UNIVERSITÉ D'OTTAWA

ELG 4571
Systèmes de télécommunications

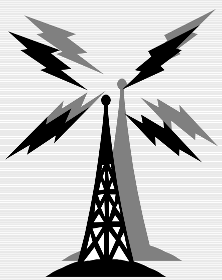
COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DU CANADA

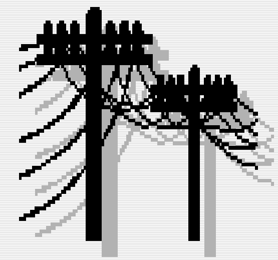
GEF 411A
Théorie de Communication

UNIVERSITÉ DE MONCTON

GELE 4521
Télécommunications

Chapitre 2





Processus aléatoires et analyse spectrale

Partie 1: Probabilités et variables aléatoires

J.-Y. Chouinard/M. Hefnawi/Y. Bouslimani

Jean-Yves Chouinard, *Téléphone :* **613 562-5800 poste 6218** , *Courriel :* **chouinar@site.uottawa.ca**

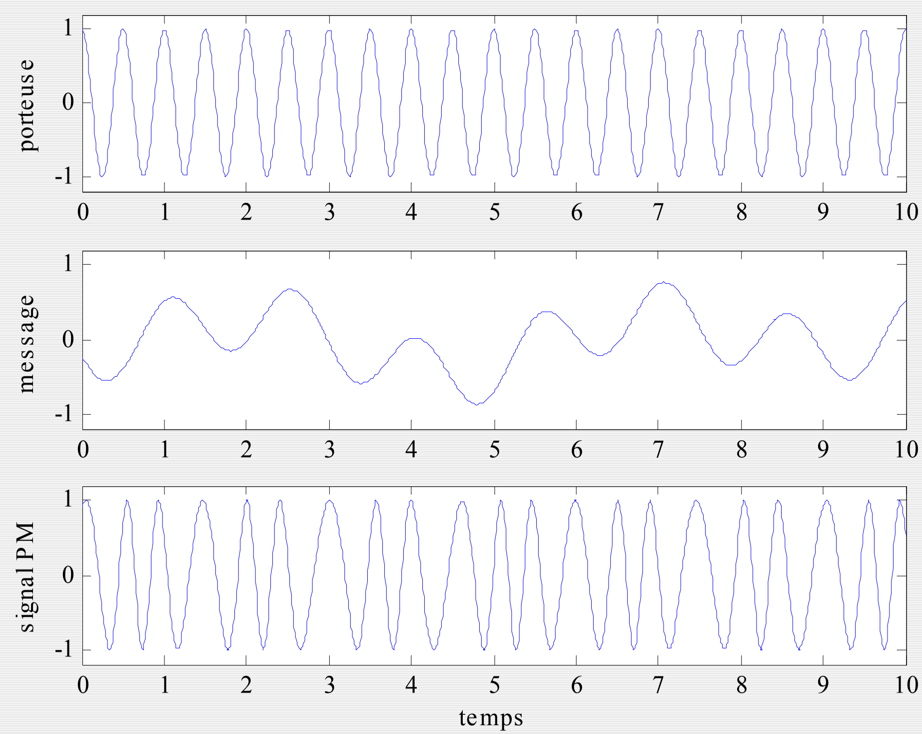
Introduction
Signaux déterministes

Les signaux de télécommunications étudiés jusqu'à présent sont des signaux déterministes, quelconques mais entièrement déterminés en temps et en fréquence.

Ici, par exemple, les signaux sont complètement spécifiés par la variable de temps, et les constantes:

