Processus aléatoires

- Définition d’un processus aléatoire
- Processus aléatoires stationnaires
- Moyenne, fonction d’autocorrélation et fonction d’autocovariance d’un processus aléatoire
- Fonction d’intercorrélation de processus aléatoires
- Processus aléatoires ergodiques
- Processus aléatoires complexes

Définition d'un processus aléatoire

En télécommunications, on rencontre des signaux, tels que le bruit ou de la voix par exemple, qui sont des fonctions du temps mais qui sont aussi imprévisibles. Ces fonctions aléatoires du temps peuvent être représentées par des processus aléatoires.

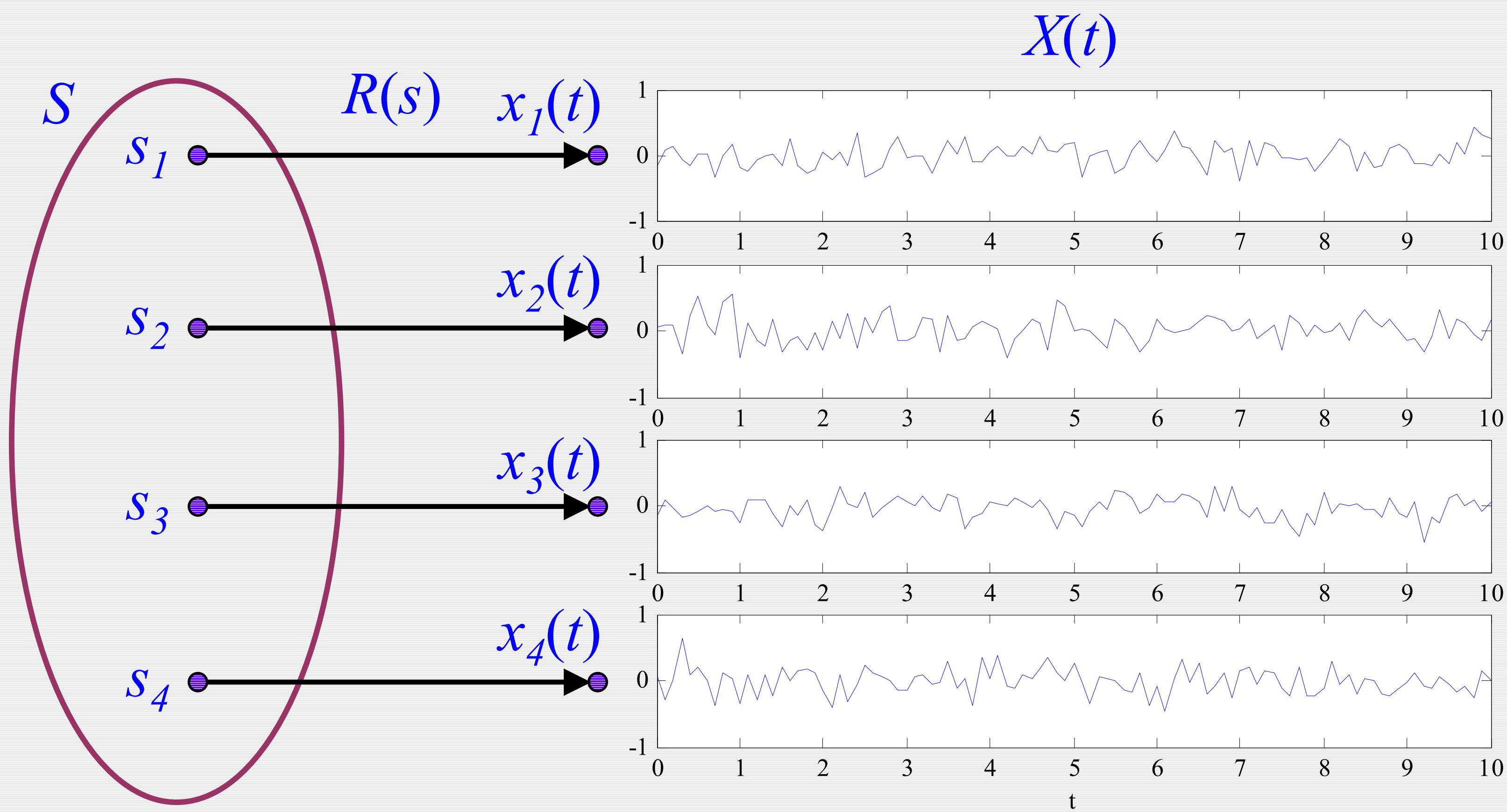
On définit un processus aléatoire, ou encore processus stochastique, $X(t)$, comme un ensemble de fonctions temporelles auxquelles on associe des probabilités de se réaliser.

Ainsi, pour un point de l'espace d'échantillonnage s_i dans S, on obtient une fonction temporelle $x_i(t)$:

