Densité spectrale de puissance

Nous nous sommes intéressé jusqu'ici à une représentation temporelle des processus aléatoires. Le comportement de ceux-ci peut tout aussi bien être étudié dans le domaine fréquentiel. Pour ce faire, nous allons considérer des processus aléatoires invariant dans le temps ou stationnaires au sens large.

Soit $X(t)$ un processus aléatoire stationnaire au sens large. On définit sa densité spectrale de puissance $P_X(f)$ comme étant la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$\boxed{P_X(f) \triangleq F\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}$$

Réciproquement, la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ du processus stationnaire $X(t)$ s'obtient de la transformée de Fourier inverse de sa densité spectrale de puissance $P_X(f)$ (théorème de Wiener-Khintchine):

$$\boxed{R_X(\tau) = F^{-1}\left[P_X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{j2\pi f\tau} df}$$

Densité spectrale de puissance

Propriétés de la densité spectrale de puissance

- La valeur de la densité spectrale de puissance à $f = 0$ (i.e. en courant continu) est à l'aire sous la courbe de la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$:

$$\boxed{P_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \bigg|_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau}$$

- La valeur moyenne au carré du processus aléatoire est égale à l'aire sous la courbe de la densité spectrale de puissance $P_X(f)$:

$$\boxed{E\left[X^2(t)\right] = R_X(\tau)\big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) e^{j2\pi f \tau} df \bigg|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f) df}$$

- La densité spectrale de puissance $P_X(f)$ est non négative :

$$\boxed{P_X(f) \geq 0, \qquad \text{pour toutes les valeurs de } f}$$

- La densité spectrale de puissance $P_X(f)$ d'un processus aléatoire réel $X(t)$ est une fonction paire de la fréquence :

$$\boxed{P_X(-f) = P_X(f)}$$

Densité spectrale de puissance

Exemple 1: Densité spectrale de puissance d’une sinusoïde avec phase aléatoire

Le processus aléatoire $X(t)$:

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_c t + \Theta\right)$$

où Θ uniformément distribué entre 0 et 2π et A constante est un processus stationnaire au sens large. Sa moyenne statistique et sa fonction d’autocorrélation sont invariantes dans le temps:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_X(t) &= \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(2\pi f_c t + \theta\right)d\theta = 0 = \mu_X \\ R_X(t_1,t_2) &= \frac{A^2}{2}\cos\left[2\pi f_c\left(t_1 - t_2\right)\right] = \frac{A^2}{2}\cos\left(2\pi f_c \tau\right) = R_X(\tau) \end{aligned}}$$

Nous avons vu aussi que le processus $X(t)$ est ergodique.

Densité spectrale de puissance

Exemple 1: Densité spectrale de puissance d’une sinusoïde avec phase aléatoire

La densité spectrale de puissance $P_X(f)$ du processus aléatoire $X(t)$ peut se calculer comme suit :

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$P_X(f) = \frac{A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$P_X(f) = \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \right] \right\}$$

$$\boxed{P_X(f) = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \right]}$$

Densité spectrale de puissance

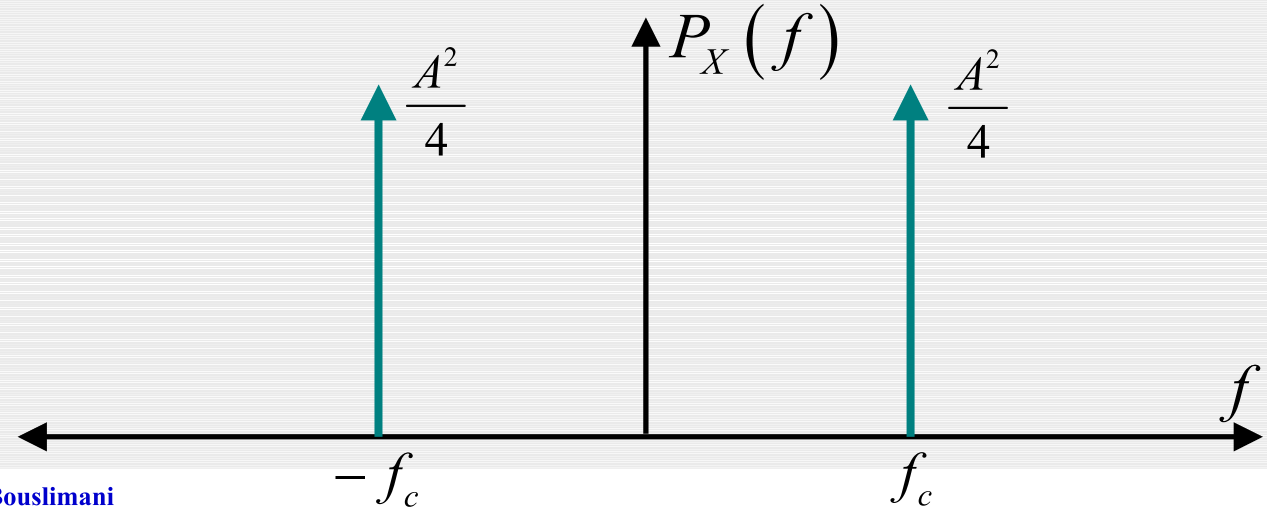
Exemple 1: Densité spectrale de puissance d’une sinusoïde avec phase aléatoire

La puissance P (normalisée à une impédance de 1 ohm) s’obtient de la densité spectrale de puissance $P_X(f)$:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]df$$

$$P = \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(f-f_c)\right]df + \frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(f+f_c)\right]df$$

$$\boxed{P = \frac{A^2}{2}}$$



Densité spectrale de puissance

Exemple 2: Densité spectrale de puissance avec la fonction d'autocorrélation

Le processus aléatoire $X(t)$ a comme fonction d'autocorrélation:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = 4e^{-\tau^2} + 3$$

On désire déterminer sa densité spectrale de puissance:

$$P_X(f) = F\left[R_X(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

$$P_X(f) = F\left[4e^{-\tau^2} + 3\right] = 4F\left[e^{-\tau^2}\right] + F[3]$$

$$P_X(f) = 4\left[\sqrt{\pi} e^{-\pi\left(f\sqrt{\pi}\right)^2}\right] + 3\left[\delta(f)\right] \quad \left(\text{note: } F\left[e^{-\pi\left(t/t_0\right)^2}\right] \Leftrightarrow t_0 e^{-\pi\left(f t_0\right)^2}\right)$$

$$\boxed{P_X(f) = 4\sqrt{\pi} e^{-(\pi f)^2} + 3\delta(f)}$$

Densité spectrale de puissance

Exemple 2: Densité spectrale de puissance avec la fonction d'autocorrélation

$$\boxed{R_X(\tau) = 4e^{-\tau^2} + 3}$$

$$\boxed{P_X(f) = 4\sqrt{\pi}e^{-(\pi f)^2} + 3\delta(f)}$$