$$m(t) = \sum_i A_{m_i} \cos\left(2\pi f_{m_i} t + \theta_{m_i}\right)$$

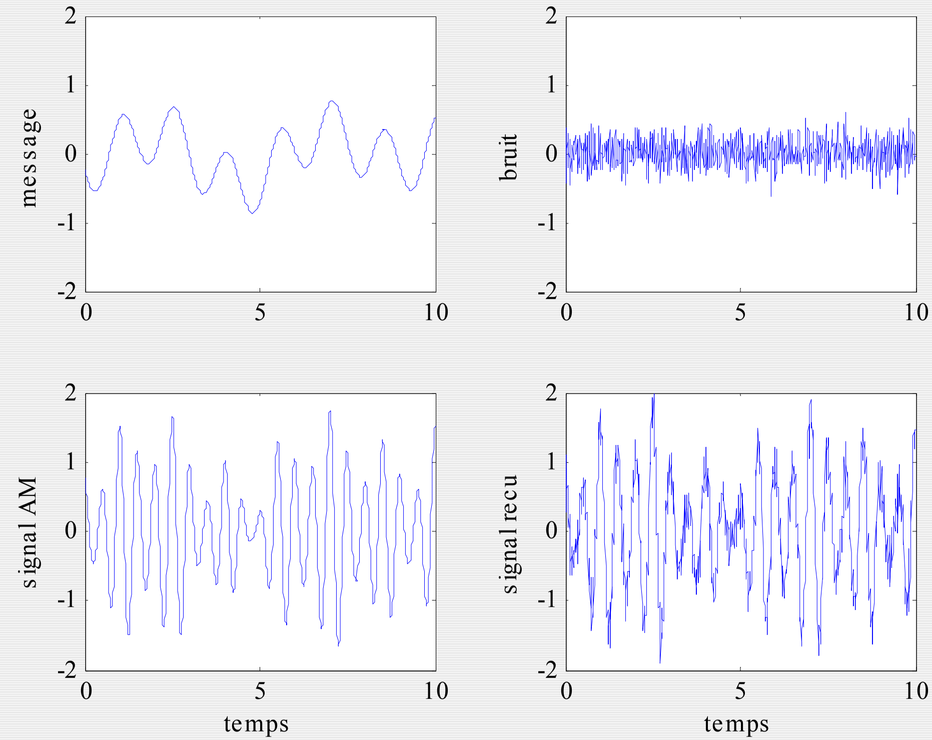
$$s_{\mathrm{PM}}(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$



Introduction
Signaux aléatoires

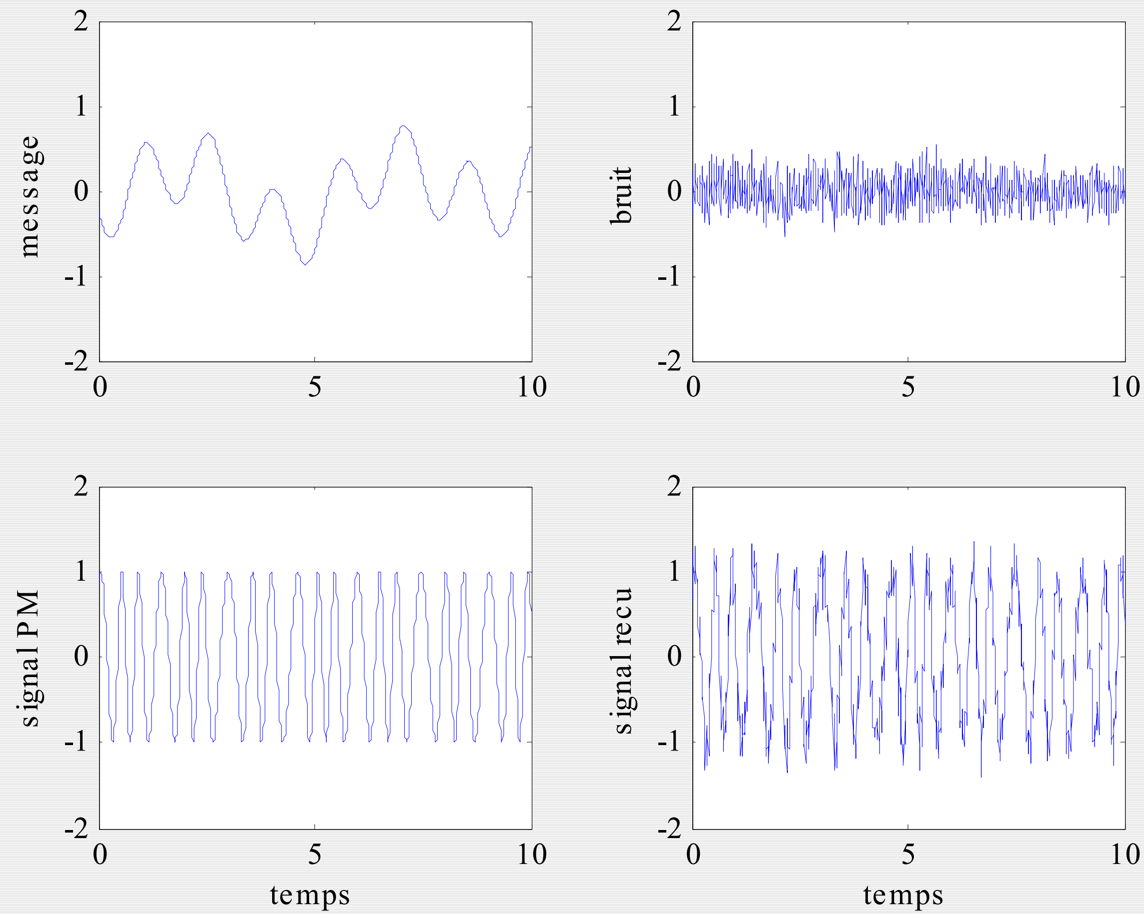
Les systèmes de télécommunications sont invariablement affectés par la présence de bruit dans les canaux de transmission. Le bruit étant imprévisible, de nature stochastique, il est difficile de l'éliminer.