$$\boxed{x_i(t) = X_i(t, s_i), \text{ avec } s_i \in S}$$

Définition d'un processus aléatoire

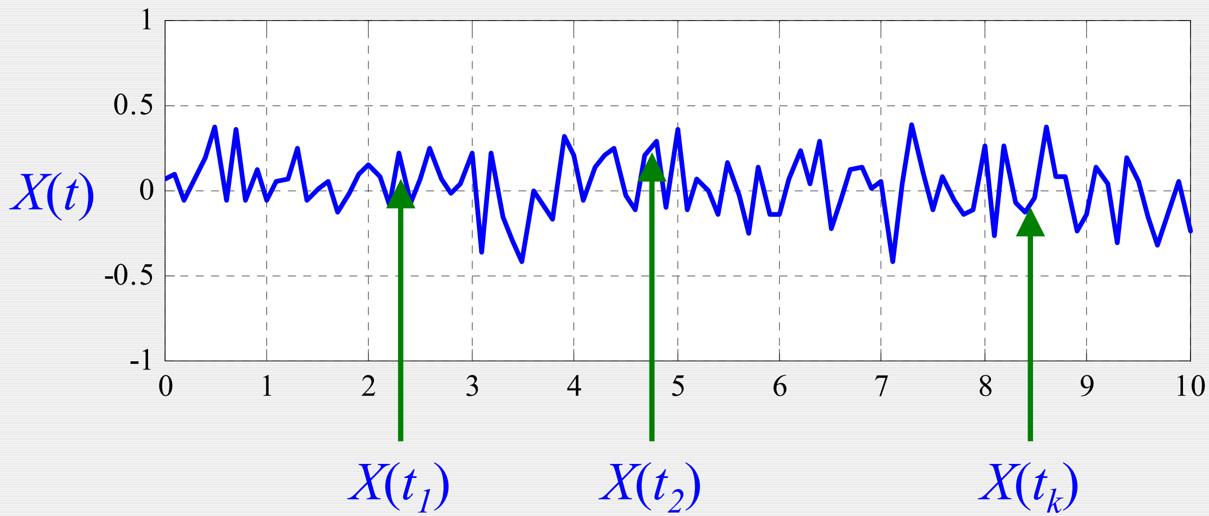
Concept de processus aléatoire



Processus aléatoires stationnaires

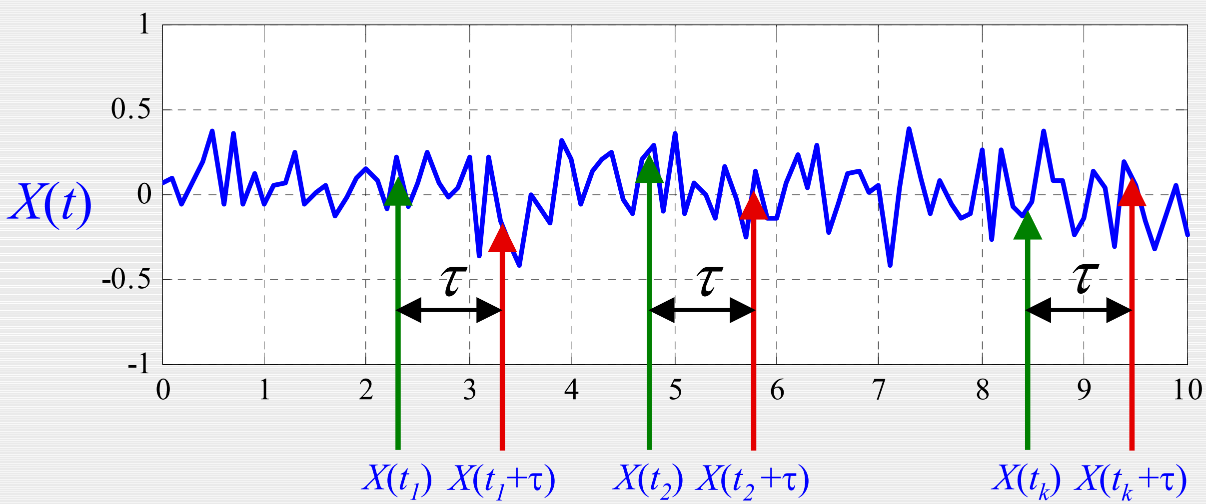
Plusieurs processus aléatoires ont la caractéristique statistique d'être invariant dans le temps, c'est-à-dire que le fait de les observer à différents instants ne change pas leurs propriétés statistiques.

Considérons, par exemple, un processus stochastique $X(t)$ à k instants bien définis dans le temps: $X(t_1)$, $X(t_2)$, …, $X(t_k)$. On obtient ainsi, un ensemble de k variables aléatoires.



Processus aléatoires stationnaires

La distribution conjointe de ces k variables aléatoires peut être décrite par leur fonction de répartition conjointe. Supposons que nous faisions la même série de k observations de ce processus aléatoires $X(t)$ mais avec un délai arbitraire de τ secondes. On obtient ainsi une nouvelle série de k variables aléatoires: $X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \ldots, X(t_k + \tau)$:



Processus aléatoires stationnaires

Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens strict si, pour toutes les valeurs de temps d'observation $t_1, \ldots, t_k$, quelque soit k, et tous les décalages τ :

$$\boxed{F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_k+\tau)}\left(x_1,\ldots,x_k\right) = F_{X(t_1),\ldots,X(t_k)}\left(x_1,\ldots,x_k\right)}$$

Autrement dit, un processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire au sens strict si la distribution conjointe de n'importe quelle combinaison de variables aléatoires, obtenues par l'observation de $X(t)$ à différents instants, est invariant dans le temps.

Processus aléatoires conjointement stationnaires

De manière similaire, on dira de deux processus aléatoires, $X(t)$ et $Y(t)$, qu'ils sont conjointement stationnaires au sens strict si la distribution conjointe de toute combinaison de variables aléatoires, $X(t_1)$, …, $X(t_k)$, $Y(t_{k+1})$, …, $Y(t_l)$, est invariante dans le temps.

$$\boxed{\begin{aligned} &F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_k+\tau),Y(t_{k+1}+\tau),\ldots,Y(t_{k+j}+\tau)}\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_j\right) = \\ &\qquad F_{X(t_1),\ldots,X(t_k),Y(t_{k+1}),\ldots,Y(t_{k+j})}\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_j\right) \end{aligned}}$$

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

La moyenne d'un processus aléatoire $X(t)$ est définie comme étant la moyenne de la variable aléatoire X au temps t:

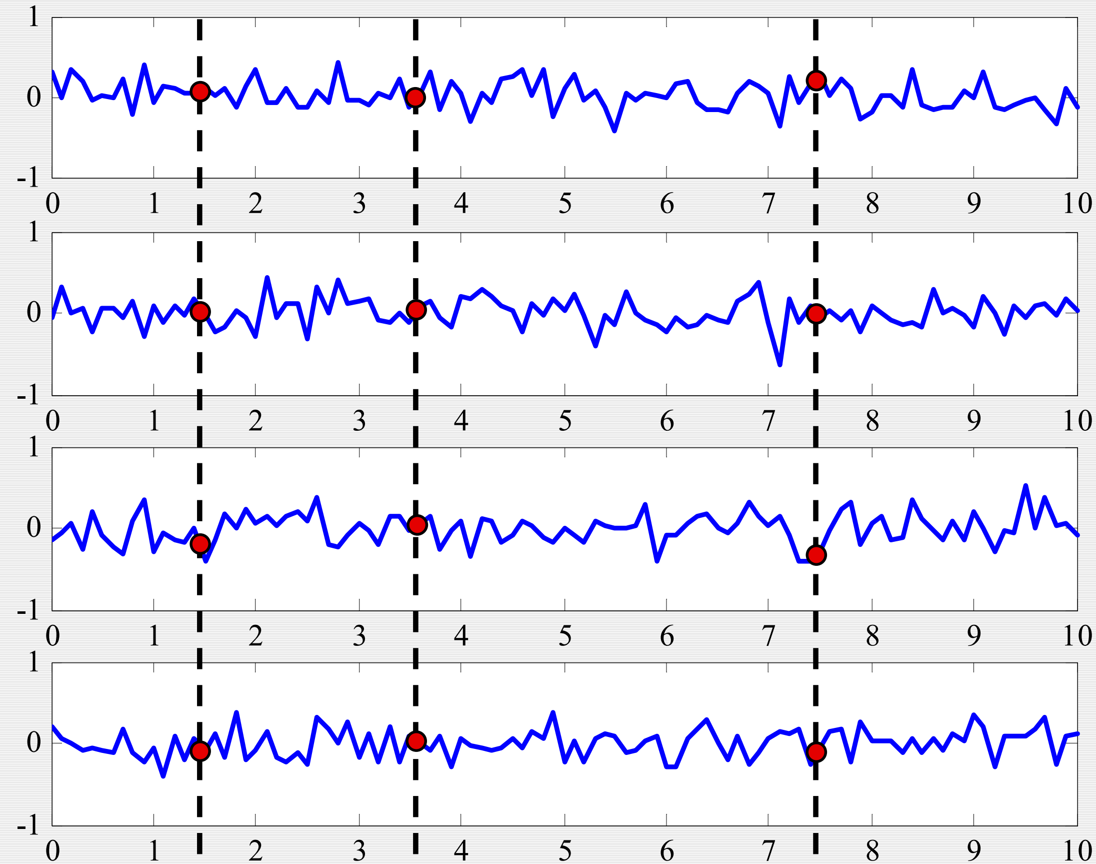
$$\boxed{\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\, dx}$$

La moyenne du processus $X(t)$, dépend en général du temps.

