminez le nombre de bits requis pour emmagasiner 70 minutes de musique stéréophonique (négligez les bits de codage et de cadrage).

Problème 5: *(modulation par impulsions codées (PCM))*

On veut représenter un signal analogique $m(t)$ à l'aide de la modulation par impulsions codées (PCM) en utilisant un code de ligne NRZ polaire. Le signal MIC doit être transmis dans un canal dont la largeur de bande est strictement limitée à 4kHz. Pour ce faire, on utilise un quantificateur uniforme à 16 niveaux de quantification et un filtre à cosinus surélevé avec $\alpha = 0.5$.

a) Déterminez le débit binaire R_b maximal du signal MIC sans introduire d'interférence intersymbole. Justifiez votre réponse.

b) Quelle est la largeur de bande W maximale du signal analogique original $m(t)$.

c) Répétez (a) et (b) pour un système MIC utilisant cette fois-ci un code de ligne NRZ multiniveau (*multilevel*) à 4 niveaux.

Problème 6: *(modulation Delta et suréchantillonnage)*

La sortie du quantificateur d'un modulateur Delta, $e_q(nT_s)$, à chaque instant d'échantillonnage peut être vue comme étant la représentation discrète du signal d'entrée $m(t)$. Pour un concepteur des circuits électroniques cette approche peut servir à la réalisation d'un convertisseur analogique-numérique.

Supposons que la sortie du quantificateur soit échantillonnée à N fois le taux de Nyquist, c'est-à-dire avec un suréchantillonnage par un facteur N. Nous observons que le bruit de quantification d'un tel système a une puissance moyenne de $\Delta^2/3$ mais que ce bruit est approximativement distribué uniformément sur la largeur de bande (qui elle est donnée par la moitié du taux d'échantillonnage à la sortie du quantificateur). Ceci permet de réduire la puissance du bruit de quantification en filtrant la sortie du quantificateur à l'aide d'un filtre passe-bas numérique opérant au taux de Nyquist. Le résultat est que l'on peut réduire le bruit de quantification en augmentant le taux d'échantillonnage (suréchantillonnage): la sortie du filtre numérique passe-bas, prise seulement à tous les $N^{\text{ièmes}}$ échantillons, représente le signal d'entrée $m(t)$ par une séquence d'échantillons au taux de Nyquist avec une plus grande résolution.

Supposez que l'on construise un tel système avec un quantificateur à 16 bits permettant de couvrir la plage d'amplitudes allant de -5 V à +5 V (c'est-à-dire un système de modulation Delta avec $\Delta = 10$ millivolts conduisant à la même puissance de bruit de quantification qu'un convertisseur à 16 bits) pour une largeur de bande du signal d'entrée allant jusqu'à 20 kHz. Déterminez la valeur minimale requise du facteur de suréchantillonnage N ainsi que la fréquence d'échantillonnage f_s correspondante.

Date: Mardi, le 2 avril 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #11 (à remettre le mardi 9 avril 2002 dans la boîte à devoirs avant 11h00.)

Problème 1: *(entropie d'une source d'information)*

Question 6.1 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Problème 2: *(entropie d'une source d'information quantifiée)*

Question 6.11 du manuel de cours.

Problème 3: *(borne supérieure de l'entropie)*

Question 6.7 du manuel de cours.

Conseil: Pour démontrer l'inégalité: $\ln x \leq x - 1$, tracez tout simplement les fonctions $\ln x$ et $x - 1$ pour $x > 0$ sur un même graphique.

Problème 4: *(codage de source de Huffman)*

Question 6.22 du manuel de cours.

Problème 5: *(représentation d'une image en noir et blanc)*

On désire emmagasiner sur un disque d'ordinateur une image en noir et blanc. L'image occupe une surface de 20 pouces par 30 pouces et est balayée à l'aide d'un "scanner" avec une résolution de 1200 points au pouce (1200 dpi). Les points noirs n'occupent que 2.5% de la surface totale de l'image.

a) Si on emmagasine tout simplement l'image en noir et blanc sur le disque d'ordinateur, combien de mémoire celle-ci occupera-t-elle?

b) Maintenant, si on modélise l'image en noir et blanc comme une source d'information stationnaire ayant une probabilité de 2.5% de générer un point noir, et que l'on utilise un code de source dont l'efficacité η est de 98% pour représenter la source d'information, quel sera l'espace mémoire requis pour emmagasiner cette image?

c) Supposons maintenant que l'image peut être décrite par la spécification de 5,000 segments de droite pour lesquels le début et la fin permettent une précision de 1200 points au pouce et que la largeur de la ligne elle-même peut être décrite par un octet. Quel est l'espace mémoire requis pour emmagasiner cette image avec cette représentation? Cette approche est-elle préférable à celle présentée en (b)?