Effet de bruit additif sur un signal modulé en amplitude (AM conventionnel) avec un indice de modulation de 100 %.



Introduction
Signaux aléatoires

Effet de bruit additif sur un signal modulé en phase : modulation d'angle PM.



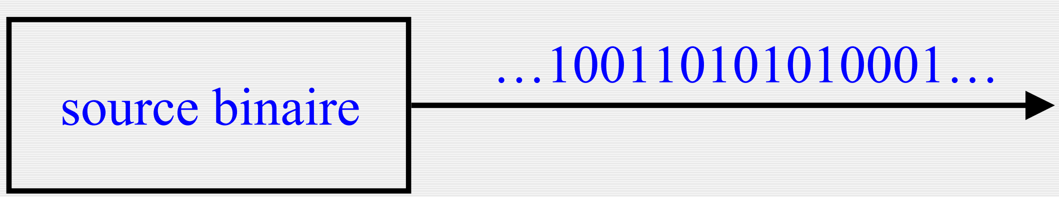
Revue des notions de probabilité

Expérience aléatoire

En théorie des probabilités, on s'intéresse à faire des expériences dites aléatoires, c'est-à-dire dont l'issue n'est pas connue à l'avance: il y a un élément de chance, ou de risque, associé à l'ensemble des résultats possibles.

L'ensemble S de tous les résultats possibles de l'expérience est connu sous le nom d'espace d'échantillonnage ou encore d'ensemble universel. On appelle événement, par exemple l'évènement A, un des résultats de l'expérience aléatoire. Un événement impossible, qui ne se produit jamais, est représenté par l'ensemble vide.

Par exemple, une source d'information binaire peut générer deux symboles seulement: 0 et 1. L'espace d'échantillonnage, $S = \{0,1\}$, comprend les deux résultats possibles: 0 et 1.



Revue des notions de probabilité

Fréquence relative et probabilité

On définit la fréquence relative d'un événement A comme étant le nombre de fois que cet événement se produit, $N_n(A)$, sur le nombre total d'essais n lorsque l'on répète l'expérience n fois:

$$0 \leq \frac{N_n(A)}{n} \leq 1$$

Si l'expérience aléatoire obéit à une régularité statistique, c'est-à-dire que la valeur de la fréquence relative $N_n(A)$ converge vers une valeur limite lorsque le nombre d'essais n augmente, alors on peut définir la probabilité $P(A)$ que l'événement A se produise comme étant la limite de la fréquence relative lorsque n tend vers l'infini:

$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}}$$

Revue des notions de probabilité

Système de probabilités

Un système de probabilités doit comprendre les trois caractéristiques suivantes:

- un ensemble universel S comprenant tous les évènements possibles de l'expérience aléatoire,
- une classe d'événements E qui sont des sous-ensembles de S, par exemple:

$$\{\varnothing, A, B, \ldots, AB, BB, \ldots, S\}$$

- une mesure de probabilité associée à chaque événement, ou combinaison d'événements, dans la classe d'évènements E, et pour laquelle:
  - la probabilité de l'événement universel:

$$P(S) = 1$$

  - la probabilité de tout événement de la classe E:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

  - pour des événements mutuellement exclusifs A, B, C, etc., la probabilité d'obtenir ces événements est:

$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots$$

Probabilités conditionnelles

On définit la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ de l'événement A étant donné que l'événement B s'est produit comme suit:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad , P(B) \neq 0}$$

La probabilité conjointe $P(AB)$ d'obtenir les deux événements A et B est la probabilité d'obtenir l'un des deux événements, A ou B, fois la probabilité d'obtenir l'autre événement étant donné le premier:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$$

Si les événements A et B sont indépendants alors les probabilités conditionnelles $P(A|B)$ et $P(B|A)$ ne dépendent plus de l'autre événement et deviennent: $P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = P(B)\,P(A)$$

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes permet d'exprimer la probabilité conditionnelle $P(B|A)$ en fonction de $P(A|B)$ à partir du fait que la probabilité conjointe $P(AB) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} \qquad , P(A) \neq 0}$$

et réciproquement:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)} \qquad , P(B) \neq 0}$$

$\{P(A_0)XP(A_1)\}$

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Exemple: Canal symétrique binaire