Si le processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire, alors sa fonction de densité de probabilité, $f_{X(t)}(x)$, ne dépend plus du temps d'observation t et sa moyenne $\mu_{X(t)} = \mu_X$, c'est-à-dire une constante.

Moyenne, fonction d’autocorrélation et fonction d’autocovariance d’un processus aléatoire

$$\mu_X(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_1)}(x)\,dx$$



$\mu_X(t_1)$ $\mu_X(t_2)$ $\mu_X(t_k)$

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

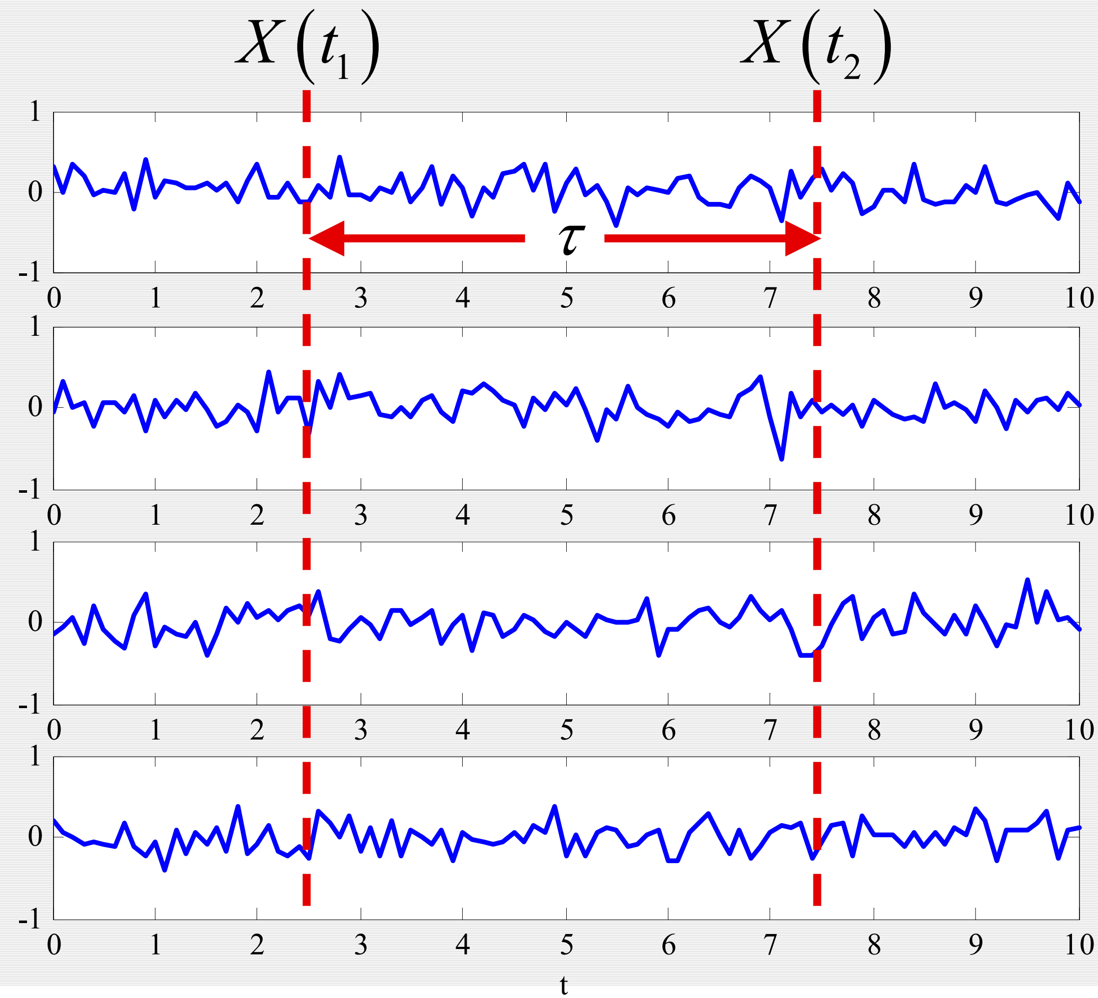
La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire $X(t)$ est l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ obtenues aux instants t_1 et t_2.

$$\boxed{R_X\left(t_1,t_2\right)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_{X(t_1),X(t_2)}\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2}$$

Si le processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire, alors la fonction de densité de probabilité conjointe ne dépend que de la différence de temps $\tau = t_2 - t_1$ entre les deux instants d'observation du processus aléatoire:

$$\boxed{R_X\left(t_1,t_2\right)=R_X\left(t_2-t_1\right)=R_X\left(\tau\right)}$$

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire



Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

On peut également s'intéresser aux moments conjoints centrés et définir la fonction d'autocovariance du processus aléatoire $X(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} C_X(t_1,t_2) &= E\left\{\left[X(t_1)-\mu_X(t_1)\right]\left[X(t_2)-\mu_X(t_2)\right]\right\} \\ C_X(t_1,t_2) &= R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \end{aligned}}$$

Si le processus $X(t)$ est stationnaire, alors la moyenne est constante et la fonction d'autocorrélation ne dépend pas des instants absolus t_1 et t_2 mais de leur différence, τ, seulement. La fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire stationnaire se résume alors à:

$$\boxed{C_X(t_1,t_2) = R_X(\tau)-\mu_X^2}$$

Moyenne, fonction d’autocorrélation et fonction d’autocovariance d’un processus aléatoire

Il arrive souvent que l'on ne puisse déterminer si un processus $X(t)$ est stationnaire au sens strict.

Cependant, si la moyenne $\mu_{X(t)}$ du processus aléatoire est indépendante du temps et que sa fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ ne dépende que de $\tau = t_2 - t_1$:

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \mu_X, \qquad \forall t$$

$$R_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2 = R_X(\tau), \qquad \forall \tau$$

alors le processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire au sens large (``WSS: Wide Sense Stationary").

Cependant la moyenne $\mu_{X(t)}$ et la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ ne décrivent que partiellement le processus aléatoire $X(t)$: une moyenne nulle et une autocorrélation qui ne dépend que de τ ne permettent pas de conclure qu'il s'agisse d'un processus aléatoire stationnaire au sens strict.

Moyenne, fonction d’autocorrélation et fonction d’autocovariance d’un processus aléatoire

Exemple 1: sinusoïde avec phases aléatoires

Soit $X(t)$ un processus aléatoire décrit par:

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

où A est une constante et Θ une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0,2\pi)$.