Problème 6: *(code de source de Huffman ternaire)*

Question 6.26 du manuel de cours.

Date: Mardi, le 9 avril 2002
Enseignant: Dr Jean-Yves Chouinard
Bureau: Pavillon Colonel-By, pièce A-610

ELG-3570 Introduction aux systèmes de télécommunications

Devoir #12 (NE PAS REMETTRE!)

Problème 1: *(distance minimale d'un code)*

Question 9.22 du manuel de cours (*"Communication Systems Engineering"* (2ième édition) de John G. Proakis et Masoud Salehi, Prentice-Hall, 2002).

Réponse:
En examinant la distance de Hamming entre les $6 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!}$ paires possibles de mot-codes, on observe que la distance de Hamming minimale entre deux mot-codes est égale à

$$d_{\text{min}} = \min_{\substack{\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \\ i \neq j}} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = 2.$$

Aussi, étant donné qu'il s'agit d'un *code linéaire*, on peut considérer le *poids minimum* de Hamming des mot-codes non-nuls, i.e.

$$w_{\text{min}} = \min_{\mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}} w(\mathbf{c}_i) = w(\mathbf{c}_2) = w(10100) = 2.$$

Problème 2: *(distance mimimum de Hamming)*

Déterminez la distance de Hamming minimum entre deux mot-codes que doit avoir un code de telle sorte qu'il puisse corriger toutes les erreurs simples, doubles et triples et en même temps détecter n'importe quel ensemble de quatre ou cinq erreurs qui pourraient se produire dans un mot-code reçu.

Réponse:
Pour qu'un code bloc puisse corriger jusqu'à trois erreurs et détecter jusqu'à 5 erreurs simultanément il faut que les mot-codes aient au moins une distance de Hamming

$$d_{\text{min}} = \min_{\substack{\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \\ i \neq j}} d(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = 3 + 5 + 1 = 9.$$

Problème 3: *(borne supérieure du taux d'erreur)*

Un certain système de télécommunications binaire peut être modéliser par un canal symmétrique binaire avec un taux d'erreur de 0.001. Ce système est employé pour transmettre des données à l'aide d'un code linéaire de longueur 10. Déterminez la probabilité de recevoir un mot-code avec plus de 2 erreurs. Calculez alors une borne supérieure du taux d'erreur pour ce cas si le code bloc a un poids de Hamming minimal de 5.

Conseil: Si le mot-code est incorrectement décodé, le pire qui puisse se produire est que chaque bit du message décodé soit en erreur.

Réponse:
La probabilité, p_m, d'obtenir exactement m bits en erreur sur les 10 bits d'un mot-code reçu est:

$$p_m = \binom{10}{m}(0.001)^m(0.999)^{10-m}.$$

La probabilité d'avoir plus de 2 erreurs est donc: $1-(p_0+p_1+p_2) = 1.1937\times10^{-7}$. Si un code linéaire a une distance de Hamming minimum $d_{\text{min}} = 5$, alors ce dernier peut être utilisé comme un code correcteur d'erreur double. Une erreur de décodage se produira alors seulement lorsqu'il y aura plus de 2 erreurs dans un mot-code. Quand une telle erreur de décodage se produit, alors au pire tous les bits du message original seront en erreur (en réalité on peut supposer que le nombre de bits en erreur du message sera plus petit). Conséquemment, la fraction des bits en erreur après décodage sera bornée par la probabilité de recevoir plus de 2 bits en erreur dans un mot-code, i.e. 1.1937×10^{-7}.

Problème 4: *(décodage d'un code bloc)*

Un code binaire a la *matrice génératrice* suivante:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Construisez le tableau de codage de ce code et trouvez la distance de Hamming minimale entre les mot-codes. Combien d'erreurs ce code peut-il corriger? Combien d'erreurs peut-il détecter? Si on reçoit le mot-code 011110, quel serait le message transmis le plus *vraisemblable*?