Supposons que l'on transmette de l'information binaire dans un canal bruité et que l'on désire déterminer la probabilité de recevoir correctement cette information au récepteur. Il est possible de représenter la source d'information binaire par l'ensemble des probabilités a priori que la source émette l'un ou l'autre des symboles binaires:

$$P(A_0) = p_0 \qquad (\text{probabilité de transmettre un "0" ou } A_0)$$

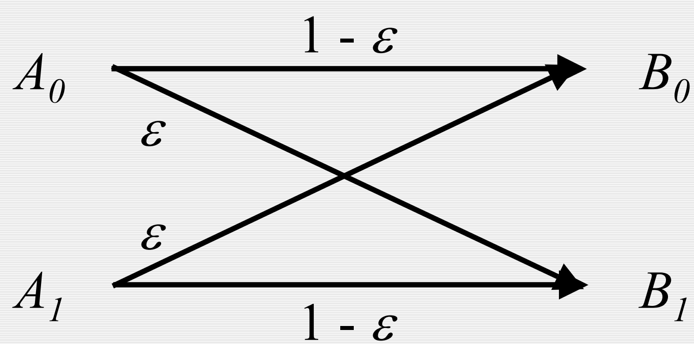
$$P(A_1) = p_1 \qquad (\text{probabilité de transmettre un "1" ou } A_1)$$

Ces symboles sont transmis dans le canal bruité qui aura pour effet de changer ou modifier certains symboles avec une probabilité de croisement , ce qui conduit à des symboles en erreur à la réception. Les probabilités $P(B_0)$ et $P(B_1)$ indiquent la probabilité de recevoir le symbole A_0 et le symbole A_1 respectivement à la sortie du canal bruité.

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Exemple: Canal symétrique binaire

L'effet perturbateur du canal, lui, peut-être modélisé par un canal binaire, c'est-à-dire un canal avec des entrées et sorties binaires, et des probabilités de transition (probabilités conditionnelles) entre les symboles d'entrée et de sortie. Ici, on considère que le canal affecte les symboles A_0 et A_1 avec la même probabilité de croisement ε, avec $0 \leq \varepsilon \leq 0.5$:



Les probabilités (conditionnelles) de transition sont:

$$P\left(B_0 | A_0\right) = P\left(B_1 | A_1\right) = 1 - \varepsilon \qquad \text{(pas d'erreur)}$$

$$P\left(B_1 | A_0\right) = P\left(B_0 | A_1\right) = \varepsilon \qquad \text{(erreur causée par le canal)}$$

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Exemple: Canal symétrique binaire

Les probabilités de transition $\{P(B_j|A_i)\}$ définissent le canal de transmission en indiquant quelle est la probabilité d'obtenir le symbole B_j si le symbole A_i a été transmis. Connaissant l'ensemble des probabilités a priori des symboles transmis, $\{P(A_i)\}$, ainsi que des probabilités de transition du canal, $\{P(B_j|A_i)\}$, on peut déterminer les probabilités des symboles à la sortie du canal, $\{P(B_j)\}$:

$$P(B_j) = \sum_{i=0}^{1} P(A_i B_j) = \sum_{i=0}^{1} P(A_i) P(B_j|A_i)$$

$$P(B_j) = P(A_0) P(B_j|A_0) + P(A_1) P(B_j|A_1)$$

$$P(B_j) = p_0 P(B_j|A_0) + p_1 P(B_j|A_1)$$

Ainsi la probabilité d'obtenir le symbole B_0 (ou B_1) à la sortie est:

$$\boxed{P(B_0) = p_0(1-\varepsilon) + p_1\varepsilon \quad \text{et} \qquad P(B_1) = p_0\varepsilon + p_1(1-\varepsilon)}$$

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Exemple: Canal symétrique binaire

On peut aussi déterminer les probabilités (conditionnelles) a posteriori, $\{P(A_i|B_j)\}$, que le symbole A_i ait été effectivement émis par la source étant donné l'observation du symbole B_j à la sortie du canal bruité.

Les probabilités a posteriori $\{P(A_i|B_j)\}$ peuvent être aisément déduites des probabilités conditionnelles de transition, $\{P(B_j|A_i)\}$, définissant le canal de transmission, et les probabilités des symboles à l'entrée, $\{P(A_i)\}$, et à la sortie du canal, $\{P(B_j)\}$, en utilisant le théorême de Bayes:

$$\boxed{P(A_0|B_0) = \frac{P(B_0|A_0)P(A_0)}{P(B_0)} = \frac{p_0(1-\varepsilon)}{p_0(1-\varepsilon)+p_1\varepsilon}}$$

$$\boxed{P(A_1|B_0) = \frac{P(B_0|A_1)P(A_1)}{P(B_0)} = \frac{p_1\varepsilon}{p_0(1-\varepsilon)+p_1\varepsilon}}$$

$$\boxed{P(A_0|B_1) = \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} = \frac{p_0\varepsilon}{p_0\varepsilon+p_1(1-\varepsilon)}}$$

$$\boxed{P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{p_1(1-\varepsilon)}{p_0\varepsilon+p_1(1-\varepsilon)}}$$

