Moments conjoints d'ordre supérieur

Exemple: Indépendance, orthogonalité et corrélation

Soient Θ une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle [−π, π] ainsi que deux autres variables aléatoires, *X* et *Y*, toutes deux fonction de Θ:

$$X = \cos(\Theta) \text{ et } Y = \sin(\Theta)$$

La fonction de covariance, *cov*[*XY*], de *X* et *Y*, est donnée par:

$$\text{cov}[XY] = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = \text{cov}[XY] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

Or les espérances mathématiques, *E*[*X*], *E*[*Y*] et *E*[*XY*], sont:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = E[\cos(\Theta)] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}[\sin(\theta)]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\mu_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = E[\sin(\Theta)] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\theta) f_\Theta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}[-\cos(\theta)]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Moments conjoints d'ordre supérieur

Exemple: Indépendance, orthogonalité et corrélation

De même pour $E[XY]$:

$$E[XY] = E[\cos(\Theta)\sin(\Theta)] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) f_{\Theta}(\theta)\, d\theta$$

$$E[XY] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2\theta)\, d\theta$$

$$E[XY] = \frac{1}{8\pi}\left[-\cos(2\theta)\right]\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

La covariance de X et Y, $cov[XY] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$, est donc nulle, ce qui implique que les variables aléatoires X et Y sont non corrélées.

Cependant ces deux mêmes variables aléatoires, X et Y, sont dépendantes car elles dépendent toutes deux de la variable aléatoire: quelle que soit la valeur de Θ, X et Y seront toujours déphasées de $\pi/2$. Les variables aléatoires X et Y sont donc non corrélées mais dépendantes.

Fonctions caractéristiques

Une autre fonction importante permettant de décrire un variable aléatoire est sa fonction caractéristique. Celle-ci est définie par:

$$\boxed{\phi_X(\omega) \triangleq E\left[e^{j\omega X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\,dx}$$

La fonction caractéristique $\phi_X(\omega)$ est, à un signe près, la transformée de Fourier de la fonction de densité de probabilité de X : $f_X(x)$. En faisant la transformée de Fourier inverse sur $\phi_X(\omega)$ on retrouve $f_X(x)$:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x}\phi_X(\omega)\,d\omega}$$

Les fonctions caractéristiques sont très utiles pour déterminer les moments d'ordre quelconque n d'une variable aléatoire X.

Fonctions caractéristiques

Considérons l'expression de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de fonction de densité de probabilité $f_X(x)$:

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, e^{j\omega x} dx$$

En utilisant le développement en série de la fonction exponentielle:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

on peut réécrire $\phi_X(\omega)$:

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left\{ 1 + (j\omega x) + \frac{(j\omega x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(j\omega x)^n}{n!} + \cdots \right\} dx$$

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega x) f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(j\omega x)^2}{2!} f_X(x)\, dx + \cdots + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(j\omega x)^n}{n!} f_X(x)\, dx + \cdots$$

$$\phi_X(\omega) = 1 + (j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx + \frac{(j\omega)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx + \cdots + \frac{(j\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\, dx + \cdots$$

$$\phi_X(\omega) = 1 + (j\omega) E[X] + \frac{(j\omega)^2}{2!} E\left[X^2\right] + \cdots + \frac{(j\omega)^n}{n!} E[X^n] + \cdots$$

Fonctions caractéristiques

En dérivant l'expression de la fonction caractéristique par rapport à ω :

$$\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega) = \frac{d}{d\omega}1 + \frac{d}{d\omega}(j\omega)E[X] + \frac{d}{d\omega}\frac{(j\omega)^2}{2!}E\left[X^2\right] + \cdots + \frac{d}{d\omega}\frac{(j\omega)^n}{n!}E[X^n] + \cdots$$

$$\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega) = 0 + jE[X]\frac{d}{d\omega}\omega + \frac{j^2}{2!}E\left[X^2\right]\frac{d}{d\omega}\omega^2 + \cdots + \frac{j^n}{n!}E[X^n]\frac{d}{d\omega}\omega^n + \cdots$$

$$\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega) = jE[X] + \frac{2\omega j^2}{2!}E\left[X^2\right] + \cdots + \frac{n\omega^{n-1}j^n}{n!}E[X^n] + \cdots$$

puis en évaluant cette dérivée pour $\omega = 0$, on obtient :

$$\left.\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega)\right|_{\omega=0} = \left.jE[X]\right|_{\omega=0} + \left.\frac{2\omega j^2}{2!}E\left[X^2\right]\right|_{\omega=0} + \cdots + \left.\frac{n\omega^{n-1}j^n}{n!}E[X^n]\right|_{\omega=0} + \cdots$$

$$\left.\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega)\right|_{\omega=0} = jE[X]$$