Réponse:
Le tableau de codage du code est:

$$\begin{array}{lcl} 0\,0\,0 & \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 & \rightarrow & 0\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 0\,1\,0 & \rightarrow & 0\,1\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 & \rightarrow & 0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 & \rightarrow & 1\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 & \rightarrow & 1\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 & \rightarrow & 1\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1 & \rightarrow & 1\,1\,1\,0\,0\,0 \end{array}$$

Le poids minimal de Hamming de ce codes est égal à $w_{\text{min}} = 3$: sa distance minimale de Hamming est donc $d_{\text{min}} = 3$. Ce code peut donc détecter 2 erreurs ou corriger les erreurs simples. Le mot-code 011110 n'est pas un mot-code valide: il contient donc des erreurs. Le mot-code (valide) le plus près est 001110 alors que tous les autres sont plus *distants*: il est donc *plus probable* que le mot-code transmis soit 001110 et que le message soit 001.

Problème 5: *(décodage par syndrome)*

Un code linéaire binaire (6,2) a la *matrice génératrice* suivante:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Construisez le tableau de codage de ce code et trouvez la distance de Hamming minimale entre les mot-codes.

b) Construisez un tableau de décodage par *syndrome*. *Conseil:* Ce code peut corriger toutes les erreurs simples, 7 erreurs doubles et 3 erreurs triples. Vous avez le choix entre les *patrons d'erreurs* doubles et triples que vous désirez corriger.

c) À l'aide de ce tableau de décodage par syndrome, décodez le mot-code reçu 111111. Ce décodage est-il valide selon vous?

Réponse:

a) Le tableau de codage du code est:

$$\begin{array}{ll} 0\,0 \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1 \rightarrow & 0\,1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0 \rightarrow & 1\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,1 \rightarrow & 1\,1\,0\,1\,0\,1 \end{array}$$

Le poids minimal de Hamming de ce codes est $w_{\text{min}} = 4$ et sa distance minimale de Hamming est $d_{\text{min}} = 4$. Ce code peut donc corriger les erreurs simples et détecter les erreurs doubles, ou détecter toutes les erreurs simples, doubles et triples ainsi que quelques patrons d'erreurs plus élevés.

b) Les mot-codes étant de la forme: $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (d_1, d_2, p_1, p_2, p_3, p_4)$, la matrice génératrice indique que: $d_1 \oplus d_2 \oplus p_1 = 0$, $d_1 \oplus p_2 = 0$, $d_1 \oplus d_2 \oplus p_3 = 0$ et $d_2 \oplus p_4 = 0$. La *matrice de parité* H correspondante est donc:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les syndromes correspondants aux patrons d'erreurs sont:

$$\begin{array}{ll} 0\,0\,0\,0 \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,1 \rightarrow & 0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \rightarrow & 0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \rightarrow & 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \rightarrow & 1\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,1 \rightarrow & 0\,0\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,0 \rightarrow & 0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \rightarrow & 0\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0 \rightarrow & 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \rightarrow & 0\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \rightarrow & 1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1 \rightarrow & 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \rightarrow & 1\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \rightarrow & 1\,0\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

Remarquez que le patron d'erreur de plusieurs syndromes n'est pas la seule possibilité (e.g. le syndrome 0101 aurait tout aussi bien pu être assigné aux partrons d'erreur double 000101 ou 110000). Tous les patrons d'erreurs simples, 7 erreurs doubles et 3 erreurs triples se trouvent dans ce tableau de syndrome.

c) Le syndrome obtenu pour le mot-code reçu 111111 est 1010, correspondant au patron d'erreur 1001000, dans le tableau de syndromes. En additionnant ce patron d'erreur 100100 au mot-code reçu 111111 on obtient le mot-code: 011011 correspondant au message 01. Cependant, si on examine le tableau du code, on observe que 111111 est *équidistant* (au sens de distance de Hamming) de 3 mot-codes non-nuls. En fait, la correction d'erreur est dans ce cas correcte que le tiers du temps!