Probabilités conditionnelles et théorème de Bayes

Exemple: Canal symétrique binaire

Si on suppose que la source binaire est équiprobable, i.e. les symboles A_0 et A_1 ont la même probabilité, alors les probabilités a posteriori $\{P(A_i | B_j)\}$ des symboles émis après observation des symboles reçus se simplifient:

$$\boxed{P\left(A_0 \middle| B_0\right) = \frac{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\varepsilon} = (1-\varepsilon)}$$

$$\boxed{P\left(A_0 \middle| B_1\right) = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}(1-\varepsilon)} = \varepsilon}$$

$$\boxed{P\left(A_1 \middle| B_0\right) = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\varepsilon} = \varepsilon}$$

$$\boxed{P\left(A_1 \middle| B_1\right) = \frac{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}{\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}(1-\varepsilon)} = (1-\varepsilon)}$$

Les symboles reçus, B_0 et B_1, sont alors équiprobables: $P(B_0) = P(B_1) = 0.5$.

Variables aléatoires

- Variables aléatoires discrètes et continues
- Fonction de répartition et fonction de densité de probabilité
- Variables aléatoires multidimensionnelles
- Espérance mathématique d’une variable aléatoire
- Moments d’une variable aléatoire
- Moments d’ordre supérieur
- Moments conjoints d’ordre supérieur
- Fonctions caractéristiques
- Transformation d’une variable aléatoire

Variables aléatoires

On peut définir une variable aléatoire X à partir d'une fonction de résultat R et un résultat quelconque $s \in S$ d'une expérience aléatoire:

$$X = R(s)$$

Considérons une source d'information binaire. L'expérience aléatoire consiste à générer une séquence de trois bits et d'observer le résultat. L'ensemble S des résultats possibles est:

$$S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

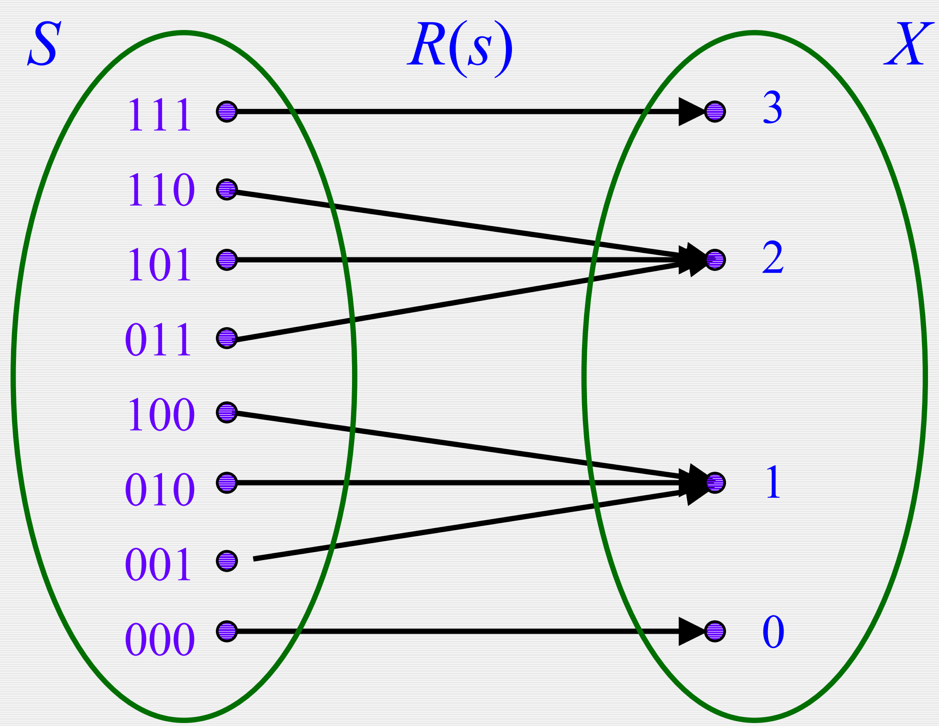
On peut définir une fonction de résultat R(s) qui indique le nombre de fois que le symbole binaire “1” apparaît:

$$R(000) = 0$$
$$R(001) = R(010) = R(100) = 1$$
$$R(011) = R(110) = R(101) = 2$$
$$R(111) = 3$$

Ainsi la variable aléatoire $X = R(s)$ peut prendre les quatre valeurs: 0, 1, 2 et 3.