Fonctions caractéristiques

Le moment d'ordre 1, $E[X]$, d'une variable aléatoire X, i.e. sa moyenne μ_X, peut donc être calculé de sa fonction caractéristique $\phi_X(\omega)$:

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} = j^{-1}\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0}}$$

En dérivant n fois la fonction caractéristique $\phi_X(\omega)$ par rapport à ω et en pour $\omega = 0$, on obtient les moments d'ordre supérieurs de la variable aléatoire X:

$$\boxed{E[X^n] = \frac{1}{j^n}\frac{d^n}{d\omega^n}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0} = j^{-n}\frac{d^n}{d\omega^n}\phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0}}$$

Fonctions caractéristiques

Exemple: Moments d'une variable aléatoire exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{pour } x \geq 0 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$. La fonction caractéristique de X, $\phi_X(\omega)$, est donnée par:

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{j\omega x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\phi_X(\omega) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - j\omega)x}\, dx = \lambda \left(\frac{-1}{\lambda - j\omega} \right) e^{-(\lambda - j\omega)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$\phi_X(\omega) = \left(\frac{-\lambda}{\lambda - j\omega} \right) \left[e^{-\infty} - e^{-0} \right]$$

et la fonction caractéristique, $\phi_X(\omega)$, est égale à :

$$\boxed{\phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}}$$

Fonctions caractéristiques

Exemple: Moments d'une variable aléatoire exponentielle

Connaissant la fonction caractéristique, $\phi_X(\omega)$, de la variable aléatoire X, on peut calculer sa moyenne $\mu_X = E[X]$:

$$E[X] = \frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)\Big|_{\omega=0}$$

$$E[X] = \frac{\lambda}{j}\left[\frac{-1}{(\lambda - j\omega)^2}\right]\frac{d}{d\omega}(\lambda - j\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{\lambda}{j}\left[\frac{-1}{(\lambda - j\omega)^2}\right](-j)\Big|_{\omega=0}$$

$$E[X] = \left[\frac{\lambda}{(\lambda - j\omega)^2}\right]\Big|_{\omega=0} = \left[\frac{\lambda}{\lambda^2 - j2\lambda\omega + (j\omega)^2}\right]\Big|_{\omega=0} = \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire exponentielle X, est :

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \frac{1}{\lambda}}$$

Fonctions caractéristiques

Exemple: Moments d'une variable aléatoire exponentielle

On peut calculer la variance σ_X^2 avec la dérivée seconde de $\phi_X(\omega)$:

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 = \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{d\omega^2}\phi_X(\omega)\Big|_{\omega=0} - \mu_X^2$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)\Bigg|_{\omega=0} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{j^2}\left[\frac{-2\lambda}{(\lambda - j\omega)^3}\right]\Bigg|_{\omega=0} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma_X^2 = -\left[\frac{-2\lambda}{\lambda^3 - 3j\lambda^2\omega - 3\lambda\omega^2 + j\omega^3}\right]\Bigg|_{\omega=0} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2}$$

La variance σ_X^2 de la variable aléatoire exponentielle X est égale à :