Problème 6: *(canal binaire avec effacement)*

Le canal binaire avec effacement a une entrée X avec deux symboles, "0" et "1", et une sortie Y avec trois symboles: "0", "1" et un troisième symbole "□" qui représente un effacement ou un "blanc". Lorsque le symbole "0" est transmis par l'entrée, il conduit à la sortie du canal au symbole "0" avec une probabilité p_1 et au symbole d'effacement "□" avec une probabilité $1 - p_1$. Le symbole "1" à l'entrée a une probabilité p_2 de donner le symbole "1" et $1 - p_2$ de donner "□".

a) Calculez l'information mutuelle (moyenne) $I(X;Y)$ entre l'entrée et la sortie si les symboles d'entrée sont équiprobables, i.e. $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$

b) Déterminez la capacité C du canal pour le cas où les probabilités de transition $p_1 = p_2 = 1 - \rho$, et où ρ représente la probabilité du symbole d'effacement "□".

Réponse:

a) $I(X;Y) = \dfrac{1}{2}\left\{p_1 + (1-p_1)\log_b \dfrac{2(1-p_1)}{2-p_1-p_2} + p_2 + (1-p_2)\log_b \dfrac{2(1-p_2)}{2-p_1-p_2}\right\}.$

b) La relation entre l'entropie $H(X)$ de la source X, l'équivocation $H(X|Y)$ de la source X étant donnée l'observation de la sortie Y et l'information mutuelle $I(X;Y)$ entre la source et la sortie est donnée par: $I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$.

Si on observe à la sortie les symboles "0" ou "1" on sait que le symbole à l'entrée est le même et donc que l'équivocation $H(X|Y=0) = H(X|Y=1) = 0$. Si le symbole à la sortie est le symbole d'effacement "□" alors il est déterminé par la distribution *a priori* des deux symboles à l'entrée et $H(X|Y=\square) = \rho H(X)$, c'est-à-dire la probabilité d'avoir à la sortie le symbole "□" fois l'entropie de la source $H(X)$ dans ce cas. Donc l'information mutuelle $I(X;Y) = H(X) - \rho H(X) = (1-\rho)H(X)$.

La capacité C est le maximum de l'information mutuelle $I(X;Y)$ qui est obtenu en maximisant l'entropie $H(X)$: ceci se produit lorsque les symboles "0" et "1" à l'entrée sont équiprobables. L'entropie $H(X)$ est alors de 1 Sh par symbole et la capacité $C = (1-\rho)$ Sh par symbole.

Problème 7: *(capacité d'un canal bruité)*

On peut démontrer que le monde qui nous entoure agit comme une source de bruit de densité spectrale de puissance moyenne égale à $\frac{1}{2}kT$, où k est la constante de Boltzmann ($k \approx 1.38 \times 10^{-23}$ joule par degré Kelvin) et T la température de la source de bruit (toujours en degrés Kelvin).

a) Si un certain système de télécommunications a une largeur de bande de $B = 10$ kHz et l'on considère une source de bruit à *température ambiante* (c'est-à-dire $T = 300°$ K), quel est le débit (ou taux) binaire maximal pour lequel on peut transmettre avec *fiabilité* dans ce canal avec un signal de puissance $P_{\text{sortie}} = 1$ Watt?

b) Maintenant si on double la largeur de bande du signal, le débit binaire maximal doublera-t-il?

c) Si on n'avait pas de restriction quant à la largeur de bande du signal, quel serait alors le débit binaire de transmission maximal?

Réponse:

a) Le débit de transmission binaire maximal est donné par la capacité C du canal de transmission:

$$\begin{aligned} C &= B \log_2\left(1 + \frac{P_{\text{sortie}}}{\mathcal{N}_0}\right) \\ C &= B \log_2\left(1 + \frac{1}{300kB}\right) \\ C &= 5.44 \times 10^5 \text{bits/s.} \end{aligned}$$

b) Si on double la largeur de bande, i.e., $B = 20$ kHz, le débit maximal passe à 10.68×10^5 bits/s ce qui n'est pas tout à fait le double.

c) Si la largeur de bande était illimitée alors le débit binaire de transmission maximal serait de $\frac{1}{(kT \ln 2)}$ bits/s c'est-à-dire $C = 3.48 \times 10^{20}$ bits/s! C'est très élevé comma capacité mais ce n'est pas infini!