Variables aléatoires

Relation existant entre l'espace d'échantillonnage *S*, la fonction de résultat *R*(*s*) et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire *X*.



Variables aléatoires discrètes et continues

Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire est dite variable aléatoire discrète si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre est un ensemble fini, e.g. l'ensemble $\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2\}$ ou un ensemble infini dénombrable (e.g. l'ensemble des nombres entiers).

La sortie d'une source de symboles binaires est un exemple de variable aléatoire discrète. La source X émet les symboles A_0 et B_0 avec des probabilités p_0 et p_1.

Variables aléatoires continues

Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini, par exemple, l'ensemble des nombres réels compris dans l'intervalle [-5,+5].

Un exemple courant de variable aléatoire continue est la tension (ou voltage) du bruit causé par un canal de transmission. La tension de bruit est un nombre réel.

Fonction de répartition et fonction de densité de probabilité

Deux fonctions probabilistes permettent de décrire le comportement de variables aléatoires: la fonction de répartition et la fonction de densité de probabilité.

La fonction de répartition, ou encore *fonction de distribution cumulative*, $F_X(x)$ indique la probabilité qu'une variable aléatoire X soit plus petite ou égale à une variable x:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x)}$$

La fonction de répartition $F_X(x)$ est donc bornée par: $0 \leq F_X(x) \leq 1$: elle croît de manière monotone en fonction de la valeur de la variable x:

$$F_X(x_1) \geq F_X(x_2) \qquad \text{si } x_2 \geq x_1$$

Fonction de répartition et fonction de densité de probabilité

La dérivée de la fonction de répartition $F_X(x)$ par rapport à x donne la fonction de densité de probabilité (pdf), dénotée par $f_X(x)$:

$$\boxed{f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}} \quad \text{et} \quad \boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi}$$

Lorsque x tend vers l'infini, $F_X(\infty) = P(X \leq \infty) = 1$, ce qui représente un événement certain. La probabilité que la valeur de la variable aléatoire X soit comprise dans un intervalle $(x_1, x_2]$ peut être déterminé par la fonction de répartition, $F_X(x)$, ou par la fonction de densité de probabilité, $f_X(x)$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(\xi)\, d\xi - \int_{-\infty}^{x_1} f_X(\xi)\, d\xi$$

$$\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(\xi)\, d\xi}$$

Fonction de répartition et fonction de densité de probabilité

Exemple: variable aléatoire gaussienne

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X), \text{ avec } \mu_X = 2 \text{ et } \sigma_X = 1/2$$

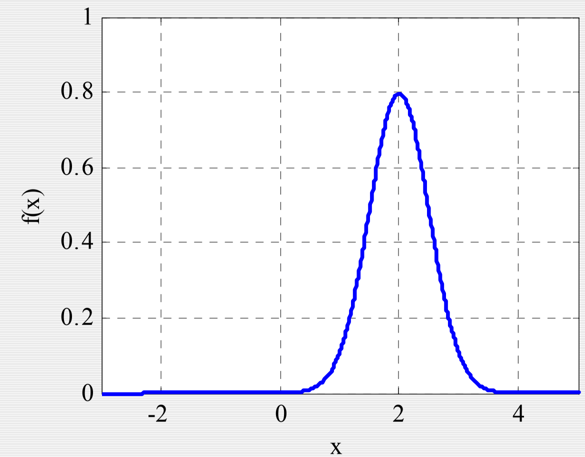
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

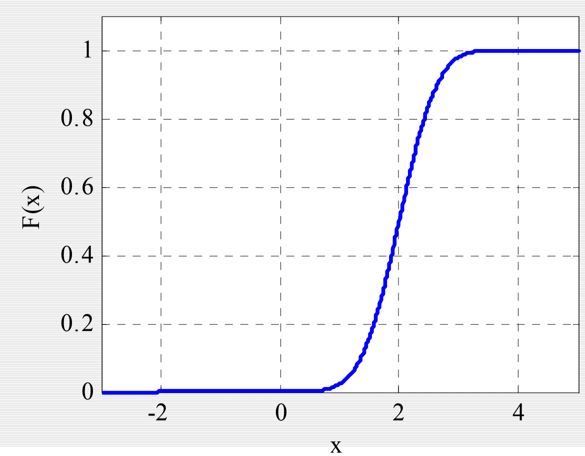
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} e^{-\frac{(\xi-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}\, d\xi$$

$$F_X(x) = Q\left(\frac{\mu_X - x}{\sigma_X}\right), \qquad Q(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\, d\lambda$$

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\mu_X - x}{\sqrt{2}\sigma_X}\right), \operatorname{erfc}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda$$





Variables aléatoires multidimensionnelles

En pratique, il est souvent nécessaire de représenter les signaux et systèmes de télécommunications par plusieurs variables aléatoires, ou encore par une, ou des, variables aléatoires multidimensionnelles.