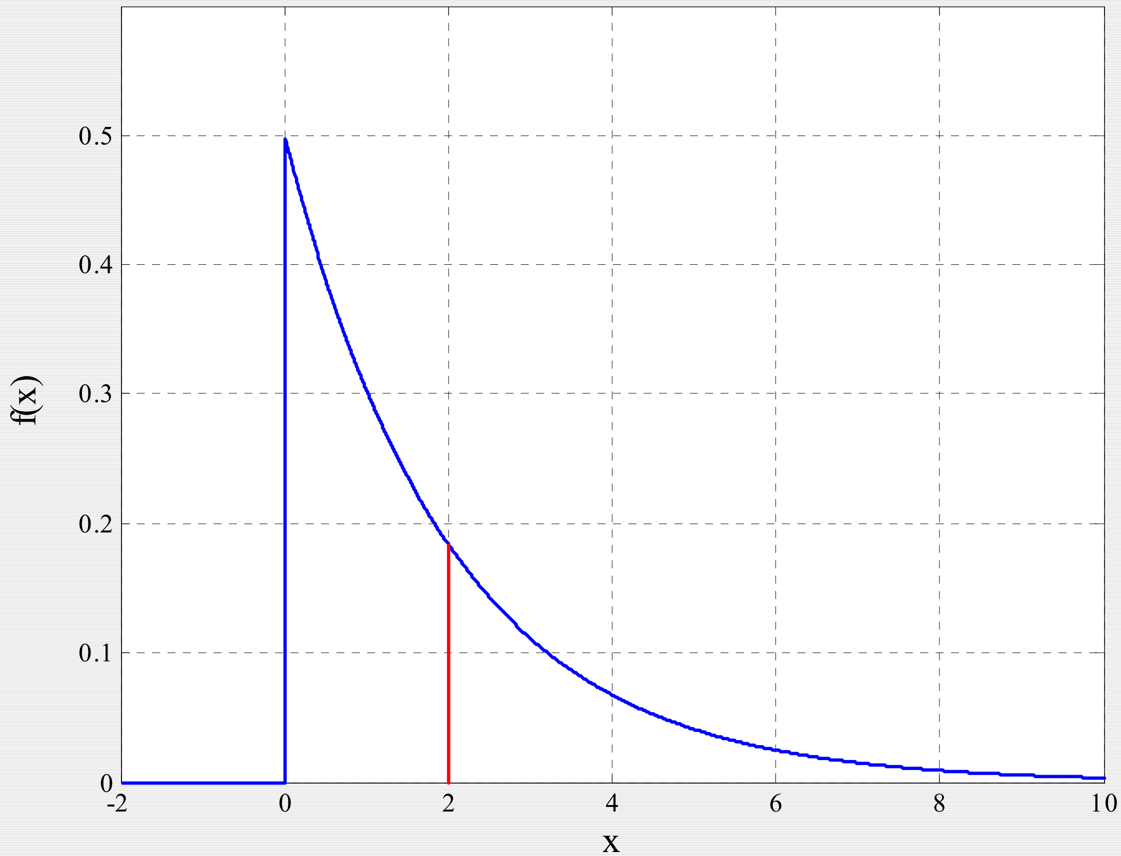
$$\boxed{\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \mu_X^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Fonctions caractéristiques

Exemple: Moments d’une variable aléatoire exponentielle

Fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ d'une variable aléatoire exponentielle avec $\lambda = 0.5$:

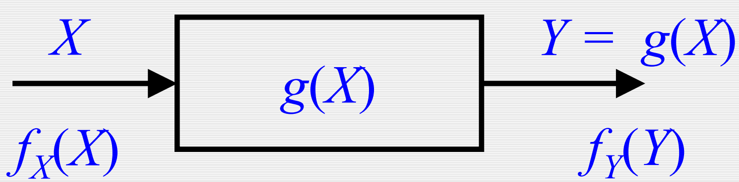
moyenne $\mu_X = 2$,
variance $\sigma_X^2 = 4$.



Transformation d'une variable aléatoire

Les variables aléatoires, tout comme les processus aléatoires, sont souvent sujet à des transformations (e.g. transformation linéaire, mise au carré, etc.).

Connaissant la distribution de la variable aléatoire X devant subir une transformation $Y = g(X)$, il est possible d'évaluer la distribution de la nouvelle variable aléatoire.



Considérons la valeur $y = g(x)$ et une valeur voisine $y + dy = g(x + dx)$. On suppose que dans les intervalles infinitésimaux dx et dy, les fonctions croissent de façon monotone. On peut alors faire l'approximation suivante:

$$y + dy = g\left(x + dx\right) \approx g(x) + \frac{g(x)}{dx}$$

Transformation d'une variable aléatoire

Considérons la probabilité que X soit dans l'intervalle $[x,\ x + dx]$ et que Y soit dans l'intervalle $[y, y + dy]$:

$$\begin{aligned} P(x < X \leq x + dx) &= P(y < Y \leq y + dy) \\ f_X(x)\,dx &= f_Y(y)\,dy \ (\text{si } g(x) \nearrow \text{ en } x) \\ f_X(x)\,dx &= -f_Y(y)\,dy \ (\text{si } g(x) \searrow \text{ en } x) \end{aligned}$$