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \le \theta < 2\pi \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Le processus aléatoire $X(t)$ est-il stationnaire au sens large? La moyenne de $X(t)$ est donnée par:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx$$

$$\mu_X(t) = E[A\cos(2\pi f_c t + \Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_c t + \theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta$$

$$\mu_X(t) = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c t + \theta)\,d\theta = 0$$

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

Exemple 1: sinusoïde avec phases aléatoires

La fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$ est donnée par:

$$R_X(t_1,t_2) = E\Big[\big[A\cos(2\pi f_c t_1 + \Theta)\big]\big[A\cos(2\pi f_c t_2 + \Theta)\big]\Big]$$

$$R_X(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \big[A\cos(2\pi f_c t_1 + \theta)\big]\big[A\cos(2\pi f_c t_2 + \theta)\big] f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c t_1 + \theta)\cos(2\pi f_c t_2 + \theta)\, d\theta$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos\big[2\pi f_c (t_1 - t_2)\big] + \cos\big[2\pi f_c (t_1 + t_2) + 2\theta\big]\, d\theta$$

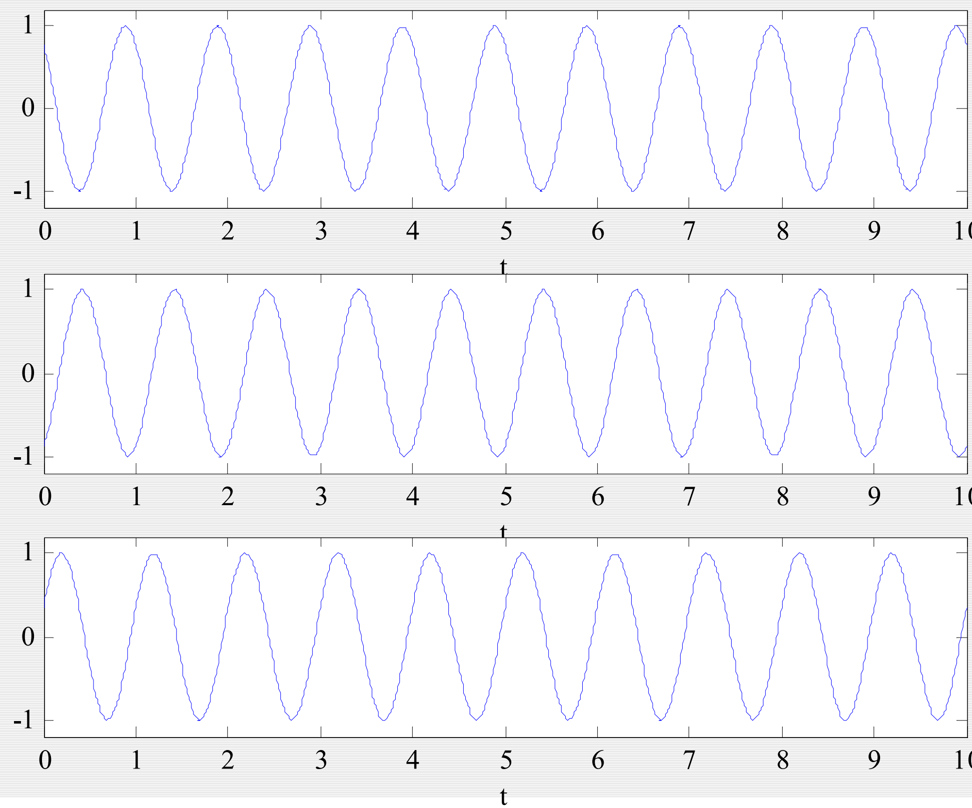
$$R_X(t_1,t_2) = \frac{A^2}{4\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\big[2\pi f_c (t_1 - t_2)\big]\, d\theta}_{=\cos\left[2\pi f_c (t_1 - t_2)\right](2\pi - 0)} + \frac{A^2}{4\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\big[2\pi f_c (t_1 + t_2) + 2\theta\big]\, d\theta}_{=0}$$

$$\boxed{R_X(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\big[2\pi f_c (t_1 - t_2)\big] = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau) = R_X(\tau)}$$

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

Exemple 1: sinusoïde avec phases aléatoires

Donc $\mu_X(t) = \mu_X = 0$ est une constante et $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ est fonction du retard τ. $X(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au sens large.



Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

Exemple 2: sinusoïde avec amplitudes aléatoires

Supposons que $X(t)$ soit un autre processus aléatoire mais pour lequel l'amplitude est aléatoire:

$$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

La phase θ est constante mais l'amplitude A est aléatoire.

Le processus aléatoire $X(t)$ est-il encore stationnaire au sens large? La moyenne de $X(t)$ est:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A\cos(2\pi f_c t + \theta)]$$

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a\cos(2\pi f_c t + \theta) f_A(a)\, da$$

$$\mu_X(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta)\int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a)\, da$$

$$\mu_X(t) = E[A]\cos(2\pi f_c t + \theta) = \mu_A \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

Moyenne, fonction d’autocorrélation et fonction d’autocovariance d’un processus aléatoire

Exemple 2: sinusoïde avec amplitudes aléatoires

La moyenne $\mu_X(t)$ est donc fonction du temps. Quant à la fonction d'autocorrélation $R_X(t_1, t_2)$, celle-ci est donnée par:

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

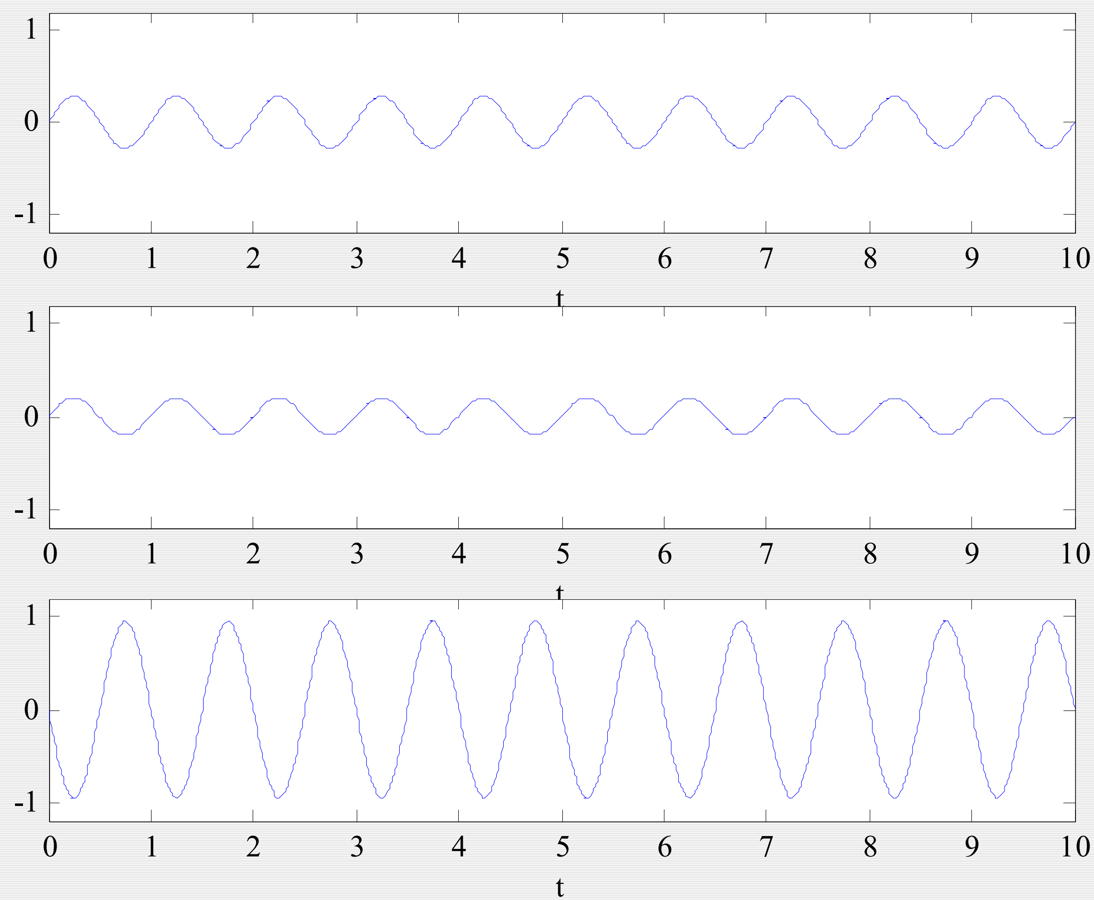
$$R_X\left(t_1,t_2\right)=E\left\{\left[A\cos\left(2\pi f_c t_1+\theta\right)\right]\left[A\cos\left(2\pi f_c t_2+\theta\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{R_X\left(t_1,t_2\right)=E\left[A^2\right]\cos\left(2\pi f_c t_1+\theta\right)\cos\left(2\pi f_c t_2+\theta\right)}$$

Le processus aléatoire $X(t)$ n’est donc pas stationnaire au sens large.

Moyenne, fonction d'autocorrélation et fonction d'autocovariance d'un processus aléatoire

Exemple 2: sinusoïde avec amplitudes aléatoires

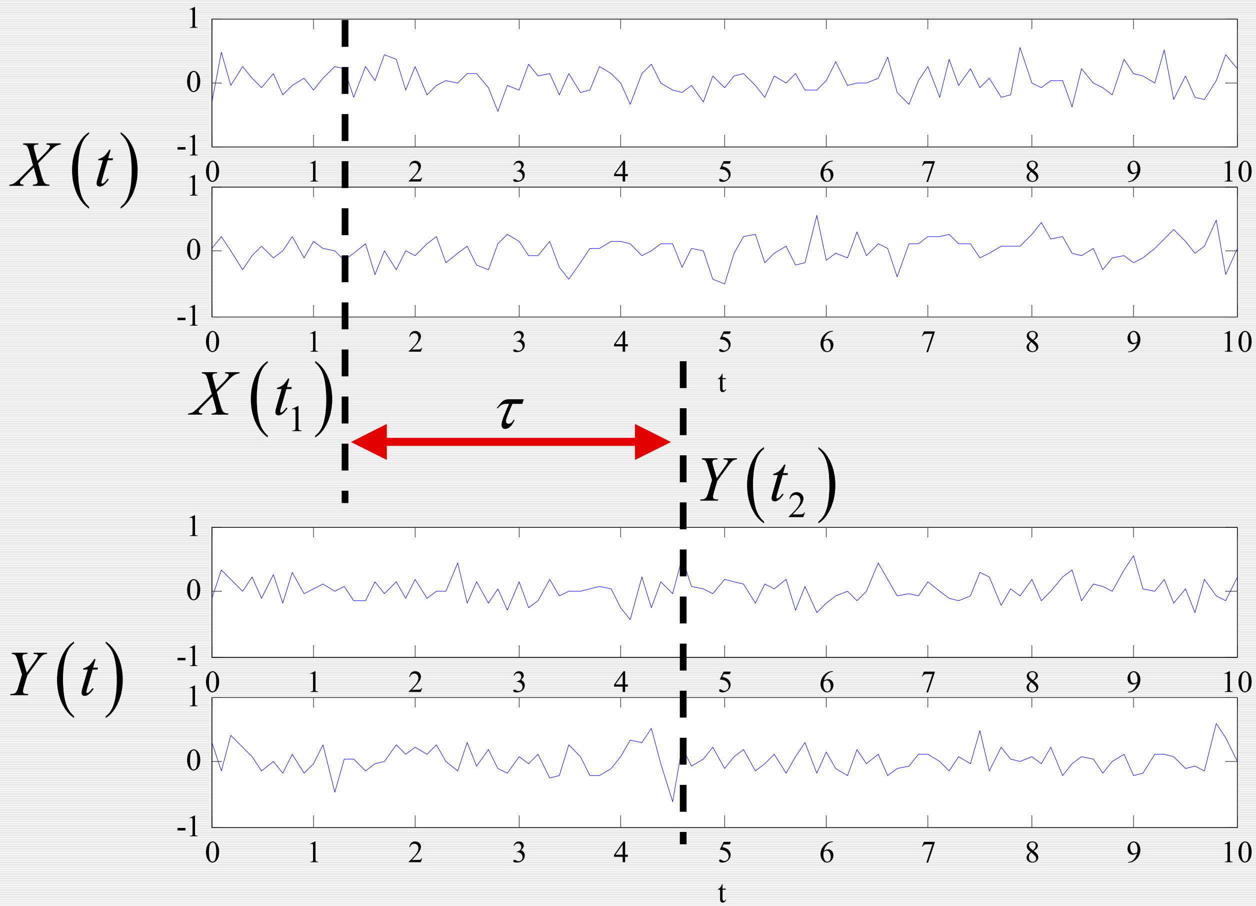


Fonction d'intercorrélation de processus aléatoires

Soient $X(t)$ et $Y(t)$ deux processus aléatoires.
On définit la fonction d'intercorrélation (ou fonction de corrélation) de $X(t)$ au temps t_1 et $Y(t)$ au temps t_2 de la façon suivante:

$$\boxed{R_{X,Y}\left(t_1,t_2\right)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf_{X(t_1),Y(t_2)}\left(x,y\right)dxdy}$$

Fonction d'intercorrélation de processus aléatoires



Fonction d'intercorrélation de processus aléatoires

La matrice de corrélation des processus aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ est:

$$\mathbf{R}(t_1,t_2)=\begin{bmatrix} R_X(t_1,t_2) & R_{X,Y}(t_1,t_2) \\ R_{Y,X}(t_1,t_2) & R_Y(t_1,t_2) \end{bmatrix}$$