On définit la fonction de répartition conjointe d'une série de variables aléatoires (ou des composantes d'une variable aléatoire multidimensionnelle de dimension N) en fonction de la probabilité conjointe:

$$\boxed{F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_N \le x_N)}$$

La fonction de densité de probabilité conjointe s'obtient des dérivées partielles successives de la fonction de répartition conjointe:

$$\boxed{f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N) = \frac{\partial^N F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N}}$$

Variables aléatoires multidimensionnelles

Tout comme pour les variables aléatoires simples, la fonction de répartition conjointe augmente de manière monotone de 0 à 1 en fonction de l'ensemble des variables $x_1, \ldots, x_N$.

L'intégrale de la fonction de densité de probabilité conjointe suit la règle:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_N = 1}$$

La fonction de répartition conjointe se calcule aussi de la fonction de densité de probabilité conjointe:

$$\boxed{F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_N} f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right)d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_N}$$

Variables aléatoires multidimensionnelles

On peut obtenir la fonction de répartition par rapport à une variable, par exemple X_1, en intégrant la fonction de densité de probabilité conjointe par rapport aux autres variables aléatoires de -∞ à ∞:

$$\boxed{F_{X_1}\left(x_1\right) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right) d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_N}$$

On en déduit que:

$$f_{X_1}\left(x_1\right) = \frac{dF_{X_1}\left(x_1\right)}{dx_1}$$

$$f_{X_1}\left(x_1\right) = \frac{d}{dx_1}\left[\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right) d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_N\right]$$

$$f_{X_1}\left(x_1\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}\left(x_1,\xi_2,\ldots,\xi_N\right) d\xi_2\cdots d\xi_N$$

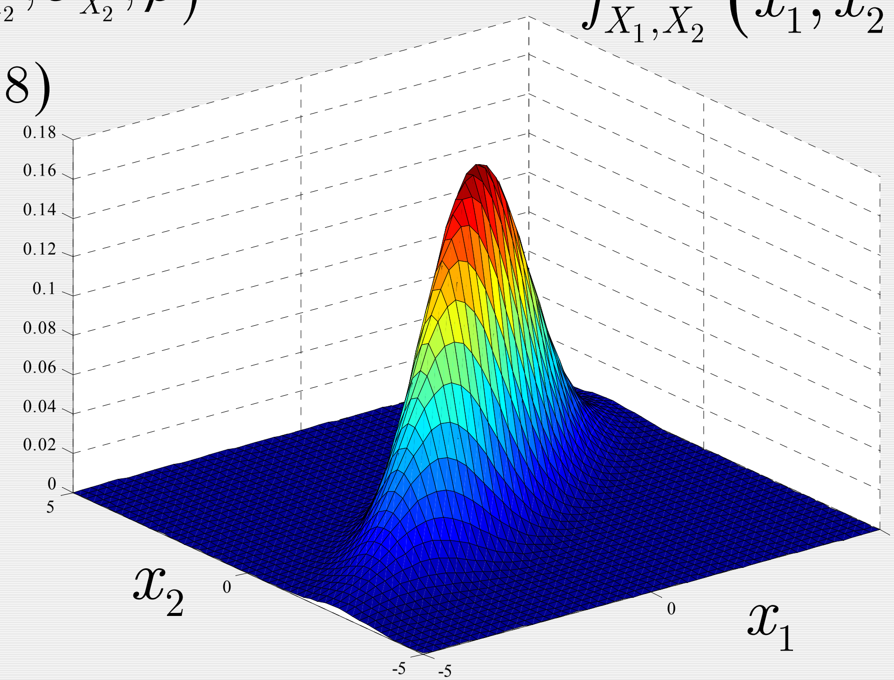
Variables aléatoires multidimensionnelles

Exemple: variable aléatoire gaussienne bidimensionnelle

$$\bar{X} = (X_1, X_2) \sim N\left(\mu_{X_1}, \sigma_{X_1}; \mu_{X_2}, \sigma_{X_2}; \rho\right)$$

$$\bar{X} = (X_1, X_2) \sim N(0,1;0,1.5;0.8)$$

Un exemple de variable aléatoire multidimensionnelle est la variable aléatoire gaussienne bidimensionnelle:



$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_{X_1})^2}{\sigma_{X_1}^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_{X_1})(x_2-\mu_{X_2})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} + \frac{(x_2-\mu_{X_2})^2}{\sigma_{X_2}^2}\right]}$$