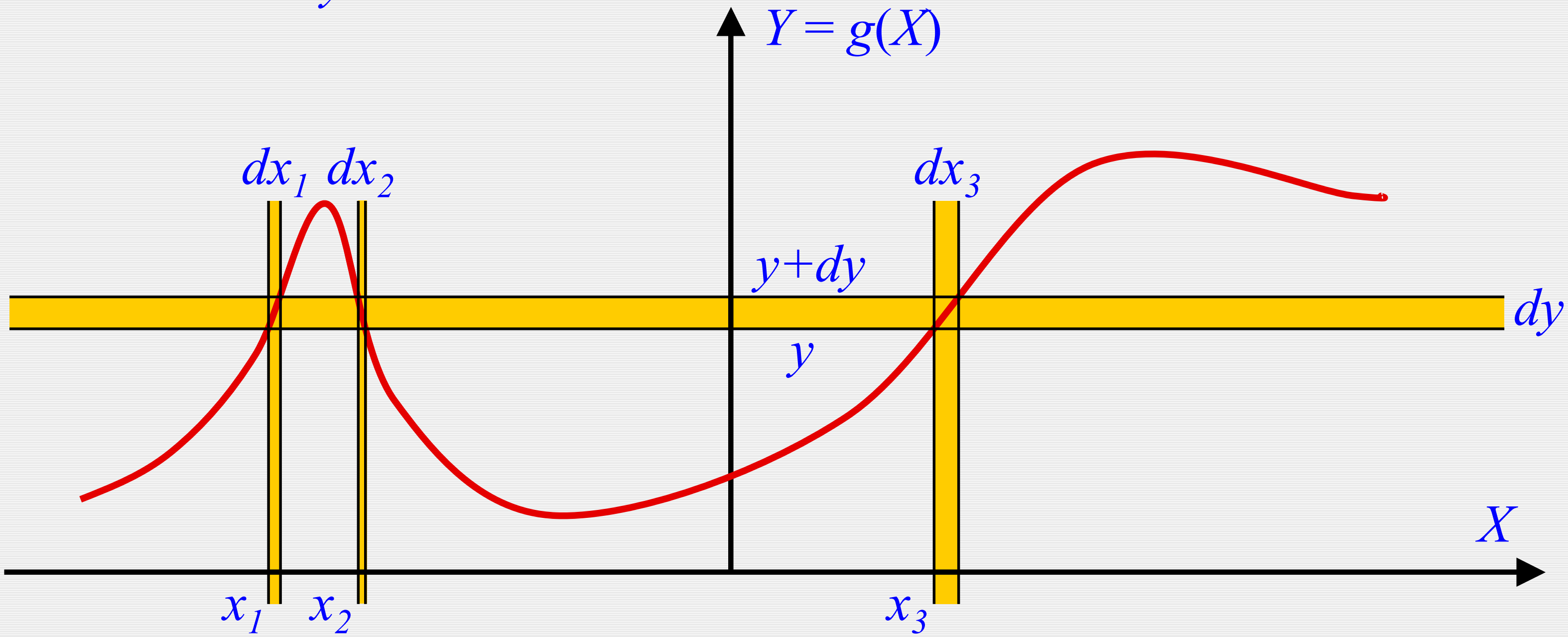
$$\boxed{f_Y(y)\,dy = f_X(x)\left|dx\right|}$$

Il y a donc conservation de la probabilité lorsqu'une variable aléatoire X est transformée par un processus quelconque en une nouvelle variable aléatoire Y. On peut donc exprimer la nouvelle fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$ en fonction de $f_X(x)$:

$$\boxed{f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Bigg|_{x = x_1 = g^{-1}(y)}}$$

Transformation d'une variable aléatoire

Une fonction $y = g(x)$ peut prendre plusieurs valeurs de x correspondant à la même valeur de y :



$$y = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) \text{ et}$$

$$y + dy = g(x_1 + dx_1) = g(x_2 + dx_2) = g(x_3 + dx_3)$$

Transformation d'une variable aléatoire

Dans le cas général, la fonction de densité de probabilité de $Y = g(X)$, $f_Y(y)$, s'exprime en fonction de densité de probabilité de X, $f_X(x)$, mais cette fois-ci en tenant compte de l'ensemble des valeurs $\{x_k\}$ pour lesquelles on obtient une même valeur de y :