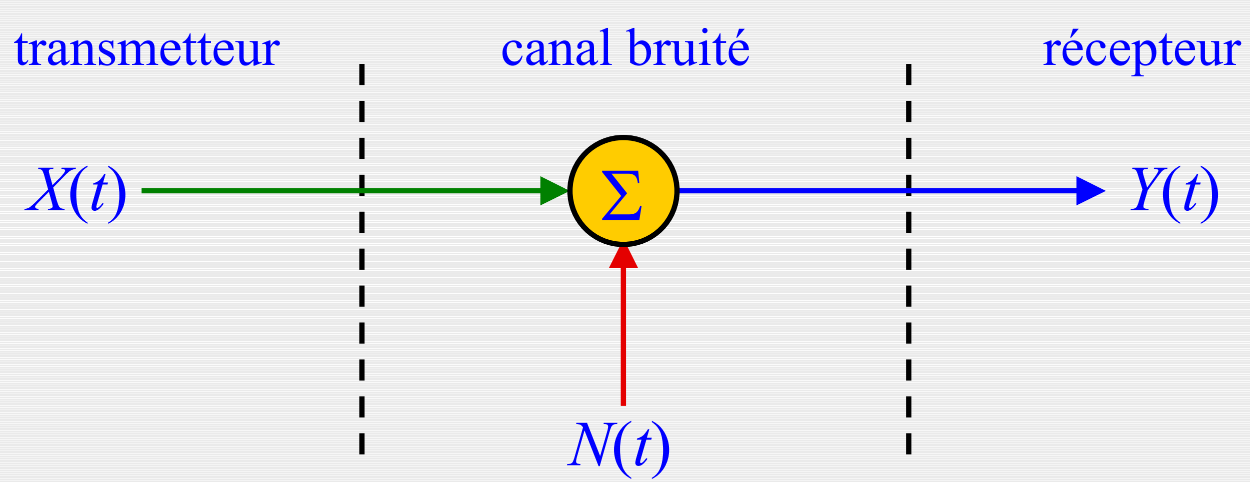
Si les processus $X(t)$ et $Y(t)$ sont conjointement stationnaires alors les fonctions d'autocorrélation, $RX(t_1,t_2)$ et $R_Y(t_1,t_2)$, ainsi que les fonctions d'intercorrélation, $R_{X,Y}(t_1,t_2)$ et $R_{Y,X}(t_1,t_2)$, ne dépendent que du décalage temporel $\tau = t_2 - t_1$ et la matrice de corrélation $\mathbf{R}(t_1,t_2)$ s'écrit tout simplement:

$$\mathbf{R}(\tau)=\begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{X,Y}(\tau) \\ R_{Y,X}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix}$$

Fonction d’intercorrélation de processus aléatoires

Exemple: fonction d’intercorrélation d’un signal avec bruit

Supposons que $Y(t)$ est la sortie d'un canal bruité, caractérisé par un processus aléatoire $N(t)$, et que $X(t)$ représente le signal transmis:



Quelle est la fonction d'intercorrélation, $R_{X,Y}(t_1,t_2)$ entre le signal $X(t)$ à l’entrée du canal et le signal $Y(t)$ à sa sortie?

Fonction d’intercorrélation de processus aléatoires

Exemple: fonction d’intercorrélation d’un signal avec bruit

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = E\left[X(t_1)\left[X(t_2)+N(t_2)\right]\right]$$

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)+X(t_1)N(t_2)\right]$$

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right]+E\left[X(t_1)N(t_2)\right]$$

$$R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2)+\underbrace{E\left[X(t_1)\right]E\left[N(t_2)\right]}_{X(t)\text{ et }N(t)\text{ indépendants}}$$

$$\boxed{R_{X,Y}(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2)+\mu_X(t_1)\mu_N(t_2)}$$

La fonction d'intercorrélation $R_{X,Y}(t_1,t_2)$ est donc la somme de la fonction d'autocorrélation de l'entrée $X(t)$ aux instants t_1 et t_2, i.e. $R_X(t_1,t_2)$, et du produit $\mu_X(t_1)\ \mu_N(t_2)$ des moyennes des processus aléatoires $X(t)$, le signal à l'entrée du canal, et $N(t)$, le bruit présent dans le canal.

Processus aléatoires ergodiques

L'espérance mathématique d'un processus aléatoire $X(t)$ est l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X(t_k)$ à un instant bien précis t_k. Il s'agit d'une moyenne prise sur l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire au temps $t = t_k$.

Est-il possible d'estimer cette moyenne d'ensemble de la variable aléatoire $X(t_k)$ par une moyenne temporelle d'une fonction d'échantillonnage, $x_i(t) = X(t, s_i)$, sur un intervalle de temps suffisamment long?

La moyenne temporelle, $\mu_x(T)$, de la fonction $X(t, s_i)$ dans l'intervalle $[-T, T]$ est définie par:

$$\boxed{\langle X(t) \rangle = \mu_x(T) \triangleq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t, s_i)\, dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i\, dt}$$

Processus aléatoires ergodiques

L'intégrale est maintenant effectuée sur un intervalle de temps. La moyenne temporelle, $\mu_x(T)$, dépend de la fonction d'échantillonnage $X(t, s_i)$ choisie du processus aléatoire $X(t)$ et de la durée l'intervalle $[-T, T]$. On peut donc considérer cette moyenne temporelle $\mu_x(T)$ comme une variable aléatoire! Son espérance mathématique, $E[\mu_x(T)]$, est alors donnée par:

$$E\left[\mu_x(T)\right] = E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\,dt\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X(t)\right]dt$$

Maintenant, si le processus aléatoire $X(t)$ est stationnaire au sens large alors sa moyenne est constante, i.e. $\mu_X(t) = \mu_X$, et l'espérance de la moyenne temporelle $E[\mu_x(T)]$ peut alors s'écrire:

$$E\left[\mu_x(T)\right] = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X(t)\right]dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[\mu_X\right]dt = \mu_X$$

Processus aléatoires ergodiques

L'ergodicité d'un processus aléatoire $X(t)$ n'est possible que si le processus est invariant dans le temps, c'est-à-dire que si il est au préalable stationnaire. Tout comme pour la stationnarité, on peut définir l'ergodicité pour différents moments du processus aléatoire.

Un processus aléatoire $X(t)$ est dit de moyenne ergodique si sa moyenne temporelle, $\mu_x(T)$, tend vers sa moyenne statistique, μ_X, lorsque l'intervalle d'observation tend vers l'infini:

$$\boxed{\lim_{T \to \infty} \mu_x(T) = \mu_X}$$

et que sa variance var $[\mu_x(T)]$ tend vers zéro:

$$\boxed{\lim_{T \to \infty} \operatorname{var}\left[\mu_x(T)\right] = 0}$$

i.e. convergence de $\mu_x(T)$ vers μ_X lorsque T tends vers l'infini.