Espérance mathématique d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique ou moyenne d'une variable aléatoire X, que l'on dénote $E[X]$, est donnée par le centre de gravité de l'aire sous sa fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ ou, dans le cas de variables aléatoires discrètes, des probabilités des évènements.

$$\boxed{\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx}$$

Moments d'une variable aléatoire

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire, $E[X]$, donne sa moyenne, à savoir μ_X. On peut aussi déterminer l'espérance mathématique d'une fonction $g(x)$ de cette variable aléatoire.

$$X \longrightarrow \boxed{\;g(x)\;} \longrightarrow Y = g(X)$$

On peut calculer la moyenne μ_Y de la nouvelle variable aléatoire $Y = g(X)$ à partir de sa propre fonction de densité de probabilité $f_Y(y)$:

$$\mu_Y = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy$$

On peut aussi la calculer à partir de la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ de X:

$$\boxed{\mu_Y = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx}$$

Moments d’une variable aléatoire

Supposons que Θ est une variable aléatoire représentant une phase uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi)$:

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1/2\pi, & 0 \le \theta < 2\pi \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit une nouvelle variable aléatoire $Y = A\cos(\Theta)$, alors l'espérance mathématique de Y est:

$$\mu_Y = E[Y] = E[g(\Theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$\mu_Y = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta$$

$$\mu_Y = A\int_0^{2\pi} \cos(\theta) \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{A}{2\pi}\left[\sin(\theta)\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$\boxed{\mu_Y = \frac{A}{2\pi}\left[\sin(2\pi) - \sin(0)\right] = 0}$$

Moments d'ordre supérieur

Le moment d'ordre n d'une variable aléatoire X est obtenu par la fonction $g(X) = X^n$:

$$\boxed{E\left[X^n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,dx}$$

Ainsi le moment d'ordre $n = 1$ de la fonction de densité de probabilité $f_X(x)$ est tout simplement sa moyenne, c'est-à-dire $E[X^1] = \mu_X$. Le moment d'ordre 2 de X donne sa valeur moyenne au carré:

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$$

On peut définir aussi des moments centraux d'ordre n, centrés autour de leur moyenne μ_X: on s'intéresse alors à la variable aléatoire centrée: $(X - \mu_X)$. La variance σ_X^2 de X s'obtient de son moment central d'ordre 2:

$$\boxed{\sigma_X^2 = E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mu_X\right)^2 f_X(x)\,dx}$$

Moments conjoints d'ordre supérieur

On peut généraliser le concept de moment d'ordre supérieur d'une variable aléatoire à plusieurs variables aléatoires, $X_1, \ldots, X_N$:

$$\boxed{E\left[X_1^{n_1} \cdots X_N^{n_N}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{n_1} \cdots x_N^{n_N} f_{X_1,\ldots,X_N}\left(x_1,\ldots,x_N\right) dx_1 \cdots dx_N}$$

Dans l'analyse des performances des systèmes de télécommunications, on s'intéresse souvent aux moments d'ordre supérieur de deux variables aléatoires, X et Y:

$$\boxed{E\left[X^n Y^m\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m f_{XY}\left(x,y\right) dxdy}$$

Moments conjoints d'ordre supérieur

Covariance et coefficient de corrélation

Le moment conjoint de deux variables aléatoires centrées, $(X\text{-}\mu_X)$ et $(Y\text{-}\mu_Y)$, est la covariance de X et Y:

$$\boxed{\operatorname{cov}[XY] \triangleq E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}$$

$$\operatorname{cov}[XY] = E\left[XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X\mu_Y\right]$$

$$\operatorname{cov}[XY] = E[XY] - E[X\mu_Y] - E[\mu_X Y] + E[\mu_X\mu_Y]$$

$$\operatorname{cov}[XY] = E[XY] - \mu_Y E[X] - \mu_X E[Y] + \mu_X\mu_Y$$

$$\operatorname{cov}[XY] = E[XY] - \mu_Y\mu_X - \mu_X\mu_Y + \mu_X\mu_Y$$

$$\boxed{\operatorname{cov}[XY] = E[XY] - \mu_X\mu_Y}$$

Moments conjoints d'ordre supérieur

Covariance et coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation ρ entre deux variables aléatoires X et Y est défini par:

$$\boxed{\rho \triangleq \frac{\operatorname{cov}[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

Deux variables aléatoires X et Y sont dites non corrélées si, et seulement si, leur covariance, $\operatorname{cov}[XY] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$, est nulle. Elles sont orthogonales si et seulement si leur corrélation $E[XY] = 0$.

$$\boxed{E[XY] = 0 \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ sont orthogonales}}$$

$$\boxed{\operatorname{cov}[XY] = 0 \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ sont non corrélées}}$$