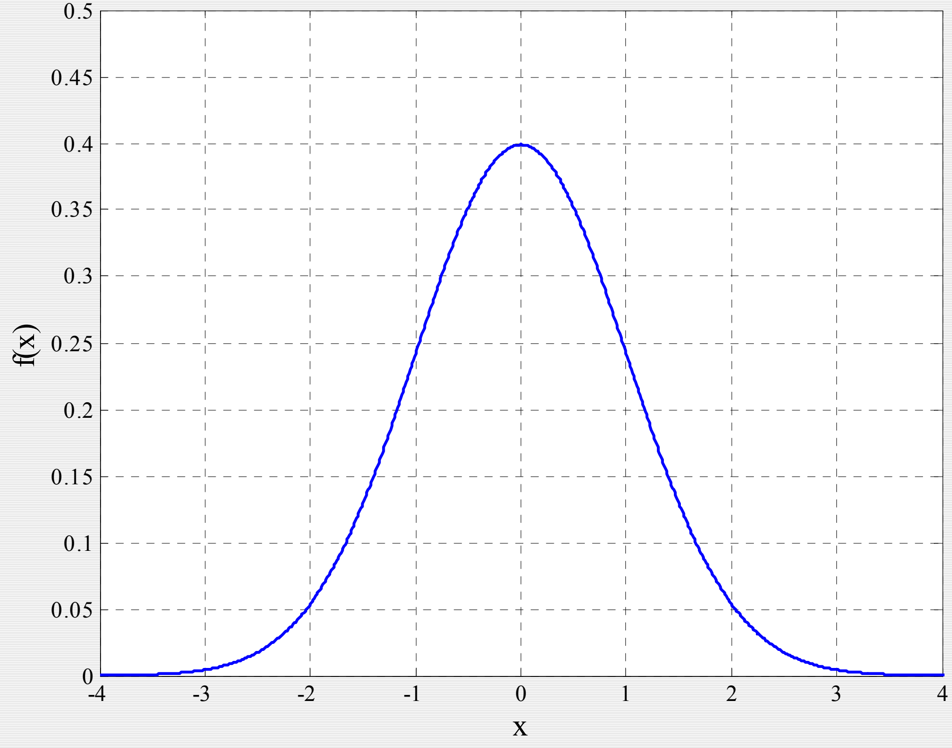
$$\boxed{f_Y(y) = \sum_k \left[f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \Bigg|_{x=x_k} \right]}$$

Transformation d'une variable aléatoire

Exemple: Transformation d'une variable aléatoire gaussienne

Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle, $\mu_X = E[X] = 0$, et d'écart-type unitaire, $\sigma_X = 1$, c'est-à-dire une variable aléatoire normale $N(0,1)$:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}$$



Transformation d’une variable aléatoire

Exemple: Transformation d’une variable aléatoire gaussienne

Une seconde variable aléatoire Y est obtenue en opérant une transformation de mise au carré de X :