Processus aléatoires ergodiques

On est aussi souvent intéressé à estimer la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ d'un processus aléatoire stationnaire par une fonction d'autocorrélation temporelle, $R_x(\tau, T)$, définie dans l'intervalle [-T, T] :

$$\boxed{R_x(\tau,T) \triangleq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t+\tau,s_i)\,X(t,s_i)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_i(t+\tau)x_i(t)dt}$$

Un processus aléatoire $X(t)$ est d'autocorrélation ergodique si sa fonction d'autocorrélation temporelle, $R_x(\tau, T)$, tend vers la fonction $R_X(\tau)$:

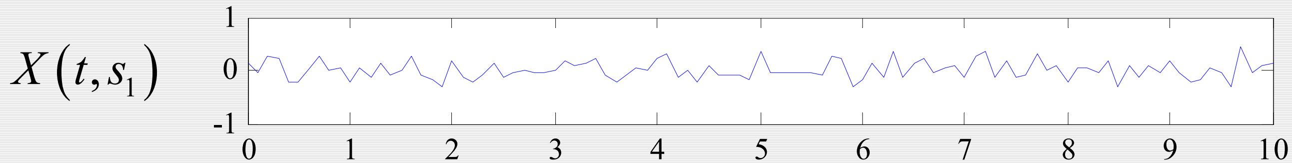
$$\boxed{\lim_{T\to\infty} R_x(\tau,T) = R_X(\tau)}$$

et que sa variance var [$R_x(\tau, T)$] tend vers zéro (convergence):

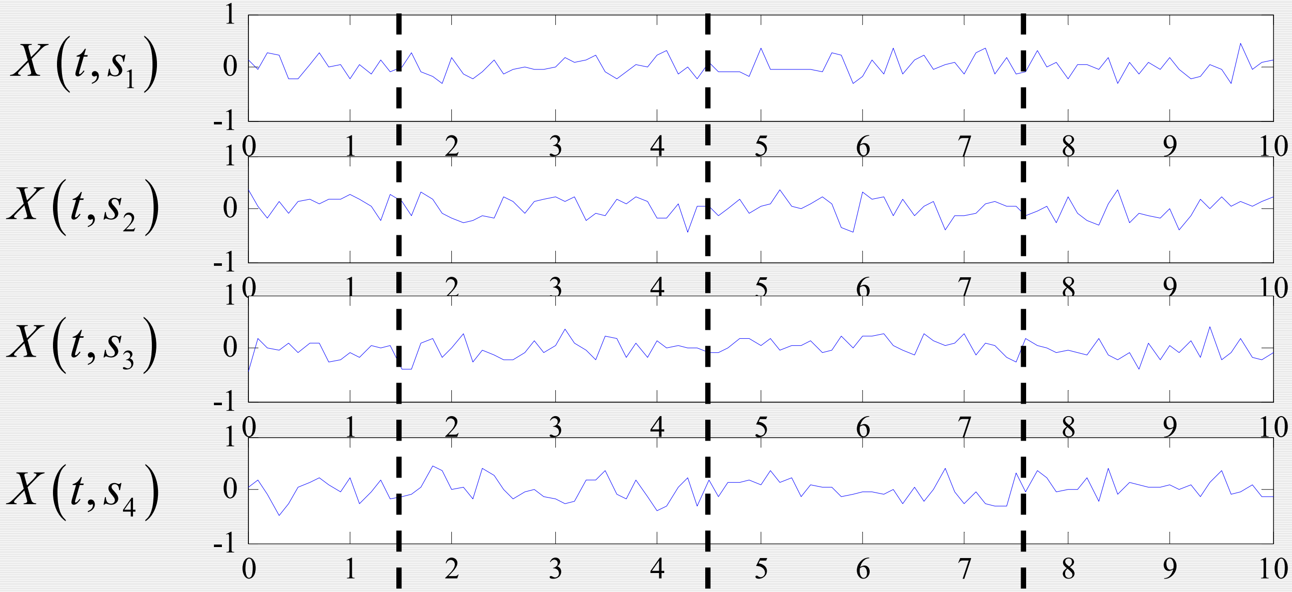
$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}\left[R_x(\tau,T)\right] = 0}$$

Le processus aléatoire doit d'abord être stationnaire au sens large.

Processus aléatoires ergodiques



$$\lim_{T \to \infty} \mu_x(T) = \mu_X$$



$$\mu_X(t_1) = \mu_X \qquad \mu_X(t_2) = \mu_X \qquad \mu_X(t_k) = \mu_X$$

Processus aléatoires ergodiques

Exemple: ergodicité d'une sinusoïde avec phase aléatoire

Nous avons vu que le processus aléatoire $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$, d'amplitude constante A et de phase aléatoire Θ uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi)$, était stationnaire, du moins au sens large.
La moyenne de $X(t)$ est:

$$\mu_X(t) = \mu_X = 0$$

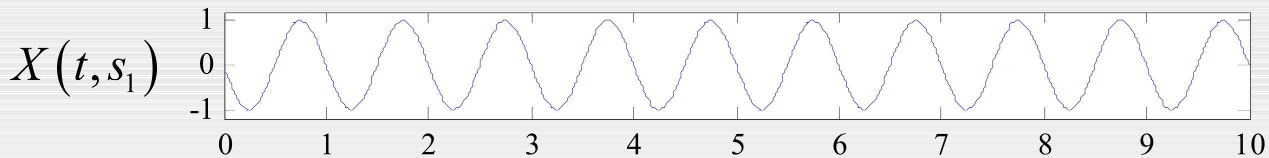
alors que sa fonction d'autocorrélation:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$$

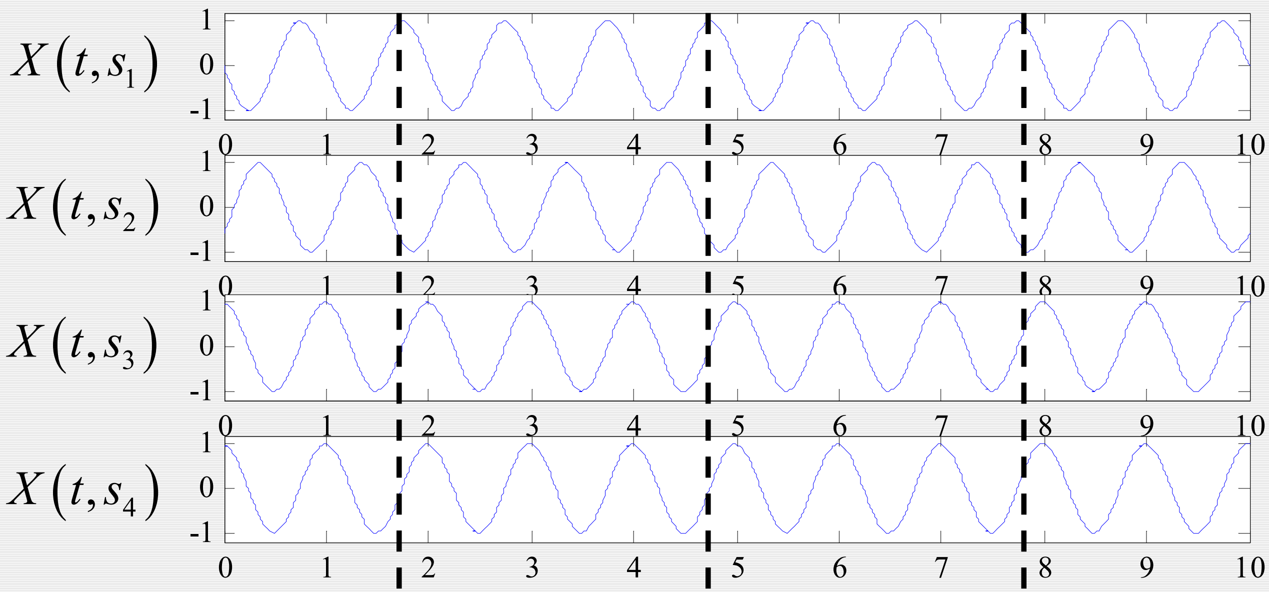
Le processus $X(t)$ étant stationnaire au sens large, on peut se demander si il est de moyenne ergodique.