$$X \longrightarrow \boxed{g(X) = X^2} \longrightarrow Y = g(X)$$

$$f_X(X) = N(0,1) \qquad\qquad f_Y(Y) = ?$$

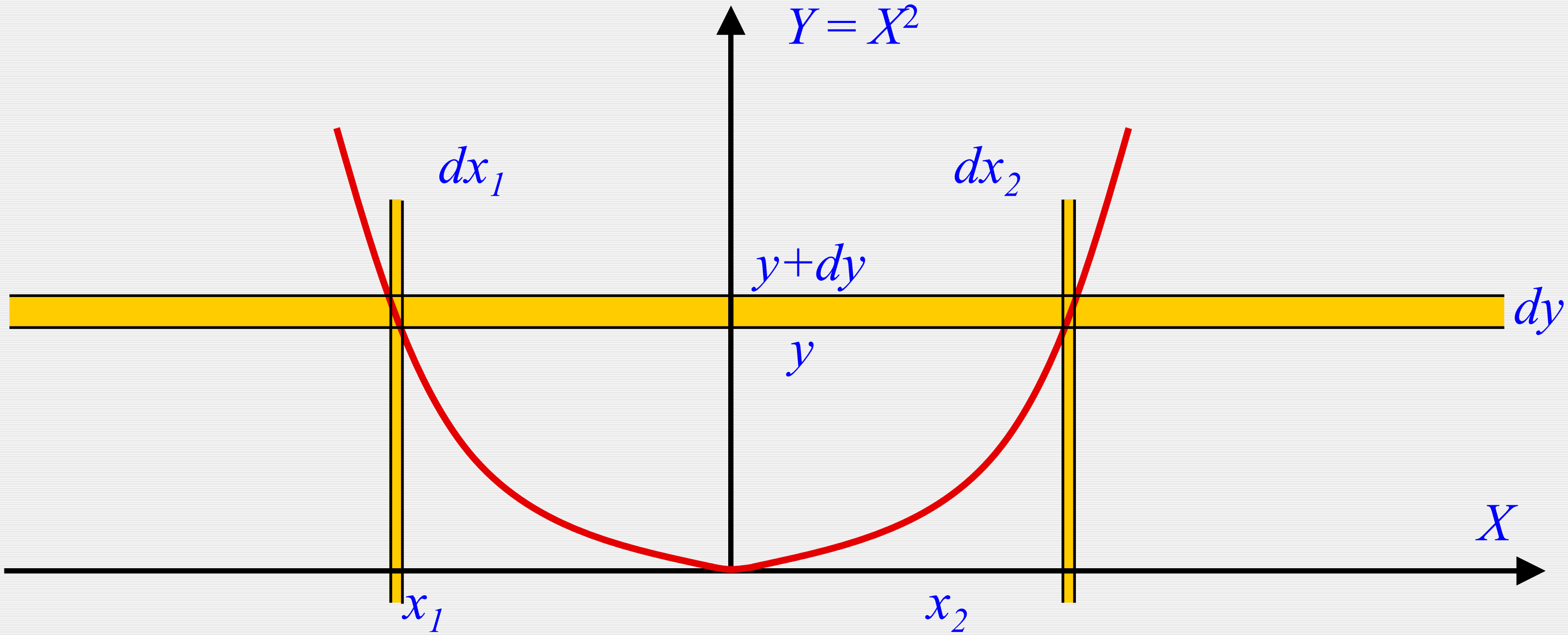
Quelle est la fonction de densité de probabilité, $f_Y(y)$, de la nouvelle variable aléatoire Y?

Transformation d’une variable aléatoire

Exemple: Transformation d’une variable aléatoire gaussienne

On remarque que la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. À chaque valeur de y correspondent deux valeurs de x:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \text{ c'est-à-dire: } x_1 = \sqrt{y} \text{ et } x_2 = -\sqrt{y}$$



Transformation d'une variable aléatoire

Exemple: Transformation d'une variable aléatoire gaussienne

La fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$ de la nouvelle variable aléatoire devient :

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{2} \left[f_X(x) \left|\frac{dx}{dy}\right| \Bigg|_{x=x_k} \right] = f_X(x) \left|\frac{dx}{dy}\right| \Bigg|_{x=x_1=\sqrt{y}} + f_X(x) \left|\frac{dx}{dy}\right| \Bigg|_{x=x_2=-\sqrt{y}}$$

Les dérivées sont données par :

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} = \frac{1}{\left|\frac{dx^2}{dx}\right|} = \frac{1}{|2x|} = \frac{1}{\left|\pm 2\sqrt{y}\right|} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

et $f_Y(y)$ devient :

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{2\sqrt{y}} \Bigg|_{x=x_1=\sqrt{y}} + f_X(x) \frac{1}{2\sqrt{y}} \Bigg|_{x=x_2=-\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X\left(-\sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Transformation d'une variable aléatoire

Exemple: Transformation d'une variable aléatoire gaussienne

La fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$ pour X gaussienne de moyenne nulle et de variance unitaire devient :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\left(\sqrt{y}\right)^2 / 2\right]} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\left(-\sqrt{y}\right)^2 / 2\right]} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(y/2\right)} + \frac{1}{2\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-\left(y/2\right)}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2y\pi}} e^{-\left(y/2\right)}, \ \text{pour } y \geq 0}$$

Cette fonction de densité de probabilité n'est définie que pour les valeurs non négatives de y. Il s'agit d'une variable aléatoire du chi carré à 1 degré de liberté:

$$\boxed{Y \sim \chi_1^2}$$

Transformation d'une variable aléatoire

Exemple: Transformation d'une variable aléatoire gaussienne

$$\boxed{X \sim N(\mu_X = 0, \sigma_X = 1)}$$

$$\boxed{Y \sim \chi_1^2}$$