Processus aléatoires ergodiques

Exemple: ergodicité d'une sinusoïde avec phase aléatoire



$$\lim_{T \to \infty} \mu_x(T) = \mu_X$$



$$\mu_X(t_1) = \mu_X \qquad \mu_X(t_2) = \mu_X \qquad \mu_X(t_k) = \mu_X$$

Processus aléatoires ergodiques

Exemple: ergodicité d'une sinusoïde avec phase aléatoire

Le processus aléatoire $X(t)$ est de moyenne ergodique si la moyenne temporelle $\mu_x(T)$ pour une réalisation $X(t, s_i) = A \cos(2\pi f_c t + \theta_i)$ tend vers sa moyenne statistique μ_X lorsque T tend vers l'infini. Ici, θ_i représente une phase fixe tirée au hasard pendant l'expérience aléatoire (distribution uniforme entre 0 et 2π).

Le processus aléatoire $X(t)$ étant périodique de période $2T = 1/f_c$, on peut faire la moyenne temporelle sur l'intervalle $[-T, T)$ puis répéter une infinité de fois:

$$\mu_x(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t, s_i)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(2\pi f_c t + \theta_i)\,dt$$

$$\mu_x(T) = \frac{A}{2T}\int_{-T}^{T} \cos(2\pi f_c t + \theta_i)\,dt = 0$$

Lorsque T tend vers l'infini, la moyenne temporelle $\mu_x(T)$ tend vers sa moyenne statistique $\mu_X = 0$ (en supposant un nombre entier mais infini de périodes). Le processus $X(t)$ est donc de moyenne ergodique.

Processus aléatoires ergodiques

Exemple: ergodicité d'une sinusoïde avec phase aléatoire

On peut maintenant se demander si le processus aléatoire $X(t)$ a une fonction d'autocorrélation qui, elle aussi, est ergodique. Sa fonction d'autocorrélation temporelle, $R_x(\tau, T)$, définie dans l'intervalle de temps $[-T, T)$ est:

$$R_x(\tau,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos\left[2\pi f_c(t+\tau)+\theta_i\right] A\cos\left(2\pi f_c t+\theta_i\right) dt$$

$$R_x(\tau,T) = \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T} \cos\left[2\pi f_c(t+\tau)+\theta_i\right] \cos\left(2\pi f_c t+\theta_i\right) dt$$

Utilisant l'identité trigonométrique: $\cos\alpha \cos\beta = 1/2\ [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, on obtient:

$$R_x(\tau,T) = \frac{A^2}{4T}\left[\underbrace{\int_{-T}^{T} \cos\left(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta_i\right) dt}_{\text{nulle (intégrale sur 2 cycles du cosinus)}} + \int_{-T}^{T} \cos\left(2\pi f_c \tau\right) dt\right]$$

Processus aléatoires ergodiques

Exemple: ergodicité d'une sinusoïde avec phase aléatoire

$$R_x(\tau, T) = \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^{T} \cos(2\pi f_c \tau)\, dt$$

$$R_x(\tau, T) = \frac{A^2}{4T} \cos(2\pi f_c \tau) \underbrace{\int_{-T}^{T} dt}_{=2T}$$

$$\boxed{R_x(\tau, T) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)}$$

Donc $R_x(\tau, T) = R_X(\tau)$. Le processus aléatoire $X(t)$ est de moyenne ergodique et sa fonction d'autocorrélation est également ergodique.

Processus aléatoires complexes

En télécommunications, on représente souvent les signaux en bande passante (autour de la fréquence porteuse f_c) par leur équivalent complexe en bande de base.

Un processus aléatoire complexe $Z(t)$ est défini en fonction de ses composantes réelles et imaginaires; $X(t)$ et $Y(t)$:

$$\boxed{Z(t) \triangleq X(t) + jY(t)}$$

Le processus aléatoire complexe $Z(t)$ est stationnaire au sens strict, si les processus aléatoires, $X(t)$ et $Y(t)$, sont conjointement stationnaires au sens strict:

$$\boxed{\begin{aligned} &F_{X(t_1+\tau),\ldots,X(t_k+\tau),Y(t_{k+1}+\tau),\ldots,Y(t_{k+j}+\tau)}\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_j\right) = \\ &\qquad F_{X(t_1),\ldots,X(t_k),Y(t_{k+1}),\ldots,Y(t_{k+j})}\left(x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_j\right) \end{aligned}}$$

Processus aléatoires complexes

La fonction d'autocorrélation du processus aléatoire complexe $Z(t)$ est décrite par l'expression :

$$\boxed{\begin{aligned} R_Z(t_1,t_2) &\triangleq E\left[Z^*(t_1)Z(t_2)\right] \\ R_Z(t_1,t_2) &\triangleq E\left\{\left[X(t_1)-jY(t_1)\right]\left[X(t_2)+jY(t_2)\right]\right\} \end{aligned}}$$

La fonction d'intercorrélation entre deux processus aléatoires complexes $Z_1(t) = X(t) + jY(t)$ et $Z_2(t) = V(t) + jW(t)$ est donnée par:

$$\boxed{\begin{aligned} R_{Z_1,Z_2}(t_1,t_2) &\triangleq E\left[Z_1^*(t_1)Z_2(t_2)\right] \\ R_{Z_1,Z_2}(t_1,t_2) &\triangleq E\left\{\left[X(t_1)-jY(t_1)\right]\left[V(t_2)+jW(t_2)\right]\right\} \end{aligned}}$$

Processus aléatoires complexes

Le processus aléatoire complexe $Z(t)$ sera stationnaire au sens large, si sa moyenne (complexe) $\mu_Z(t)$ est constante :

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_Z(t) &= E[Z(t)] = E[X(t) + jY(t)] = E[X(t)] + jE[Y(t)] \\ \mu_Z(t) &= \mu_X(t) + j\mu_Y(t) = \mu_X + j\mu_Y = \mu_Z\end{aligned}}$$

et sa fonction d'autocorrélation $R_Z(t_1, t_2)$ ne dépend que du décalage temporel τ :

$$\boxed{\begin{aligned}R_Z(t_1,t_2) &= E\left[Z^*(t_1)Z(t_2)\right] \\ R_Z(t_1,t_2) &= E\left\{\left[X(t_1) - jY(t_1)\right]\left[X(t_2) + jY(t_2)\right]\right\} = R_Z(\tau)\end{aligned}}$$